А. К. ВЛАСОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ
II

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1952

А. К. ВЛАСОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ
II

А. К. ВЛАСОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ II

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ (ЧАСТЬ ВТОРАЯ)

ИЗДАНИЕ 5-Е, ИСПРАВЛЕННОЕ

Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для втузов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1952 ЛЕНИНГРАД

11-5-2

Редактор *О. С. Ивашев-Мусатов.*
Техн. редактор *Р. А. Негримовская.* Корректор *Л. О. Сечейко.*

Подписано к печати 23/VI 1952 г. Бумага 60×92¹/₁₆. 16 бум. л. 32 печ. л. 37,73 уч.-изд. л.
44 000 тип. зн. в печ. л. Т-02143. Тираж 25 000 экз. Цена книги 11 р. 30 к.
Переплёт 1 р. Заказ № 3437.
Номинал по прейскуранту 1952 г.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

СОДЕРЖАНИЕ.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ.

ГЛАВА I.

Основные понятия и положения высшей алгебры.

§ 1. Задачи высшей алгебры 9
§ 2. Формулы Маклорена и Тэйлора для целых рациональных функций 9
§ 3. Разложение целой рациональной функции на множители 12
§ 4. Кратные корни уравнения 15
§ 5. Вопрос о числе корней уравнения 16

ГЛАВА II.

Комплексные числа.

§ 1. Вектор на плоскости и комплексное число 18
§ 2. Комплексное число как отношение двух векторов на плоскости . 20
§ 3. Сложение векторов 22
§ 4. Сложение комплексных чисел 23
§ 5. Вычитание комплексных чисел 24
§ 6. Умножение комплексных чисел 25
§ 7. Деление комплексных чисел 28
§ 8. Мнимая единица. Алгебраическая форма комплексного числа . . 29
§ 9. Тригонометрическая форма комплексных чисел 30
§ 10. Извлечение корня 31
§ 11. Понятие предела для комплексного переменного 34
§ 12. Комплексная величина как показательная функция аргумента. Формула Эйлера 34
Упражнения 38

ГЛАВА III.

Основное предложение высшей алгебры.

§ 1. Целый многочлен как функция комплексного переменного 39
§ 2. Основное предложение высшей алгебры 41
§ 3. Уравнение с действительными коэффициентами. Сопряжённые корни 43
§ 4. Соотношения между коэффициентами уравнения и его корнями . 44
§ 5. Общий вид разложения целого многочлена в произведение . . . 45

ГЛАВА IV.

Приближённое вычисление корней уравнения.

§ 1. Отделение действительных корней уравнения. Теорема Штурма . 47
§ 2. Определение верхней и нижней границ положительных (или отрицательных) корней уравнения 53

§ 3. Графики целых рациональных функций — параболы высших порядков 55
§ 4. Приближённое вычисление корней уравнения 58
Упражнения 65

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ.

ГЛАВА I.

Интегрирование рациональных функций.

§ 1. Интегрирование простейших дробей 66
§ 2. Разложение рациональной дроби на простейшие и интегрирование её в случае действительных корней знаменателя 67
§ 3. Разложение рациональной дроби и интегрирование её в случае мнимых корней знаменателя 76
§ 4. Соотношение между круговыми функциями и логарифмом. Формула Эйлера 85
§ 5. Метод Остроградского выделения алгебраической части интеграла от рациональной дроби 86
Упражнения 90

ГЛАВА II.

Интегрирование иррациональных функций.

§ 1. Иррациональные функции 92
§ 2. Интегрирование выражений, содержащих рациональные степени линейной дроби 93
§ 3. Интеграл двучленного дифференциала 95
§ 4. Интегрирование выражений, содержащих корень из квадратного трёхчлена 99
Упражнения 106

ГЛАВА III.

Интегрирование трансцендентных функций.

§ 1. Интегрирование функций, содержащих трансцендентный множитель с алгебраической производной 107
§ 2. Интегрирование функций с трансцендентным множителем e^{ax}, $\sin ax$ или $\cos ax$ 108
§ 3. Интегрирование выражений, зависящих рационально от показательной функции: $\int R(e^x)\,dx$ 110
§ 4. Интегралы выражений, зависящих рационально от тригонометрических функций: $\int R(\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \ldots)\,dx$. Интегрирование помощью подстановки 111
§ 5. Формулы приведения для интеграла $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ 114
§ 6. Разложение степеней $\sin^n x$ и $\cos^m x$ по синусам и косинусам кратных дуг 115
§ 7. Интегралы вида $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int e^{ax} \sin bx\,dx$ 117
§ 8. Интегралы вида $\int x^n e^{ax} \cos bx\,dx$, $\int x^n e^{ax} \sin bx\,dx$ 118
§ 9. Некоторые замечательные определённые интегралы 120
Упражнения 126

ГЛАВА IV.

Функции нескольких переменных. Частные производные.

§ 1. Функции нескольких переменных 129
§ 2. Непрерывность функций нескольких переменных 131
§ 3. Частные производные 136
§ 4. Частные дифференциалы. Полный дифференциал 138
§ 5. Дифференцирование сложной функции 143
§ 6. Дифференцирование неявной функции 147
§ 7. Теорема о существовании неявной функции 149
§ 8. Геометрическое значение частных производных и полного дифференциала функции двух независимых переменных 151
§ 9. Уравнение касательной плоскости и нормаль к поверхности . . . 154
§ 10. Высшие частные производные. Независимость результата многократного дифференцирования от порядка дифференцирования . . 157
§ 11. Высшие частные и полные дифференциалы 160
§ 12. Теорема Эйлера об однородных функциях 163

Упражнения 164

ГЛАВА V.

Максимумы и минимумы функций нескольких переменных.

§ 1. Максимум и минимум функции двух независимых переменных. Изыскание тех значений аргумента, при которых функция может иметь максимум или минимум 167
§ 2. Условия существования максимума или минимума функции двух независимых переменных 168
§ 3. Максимум и минимум функции многих переменных 176
§ 4. Относительный максимум или минимум 183
§ 5. Метод Лагранжа для решения вопроса об относительном максимуме или минимуме 185

Повторительные вопросы 192
Упражнения 193

ГЛАВА VI.

Задачи интегрального исчисления для функций нескольких переменных.

§ 1. Нахождение первообразной функции по данной частной производной 195
§ 2. Интеграл функции, зависящей от параметра 196
§ 3. Дифференцирование под знаком интеграла. Правило Лейбница . . 198
§ 4. Интегрирование по параметру 206
§ 5. Геометрическое значение двойного интеграла 211
§ 6. Криволинейный интеграл 214
§ 7. Криволинейные интегралы, зависящие лишь от концов пути интегрирования 218
§ 8. Интегрирование полного дифференциала 222

Повторительные вопросы 227
Упражнения 228

ГЛАВА VII.

Кратные интегралы.

§ 1. Двойной интеграл 230
§ 2. Теорема о среднем значении 235
§ 3. Вычисление двойного интеграла 236

§ 4. Замена переменных в двойном интеграле 245
§ 5. Элемент площади в криволинейных координатах 249
§ 6. Свойства функционального определителя 252
§ 7. Переход от декартовых координат к полярным. Примеры применения замены переменных в двукратном интеграле 252
§ 8. Вычисление площади поверхности 257
§ 9. Площадь поверхности в криволинейных координатах 262
§ 10. Поверхностный интеграл или интеграл, распространённый на какую-либо определённую сторону поверхности 264
§ 11. Трёхкратный интеграл 266
§ 12. Замена переменных в трёхкратном интеграле 270
§ 13. Вычисление объёмов 275
§ 14. Центр тяжести. Теоремы Гюльдена 278
§ 15. Момент инерции 282

Повторительные вопросы 284

Упражнения 285

ГЛАВА VIII.

Соотношения между интегралами, распространёнными на область, и интегралами, распространёнными на границу этой области.

§ 1. Формула Остроградского на плоскости 287
§ 2. Формула Остроградского в пространстве 291
§ 3. Теорема Грина 294
§ 4. Формула Стокса 295
§ 5. Понятие о векторном анализе 298

Упражнения 299

ГЛАВА IX.

Основания теории рядов.

§ 1. Определение рядов. Их сходимость и расходимость 300
§ 2. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда 302
§ 3. Ряды с положительными членами. Признаки их сходимости, вытекающие из сравнения рядов 303
§ 4. Признаки сходимости, вытекающие из свойств общего члена ряда или группы таких членов 305
§ 5. Иные признаки сходимости ряда 311
§ 6. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость . . . 313
§ 7. Действия с рядами 319
§ 8. Ряды с комплексными членами 322

Повторительные вопросы 323

Упражнения 323

ГЛАВА X.

Функциональные ряды.

§ 1. Ряды, члены которых зависят от переменного аргумента 325
§ 2. Равномерная сходимость 327
§ 3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости и некоторые свойства равномерно сходящихся рядов 329
§ 4. Интегрирование и дифференцирование рядов 330
§ 5. Свойства степенных рядов 332

§ 6. Задача разложения функции в степенной ряд; аппроксимация функции целым многочленом 338
§ 7. Ряды Тэйлора и Маклорена 342
§ 8. Разложение простейших функций в степенной ряд 343
§ 9. Косвенные приёмы разложения некоторых функций в степенной ряд 349
§ 10. Ряды Тэйлора и Маклорена для функций нескольких переменных 351
§ 11. Ряды Фурье 354
§ 12. Неопределённые выражения 367
Упражнения 374

ГЛАВА XI.

Приложение анализа к геометрии.

§ 1. Касательная и нормаль к плоской кривой 376
§ 2. Отрезки касательной и нормали. Подкасательная и поднормаль . 378
§ 3. Отрезки касательной и нормали в полярных координатах. Полярные подкасательная и поднормаль 380
§ 4. Асимптоты плоских кривых 383
§ 5. Особые точки плоских кривых 388
§ 6. Прикосновение плоских кривых между собой 397
§ 7. Кривизна плоской кривой 403
§ 8. Радиус кривизны. Центр кривизны. Круг кривизны 406
§ 9. Эволюта кривой 409
§ 10. Огибающая семейства кривых 412
§ 11. Касательная прямая к пространственной кривой. Нормальная плоскость 418
§ 12. Соприкасающаяся плоскость. Главная нормаль и бинормаль . . . 420
§ 13. Кривизна и кручение пространственной кривой 423
§ 14. Системы поверхностей в пространстве 426
Упражнения 432

ГЛАВА XII.

Дифференциальные уравнения.

§ 1. Общие понятия 435
§ 2. Общий и частный интегралы дифференциального уравнения . . . 436
§ 3. Приближённое построение интегральных кривых уравнений первого порядка 441
§ 4. Разделение переменных. Однородные уравнения 443
§ 5. Линейные уравнения первого порядка 446
§ 6. Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к линейным уравнениям 454
§ 7. Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка 459
§ 8. Второй способ нахождения особых решений 462
§ 9. О существовании решений дифференциальных уравнений первого порядка 464
§ 10. Случаи нарушения единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Аналитическое обоснование существования особых решений 473
§ 11. Общие свойства интегралов линейных дифференциальных уравнений второго порядка 477
§ 12. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами 480

§ 13. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка 482
§ 14. Однородные линейные уравнения n-го порядка 484
§ 15. Однородные линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами 488
§ 16. Уравнения Эйлера 491
§ 17. Неоднородные линейные уравнения n-го порядка 494
§ 18. Интегрирование уравнений при помощи рядов 502
Упражнения 505
Алфавитный указатель 509

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ.

ГЛАВА I.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ.

§ 1. Задачи высшей алгебры.

Изучение алгебраических уравнений высших степеней составляет одну из главных задач высшей алгебры. Это изучение может быть сведено к изучению свойств целых рациональных функций, иначе — многочленов, расположенных по степеням аргумента.

Пусть $f(x)$ означает многочлен n-й степени:

$$f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n.$$

Если при $x = a$ значение этого многочлена равно нулю, т. е. если $f(a) = 0$, то a называют *корнем уравнения* $f(x) = 0$, или *корнем многочлена* $f(x)$. Отыскание корней целых многочленов или решение уравнений высших степеней и составляет одну из главных задач высшей алгебры. Существует ли хоть один корень у данного многочлена, и если существует, то сколько корней, — вот первые вопросы этой теории.

В исследовании вопроса о корнях алгебраических уравнений имеет существенное значение разложение целого многочлена на множители. Не менее важно при этом и разложение целого многочлена по степеням разности $x - a$, где a есть какое-нибудь число. В этом разложении обнаруживается и смысл высших производных от целых рациональных функций.

§ 2. Формулы Маклорена и Тэйлора для целых рациональных функций.

Все коэффициенты многочлена какой-либо степени

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots + Mx^n \qquad (1)$$

можно выразить через значения его и его последовательных производных в фиксированной точке, например в точке $x = 0$. Действительно, составляя эти производные и полагая в них и в самом много-

члене $x=0$, получим:

$$f(x)=A+Bx+Cx^2+\ldots+Mx^n \quad \text{и } f(0)=A,$$
$$f'(x)=B+2Cx+\ldots+nMx^{n-1} \quad \text{» } f'(0)=B,$$
$$f''(x)=1\cdot 2\,C+2\cdot 3\,Dx+\ldots$$
$$\ldots+n(n-1)Mx^{n-2} \quad \text{» } f''(0)=1\cdot 2\,C,$$
$$f'''(x)=1\cdot 2\cdot 3D+3\cdot 4\cdot 5Ex+\ldots$$
$$\ldots+n(n-1)(n-2)Mx^{n-3} \quad \text{» } f'''(0)=1\cdot 2\cdot 3D,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\ldots nM \quad \text{» } f^{(n)}(0)=1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot M,$$

откуда

$$A=f(0),\quad B=\frac{1}{1}f'(0),\quad C=\frac{1}{1\cdot 2}f'(0),$$
$$D=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0),\ \ldots,\quad M=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{(n)}(0).$$

Заменяя в многочлене (1) коэффициенты A, B, C, ..., M их выражениями через функцию и её производные, мы представим целую рациональную функцию в следующем виде:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{(n)}(0). \qquad (2)$$

Такой вид многочлена и составляет формулу Маклорена для целых рациональных функций.

Пример 1. Разложить целую рациональную функцию $f(x)=(x+a)^n$, где n — целое положительное число, по степеням x (бином Ньютона).

Решение. Находим производные данной функции и полагаем потом $x=0$; получим таким образом следующие значения самой функции и n её производных:

$$f(0)=a^n,\ f'(0)=na^{n-1},\ f''(0)=n(n-1)a^{n-2},\ \ldots,$$
$$f^{(k)}(0)=n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k},\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=n(n-1)\ldots 2\cdot 1.$$

Следовательно,

$$(x+a)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}a^{n-k}x^k+\ldots+x^n$$

или, в обычном расположении по убывающим степеням x,

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}a^{n-k}x^k+\ldots+a^n.$$

Формулу производной степени, на которую мы здесь опирались, можно было бы вывести не на основании бинома Ньютона [как

в т. I, стр. 309], а, например, исходя из формулы производной произведения [т. I, стр. 312]. Поэтому выкладка, проведенная в этом примере, представляет собой новое доказательство разложения бинома Ньютона, а именно, основывающееся на формуле Маклорена.

Формулу Маклорена можно обобщить, расположив данный многочлен по степеням $x-a$, где a — какое-нибудь число. В самом деле, данный многочлен можно прежде всего представить в виде

$$f(x)=A+B[(x-a)+a]+C[(x-a)+a]^2+ \\ +D[(x-a)+a]^3+\ldots+M[(x-a)+a]^n.$$

Считая здесь всюду $x-a$ за одно количество, раскроем все скобки по биному Ньютона и расположим все члены по степеням разности $x-a$, обозначив коэффициенты при различных степенях $x-a$ через A_1, B_1, C_1, D_1, ..., M_1 (причём, очевидно, $M_1=M$):

$$f(x)=A_1+B_1(x-a)+C_1(x-a)^2+ \\ +D_1(x-a)^3+\ldots+M_1(x-a)^n. \qquad (3)$$

Составляя производные этого многочлена и полагая в них и в самом многочлене $x=a$, будем иметь:

$$f(x)=A_1+B_1(x-a)+C_1(x-a)^2+\ldots \\ \ldots+M_1(x-a)^n; \qquad f(a)=A_1;$$

$$f'(x)=B_1+2C_1(x-a)+\ldots \\ \ldots+nM_1(x-a)^{n-1}; \qquad f'(a)=1\cdot B_1;$$

$$f''(x)=1\cdot 2C_1+2\cdot 3D_1(x-a)+\ldots \\ \ldots+n(n-1)M_1(x-a)^{n-2}; \quad f''(a)=1\cdot 2\cdot C_1;$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdot 3\ldots nM_1; \qquad f^{(n)}(a)=1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot M_1.$$

Отсюда

$$A_1=f(a), \quad B_1=\frac{1}{1}f'(a), \quad C_1=\frac{1}{1\cdot 2}f''(a),$$

$$D_1=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a), \ldots, \quad M_1=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{(n)}(a).$$

Подставляя эти значения коэффициентов в многочлен (3), получим

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{(n)}(a). \qquad (4)$$

Такое разложение многочлена по степеням разности $x-a$ составляет формулу Тэйлора для целых рациональных функций. Положив $x=a+h$ и, следовательно, $x-a=h$, можно представить эту формулу в ином виде:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{(n)}(a). \qquad (4')$$

Из формул Маклорена и Тэйлора следует, что целая рациональная функция n-й степени вполне определяется своим значением и значениями своих производных при одном каком-нибудь значении аргумента.

Пример 2. Разложить многочлен x^3-2x+5 по степеням разности $x-1$.

Решение. По формуле Тэйлора (4) имеем

$$x^3-2x+5=f(1)+\frac{x-1}{1}f'(1)+\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}f''(1)+\frac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(1),$$

где

$$\begin{aligned} f(1)&=1^3-2\cdot 1+5=4,\\ f'(x)&=3x^2-2 \text{ и } f'(1)=1,\\ f''(x)&=6x \quad\ \ \text{» } f''(1)=6,\\ f'''(x)&=6 \quad\ \ \text{» } f'''(1)=6. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x^3-2x+5=4+(x-1)+3(x-1)^2+(x-1)^3.$$

Пример 3. Определить целую функцию четвёртой степени, которая при $x=2$ принимает значение 3, а производные её соответственно 1, 2, 6, 48.

$$f(2)=3,\ f'(2)=1,\ f''(2)=2,\ f'''(2)=6 \text{ и } f^{IV}(2)=48.$$

Отв.

$$f(x)=3+\frac{x-2}{1}\cdot 1+\frac{(x-2)^2}{1\cdot 2}\cdot 2+\frac{(x-2)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 6+\frac{(x-2)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 48,$$

или

$$f(x)=29-55x+43x^2-15x^3+2x^4.$$

§ 3. Разложение целой рациональной функции на множители.

В формуле Тэйлора

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}f^{(n)}(a) \quad (5)$$

все члены правой части, кроме первого, содержат множителем разность $x-a$. Вынеся эту разность за скобки и обозначив через $Q_1(x)$ многочлен, остающийся в скобках, можно представить целую рациональную функцию в виде суммы двух слагаемых, из которых одно делится без остатка на двучлен $x-a$, а другое совсем не содержит аргумента x:

$$f(x)=f(a)+(x-a)Q_1(x). \quad (6)$$

Таким образом мы получаем следующее предложение.

Теорема Безу. *При делении многочлена $f(x)$ на разность $x-a$ получается остаток, равный значению делимого при $x=a$, т. е. $f(a)$; иначе — разность $f(x)-f(a)$ делится без остатка на разность $x-a$.*

Это предложение можно доказать и непосредственным делением, без помощи формулы Тэйлора. Действительно, если $Q_1(x)$ — частное,

а R_1 — остаток при делении многочлена $f(x)$ на разность $x-a$, то

$$f(x)=(x-a)\,Q_1(x)+R_1, \qquad (6')$$

причём остаток R_1 не содержит x, так как делитель $x-a$ первой степени. Из тождества (6′) следует, если положить $x=a$:

$$R_1=f(a),$$

что и требовалось доказать.

Показатель степени частного $Q_1(x)$ на единицу меньше показателя степени делимого, т. е. равен $n-1$, а старший коэффициент равен старшему коэффициенту делимого, т. е. p_0, так как соответствующий коэффициент делителя равен единице.

Следствие 1. *Если число a есть корень многочлена $f(x)$, т. е. если $f(a)=0$, то этот многочлен делится без остатка на разность $x-a$, т. е. разлагается на множители, из которых один равен $x-a$:*

$$f(x)=(x-a)\,Q_1(x), \text{ если } f(a)=0. \qquad (7)$$

Следствие 2. *Уравнение n-й степени имеет не более n различных корней.*

Действительно, пусть a — корень многочлена n-й степени $f(x)$, так что, по доказанному,

$$f(x)=(x-a)\,Q_1(x), \qquad (7')$$

где $Q_1(x)$ — некоторый многочлен $(n-1)$-й степени. Пусть теперь b — корень многочлена $f(x)$, отличный от a. Подставляя $x=b$ в (7′), получаем:

$$0=(b-a)\,Q_1(b).$$

Но, по условию, $b-a\neq 0$. Следовательно, $Q_1(b)=0$, т. е. b есть корень многочлена $Q_1(x)$. Тогда

$$Q_1(x)=(x-b)\,Q_2(x),$$

откуда

$$f(x)=(x-a)(x-b)\,Q_2(x),$$

где $Q_2(x)$ — многочлен $(n-2)$-й степени. Продолжая то же рассуждение, заключаем, что если $a, b, \ldots, d$ суть p попарно различных корней многочлена $f(x)$, то

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-d)\,Q_p(x),$$

где $Q_p(x)$ — многочлен степени $n-p$. А так как степень многочлена есть неотрицательное число, то $p\leqslant n$, что и означает, что $f(x)$ не может иметь более n различных корней.

Мы видим вместе с тем, что решение алгебраического уравнения и разложение целого многочлена на линейные множители, т. е. множители первой степени относительно x, — задачи равносильные: если мы разложим многочлен $f(x)$ на линейные множители, то тем самым

решим и уравнение $f(x)=0$; если удалось решить уравнение $f(x)=0$, то тем самым найдено и разложение многочлена $f(x)$ на множители.

Если многочлен n-й степени $f(x)$ имеет n различных корней $a, b, \ldots, l$, то, по доказанному,

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l)\,Q_n(x),$$

где $Q_n(x)$ — многочлен нулевой степени, т. е. постоянное число. Ясно, что $Q_n(x)$ есть коэффициент p_0 при n-й степени x в $f(x)$, так что

$$f(x)=p_0(x-a)(x-b)\ldots(x-l).$$

Примеры. 1. Уравнение $x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}=0$, как следует из формулы решения квадратного уравнения, имеет корни $x_1=\frac{2}{3}$ и $x_2=-1$; старший коэффициент равен единице; следовательно,

$$x^2+\frac{x}{3}-\frac{2}{3}=\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1).$$

2. Уравнение $3x^2+x-2=0$ имеет те же корни: $x_1=\frac{2}{3}$ и $x_2=-1$. Следовательно, трёхчлен $3x^2+x-2$ содержит множителями, как и в предыдущем примере, двучлены $x-\frac{2}{3}$ и $x+1$; но коэффициент при старшей степени равен 3; поэтому

$$3x^2+x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+1).$$

3. Трёхчлен x^2-5x+6 разлагается на множители $x-2$ и $x-3$. В самом деле,

$$x^2-5x+6=x^2-2x-3x+2\cdot 3=(x-2)x-3(x-2)=(x-2)(x-3).$$

Следовательно, этот трёхчлен имеет корни $x_1=2$ и $x_2=3$.

4. Многочлен $x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$, очевидно, имеет корень 1:

$$1^5-1^4+1^3-1^2+1-1=0.$$

Следовательно, этот многочлен делится на $x-1$ без остатка; и действительно,

$$x^5-x^4+x^5-x^2+x-1=(x-1)(x^4+x^2+1).$$

Решение уравнения путём разложения левой его части на множители удаётся лишь в исключительных случаях. В общем же случае сведение задачи решения уравнения к задаче разложения многочлена на двучленные множители ещё не означает её упрощения.

Следствие 3. *Многочлен n-й степени, имеющий более n различных корней, тождественно равен нулю, т. е. все коэффициенты его равны нулю.*

Действительно, если бы утверждение не было справедливым, то многочлен был бы выше степени n, что противоречит условию.

Если, например, трёхчлен Ax^2+Bx+C обращается в нуль при $x=x_1$, $x=x_2$ и $x=x_3$, где x_1, x_2 и x_3 попарно различны, то он

тождественно равен нулю; иначе — из равенств

$$Ax_1^2+Bx_1+C=0,\quad Ax_2^2+Bx_2+C=0,\quad Ax_3^2+Bx_3+C=0$$

при попарно различных x_1, x_2 и x_3 следует

$$A=0,\quad B=0,\quad C=0.$$

§ 4. Кратные корни уравнения.

Если многочлен $f(x)$ делится на k-ю степень разности $x-a$, но не делится уже на $(k+1)$-ю степень этой разности, то число a называют корнем *кратности* k многочлена $f(x)$, а k — показателем кратности корня a. Если $k=1$, то a называют *простым* корнем многочлена $f(x)$, если же $k>1$, то *кратным* корнем.

Теорема. *Кратный корень многочлена $f(x)$ будет корнем и производной $f'(x)$, но кратности на единицу меньшей.*

Действительно, если a — корень многочлена $f(x)$, имеющий кратность k, то, по самому определению кратности корня,

$$f(x)=(x-a)^k\varphi(x), \tag{8}$$

где $\varphi(a)\neq 0$. Дифференцируя это равенство, имеем:

$$f'(x)=k(x-a)^{k-1}\varphi(x)+(x-a)^k\varphi'(x)=$$
$$=(x-a)^{k-1}[k\varphi(x)+(x-a)\varphi'(x)].$$

Но выражение в квадратных скобках при $x=a$ обращается в $k\varphi(a)$, что, в силу предположения, отлично от нуля. Тем самым последнее равенство для $f'(x)$ и показывает, что a есть корень многочлена $f'(x)$ кратности $k-1$.

Таким образом, если a — корень кратности k для уравнения $f(x)=0$, то

$$\left.\begin{gathered}f(a)=0,\ f'(a)=0,\ f''(a)=0,\ \ldots,\ f^{(k-1)}(a)=0,\\ \text{но } f^{(k)}(a)\neq 0.\end{gathered}\right\} \tag{9}$$

Эти соотношения являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы число a было k-кратным корнем уравнения $f(x)=0$. В самом деле, по формуле Тэйлора при условиях (9) многочлен $f(x)$ можно представить в следующем виде:

$$f(x)=\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

откуда, по вынесении $(x-a)^k$ за скобку, получим

$$f(x)=(x-a)^k\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ означает целый многочлен, оставшийся в скобках, причём $\varphi(a)=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\neq 0$.

Следствие. *Кратные корни уравнения* $f(x)=0$ *будут корнями кратности, на единицу меньшей наибольшего общего делителя многочлена* $f(x)$ *и его производной* $f'(x)$.

Таким образом нахождением наибольшего общего делителя двух многочленов можно отделить кратные корни уравнения.

Пример. Дано уравнение

$$x^3-5x^2+8x-4=0.$$

Имеет ли это уравнение кратные корни и если имеет, как их определить?

Чтобы ответить на этот вопрос, найдём наибольший общий делитель многочленов

$$f(x)=x^3-5x^2+8x-4 \text{ и } f'(x)=3x^2-10x+8,$$

или, так как в данной задаче постоянный множитель не имеет значения, — многочленов $3f(x)$ и $f'(x)$. При делении $3f(x)$ на $f'(x)$ получается остаток $-\frac{2}{3}(x-2)$:

$$3f(x)=\left(x-\frac{5}{3}\right)f'(x)-\frac{2}{3}(x-2). \tag{10}$$

Отсюда видно, что наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$ должен быть делителем и разности $x-2$. Далее, $f'(x)$ делится без остатка на $x-2$. Тогда то же равенство (10) показывает, что и $f(x)$ делится без остатка на $x-2$. Следовательно, двучлен $x-2$ и будет искомым наибольшим общим делителем $f(x)$ и $f'(x)$, а 2 — двукратным корнем уравнения $f(x)=0$. При делении многочлена $f(x)=x^3-5x^2+8x-4$ на $(x-2)^2$ получается частное $x-1$. Следовательно,

$$f(x)=(x-2)^2(x-1),$$

т. е. данное уравнение имеет двукратный корень 2 и простой корень 1.

§ 5. Вопрос о числе корней уравнения.

Выше было показано, что многочлен n-й степени может иметь не более n корней. Если бы мы доказали, что всякий многочлен имеет по крайней мере один корень, то из этого предложения с необходимостью следовало бы, что многочлен n-й степени имеет ровно n корней. Но доказать это для общего случая возможно, лишь расширив понятие числа введением новых — *мнимых* чисел. Присоединение этих чисел к тем, которыми мы до сих пор располагали (целые, дробные, иррациональные, положительные и отрицательные) и которые объединяются наименованием *действительных чисел*, даёт возможность общих единообразных формулировок во многих вопросах математики.

Решение квадратного уравнения в области действительных чисел приводит к трём случаям: либо квадратное уравнение имеет два корня, либо квадратное уравнение имеет один корень, либо, наконец, квадратное уравнение не имеет корней, т. е. квадратный трёхчлен, представляющий левую часть такого уравнения, при всяком значении x сохраняет один и тот же знак. Например, уравнение $x^2-4x+3=0$

имеет два корня 1 и 3; уравнение $x^2-4x+4=0$ удовлетворяется только одним значением $x=2$, а уравнение $x^2-4x+8=0$ не имеет совсем корней, т. е. трёхчлен x^2-4x+8 ни при каком (действительном) значении x не обращается в нуль, представляя при всяком значении положительное число.

Решение уравнения $x^2-4x+8=0$ по формуле

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

выведенной для уравнения $x^2+px+q=0$, где p и q — какие-нибудь числа, приводит к действию, не имеющему смысла, именно — к извлечению квадратного корня из отрицательного числа:

$$x=2\pm\sqrt{4-8}=2\pm\sqrt{-4}.$$

Квадраты всех действительных чисел, положительных или отрицательных, суть положительные числа, а между тем символом $\sqrt{-4}$ требуется отыскание числа, квадрат которого равнялся бы отрицательному числу -4.

Если мы хотим, чтобы формула решения квадратного уравнения имела о б щ н о с т ь, т. е. имела смысл при всяких числовых значениях коэффициентов p и q, мы должны прежде всего вложить смысл в такого рода символы, как $\sqrt{-4}$, должны расширить понятие числа введением новых — *мнимых* чисел.

ГЛАВА II.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.

§ 1. Вектор на плоскости и комплексное число.

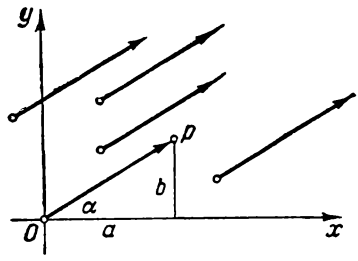
Рассматривая положительные и отрицательные числа как положительные и отрицательные абсциссы точек некоторой прямолинейной оси, мы тем самым вносим конкретное толкование, геометрическую картинность в отвлечённое арифметическое содержание, связанное с понятием числа. Всякому положительному и отрицательному числу соответствует определённая точка на оси абсцисс или отрезок определённого направления, а всякому действию над числом — некоторое смещение соответствующей точки или некоторая геометрическая операция — построение — над соответствующим отрезком. Сложение и вычитание чисел очень просто интерпретируются как последовательные смещения в ту или другую сторону соответственно знаку слагаемых; умножение на положительное число — как растяжение (увеличение) множимого отрезка, если множитель больше единицы, или сжатие (уменьшение), если множитель меньше единицы.

В рассматриваемой геометрической картине умножение на —1 могло бы быть определено как перемена направления отрезка, изображающего множимое число, без изменения его длины, а умножение на какое-нибудь отрицательное число, например —5, означало бы сложное действие, состоящее из двух умножений: на —1 и на 5, т. е. состоящее в перемене направления (знака) и соответствующем увеличении.

Вектор. Придерживаясь геометрической интерпретации, можно наметить дальнейшее обобщение понятия числа, введя в то геометрическое содержание, которое связано с этим понятием, направление в более широком смысле, чем это было сделано при введении отрицательных чисел, именно — направление на плоскости, а не только на прямой в ту или другую сторону. Отрезок, отличаемый от других отрезков не только по размеру, но и по направлению, называют *вектором*. Размер и направление являются характерными признаками для многих величин из области геометрии, механики и физики; таковы смещение точки в определённом

направлении и на определённое расстояние, скорость, ускорение, сила и т. п. Такого рода величины суть векторы. Понятие вектора на плоскости можно привести в соответствие с расширенным понятием числа.

Вектор можно представить геометрически направленным отрезком, начальной и конечной точками которого вектор вполне определяется. Параллельное смещение отрезка не изменяет вектора (черт. 1). Приведём все векторы на плоскости к одному началу — началу прямоугольной системы координат. В таком случае каждому вектору $\overrightarrow{OA}$ соответствует определённая точка A плоскости, и обратно [1]). Таким образом, вектор $\overrightarrow{OA}$ можно определить координатами a и b этой конечной точки A.



Черт. 1.

Совокупность двух чисел (a, b), взятых в определённом порядке как координаты конца приведённого вектора, мы и будем называть в обобщённом смысле *числом*, полнее — *комплексным числом*. Числа a и b будут составляющими его числами. Каждому комплексному числу соответствует точка плоскости, и обратно — каждой точке плоскости соответствует комплексное число.

Модуль и аргумент. Размер отрезка OA, независимо от направления последнего, называют *модулем*, а угол наклона его к положительному направлению оси абсцисс — *аргументом* комплексного числа (a, b). Составляющие a и b комплексного числа определяют и модуль и аргумент. Обозначив модуль через r, а аргумент через α, будем иметь:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Модуль и аргумент являются полярными координатами конца соответствующего вектора и также определяют соответствующий вектор и комплексное число, как и составляющие последнего a и b; поэтому мы будем обозначать комплексное число также парой чисел r и α, но заключая их в прямоугольные скобки:

$$(a, b) = [r, \alpha].$$

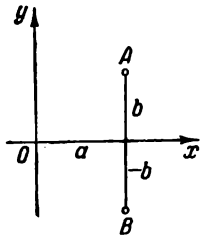
Равенство комплексных чисел. Два комплексных числа мы будем считать равными, если они соответствуют одной и той же точке на плоскости.

Легко видеть, что два комплексных числа (a, b) и (a', b') будут равны между собой только в том случае, когда составляющие их

[1]) Вектор, идущий из точки O в точку A, обозначают двумя буквами со стрелкой наверху: $\overrightarrow{OA}$.

соответственно равны, т. е. если $a = a'$ и $b = b'$. Действительно, только при этом условии соответствующие точки плоскости совпадают. Модули равных комплексных чисел также равны между собой, но аргументы могут отличаться на целое число оборотов $2\pi k$, где k — любое целое число.

Положение действительных чисел среди комплексных. Действительные числа можно рассматривать как частный случай комплексных, у которых вторая составная часть b равна нулю: $(a, 0) = a$. В частности $(0, 0) = 0$. Действительные числа изображаются на плоскости точками оси абсцисс.



Черт. 2.

Чисто мнимые числа. Комплексные числа, первая составляющая которых равна нулю, т. е. числа вида $(0, b)$ называют *чисто мнимыми* или просто *мнимыми*. Они изображаются точками оси ординат.

Сопряжённые комплексные числа. Два комплексных числа (a, b) и $(a, -b)$, отличающихся одно от другого только знаком мнимой части, называют сопряжёнными. Соответствующие этим числам точки плоскости A и B симметрично расположены относительно оси абсцисс (черт. 2). Действительное число само себе сопряжено. Модули сопряжённых чисел равны между собой, а аргументы либо отличаются знаками, либо дополняют друг друга до полного числа оборотов:

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2},$$

$$\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) = 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

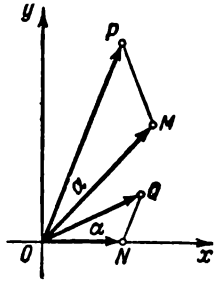
Действия над действительными числами вполне уже определены и подчиняются известным законам. Надо теперь установить такого рода операции над комплексными числами, которые можно было бы назвать действиями сложения, вычитания, умножения и деления. Эти операции надо определить, во-первых, так, чтобы они подчинялись законам действий (т. I, Введение, § 3); во-вторых, так, чтобы действия над действительными числами являлись частными случаями тех же действий над комплексными.

§ 2. Комплексное число как отношение двух векторов на плоскости.

Предыдущее определение комплексного числа является обобщением числа как абсциссы. Это определение можно поставить в связь с обобщением числа как отношения двух величин.

Измерение одного отрезка другим, как мы видели (т. I, Введение, § 6), приводит к действительному числу. В этом смысле число и

можно определить как отношение двух отрезков. Если два отрезка расположены на одной прямой, например, оси абсцисс, на которой мы различаем два взаимно противоположных направления, то отношение этих отрезков может быть положительным или отрицательным числом, смотря по тому, будут ли направления сравниваемых отрезков одинаковыми или противоположными. Вводя понятие вектора на плоскости, т. е. отрезка, различаемого от других на той же плоскости не только по величине, но и по направлению, естественно ожидать, что и понятие отношения может быть обобщено.



Черт. 3.

Отношение векторов, например $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM}$ (черт. 3), должно являться результатом сравнения не только длин их, но и направлений. Сравнение размеров векторов даётся отношением в первоначальном смысле этого слова и приводит таким образом к действительному (абсолютному) числу, которое является результатом измерения величины первого вектора величиной второго, принятой за единицу меры. Разница в направлении векторов может быть характеризована углом между ними. Чтобы из второго вектора получить первый, нужно, во-первых, второй изменить (увеличить или уменьшить) в отношении $OP:OM$, иначе — умножить величину второго вектора на действительное число, которое измеряет это отношение, и, во-вторых, повернуть на соответствующий угол так, чтобы направление его совпало с направлением первого.

Таким образом, в понятие отношения двух векторов на плоскости включается отношение их размеров в первоначальном смысле этого слова и угол между этими векторами. Если мы имеем две пары векторов

$$\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OM} \text{ и } \overrightarrow{OQ},\ \overrightarrow{ON},$$

размеры которых пропорциональны (черт. 3), а углы между векторами первой и между векторами второй пары равны, иначе — если треугольники OPM и OQN лежат в одной плоскости и подобны с одинаковым расположением сторон, то отношение векторов $\overrightarrow{OP}:\overrightarrow{OM}$ должно считать равным отношению векторов $\overrightarrow{OQ}:\overrightarrow{ON}$:

$$\overrightarrow{OP}:\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OQ}:\overrightarrow{ON}. \tag{1}$$

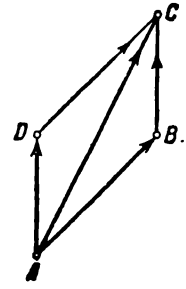
Будем считать отрезок ON расположенным на оси абсцисс и примем его за единицу меры. В таком случае для данных векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM}$ можно единственным образом построить вектор $\overrightarrow{OQ}$ так, чтобы имела место пропорция (1).

Таким образом, отношение любой пары векторов $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OM}$ можно свести к отношению векторов $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{ON}$, из которых второй расположен на оси абсцисс и принят за единицу меры; вектор $\overrightarrow{OQ}$ интерпретирует отношение данной пары векторов $\overrightarrow{OP}:\overrightarrow{OM}$. Всякому отношению двух векторов соответствует вектор, отношение которого к вектору-единице равно данному отношению. Обратно, любой вектор определяет некоторое отношение, равное отношению данного вектора к вектору-единице. Пусть a, b—координаты конца данного вектора $\overrightarrow{OQ}$. Комплексное число (a, b) имеет модулем размер вектора $\overrightarrow{OQ}$, а аргументом угол NOQ, и потому мы можем сказать теперь, что отношение двух векторов на плоскости есть комплексное число.

Таким образом, векторы плоскости в своём отношении к вектору-единице представляют комплексные числа.

§ 3. Сложение векторов.

Данный вектор определяет смещение любой точки плоскости в направлении вектора и на расстояние, равное длине его. Пусть совершается два последовательных смещения какой-либо точки: первое переводит смещаемую точку из положения A в положение B, второе — из положения B в положение C (черт. 4). Два таких последовательных смещения можно заменить одним, переводящим точку из положения A непосредственно в положение C. Этим смещением определяется и соответствующий вектор.



Черт. 4.

Такую замену двух смещений одним мы будем называть *сложением* соответствующих этим смещениям векторов. Из такого определения следуют выполнимость и однозначность сложения векторов.

Дополним треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, где сторона AD параллельна BC, а сторона DC параллельна AB. Смещения AD и BC соответствуют одному слагаемому вектору, а DC и AB — другому; так как смещения в порядке ABC и ADC равносильны одному и тому же смещению AC, то сложение векторов подчиняется закону переместительному.

Сложение векторов, как построение, сводится или к построению диагонали параллелограмма (как говорят — сложение по правилу параллелограмма) или к замене ломаной линии её замыкающей. Из этого построения следует, что сложение векторов подчиняется и закону сочетательному:

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

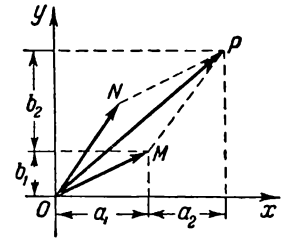
Действительно, три последовательных смещения, переводящих точку из положения A в положение B, из B в C и из C в D, равносильны одному смещению из A в D; но тому же смещению равносильны два последовательных смещения из A в B и из B в D, что соответствует сложению вектора a с суммой векторов b и c, а также из A в C и из C в D, что соответствует сложению суммы векторов a и b с вектором c.

Лишь закон монотонии, имеющий место при сложении действительных чисел (т. I, стр. 16), не имеет применения, ибо понятия «больше» и «меньше» для векторов не определены.

§ 4. Сложение комплексных чисел.

Комплексное число мы определили как пару чисел (a, b), являющихся координатами конца вектора, начало которого находится в начале координат. Построение, названное нами сложением векторов, определяет соответствующую операцию вычисления — сложение комплексных чисел. Составные части комплексного числа a и b являются проекциями соответствующего вектора r на оси координат:

$$a = \text{пр}_x r, \quad b = \text{пр}_y r.$$



Черт. 5.

Пусть $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ — два вектора (черт. 5). Построив их сумму $\overrightarrow{OP}$, будем иметь ломаную OMP, состоящую из слагаемых векторов, и замыкающую OP, равную сумме этих векторов. Если (a_1, b_1) и (a_2, b_2) — два соответствующих комплексных числа и (a, b) — комплексное число, соответствующее сумме их, то

$$a = \text{пр}_x OP, \quad a_1 = \text{пр}_x OM = \text{пр}_x NP \quad \text{и} \quad a_2 = \text{пр}_x ON = \text{пр}_x MP,$$
$$b = \text{пр}_y OP, \quad b_1 = \text{пр}_y OM = \text{пр}_y NP \quad \text{и} \quad b_2 = \text{пр}_y ON = \text{пр}_y MP.$$

Но проекция ломаной на какую-либо ось равна сумме проекций ее звеньев:

$$\text{пр}_l OMP = \text{пр}_l OP = \text{пр}_l OM + \text{пр}_l MP.$$

Следовательно,

$$a = a_1 + a_2 \quad \text{и} \quad b = b_1 + b_2.$$

Таким образом, *сложение двух комплексных чисел* (a_1, b_1) *и* (a_2, b_2) *определяется равенством*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2). \qquad (2)$$

Следствие 1. *Комплексное число можно представить как сумму соответствующих действительного и чисто мнимого чисел*:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b). \tag{3}$$

Следствие 2. *Сумма двух сопряжённых чисел равна действительному числу*:

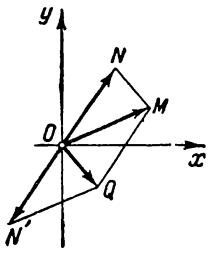
$$(a, b) + (a, -b) = (a + a, b - b) = (2a, 0) = 2a. \tag{4}$$

§ 5. Вычитание комплексных чисел.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, и потому

$$(a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2). \tag{5}$$

Пусть $\overrightarrow{OM}$ — вектор, соответствующий уменьшаемому (a_1, b_1), а $\overrightarrow{ON}$ — вычитаемому (a_2, b_2) (черт. 6). Ломаная ONM представляет сумму двух векторов $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{NM}$, равную уменьшаемому $\overrightarrow{OM}$. Следовательно, отрезок, соединяющий конец N вычитаемого вектора $\overrightarrow{ON}$ с концом M уменьшаемого вектора $\overrightarrow{OM}$, представляет вектор, соответствующий разности двух векторов. Из этого построения следует, что расстояние между двумя точками, изображающими два комплексных числа, равно модулю разности этих чисел.



Черт. 6.

Действительно,

$$\operatorname{mod}(a_1 - a_2, b_1 - b_2) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = NM.$$

Построение разности двух векторов можно свести к построению диагонали параллелограмма, одной стороной которого является уменьшаемый вектор $\overrightarrow{OM}$, а другой — вектор $\overrightarrow{ON'}$, равный по размеру, но противоположный по направлению вычитаемому (черт. 6):

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON'} = \overrightarrow{OQ}.$$

Сложение и вычитание действительных чисел являются частными случаями сложения и вычитания комплексных чисел, так как для действительных чисел соответствующие векторы располагаются на одной прямой — оси абсцисс. То же самое следует и непосредственно из определяющих равенств (2) и (5):

$$(a_1, 0) \pm (a_2, 0) = (a_1 \pm a_2, 0 \pm 0) = a_1 \pm a_2.$$

§ 6. Умножение комплексных чисел.

Определение умножения комплексных чисел должно быть таково, чтобы, с одной стороны, удовлетворялись законы действий (т. I, Введение, § 3), с другой — чтобы умножение действительных чисел являлось частным случаем умножения комплексных. Такое определение легко установить, исходя из понятия отношения векторов на плоскости. Действительно, пусть две пары векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{ON}$ имеют одно и то же отношение, т. е.

$$\overrightarrow{OP} : \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} : \overrightarrow{ON}. \tag{6}$$

Это значит, что, изменяя вектор $\overrightarrow{OM}$ в отношении $\overrightarrow{OQ} : \overrightarrow{ON}$, мы получим из него вектор $\overrightarrow{OP}$. Изменение величины в каком-либо отношении мы будем называть *умножением* этой величины на соответствующее число, и потому из предыдущей обобщенной пропорции, т. е. равенства двух отношений векторов, пользуясь знаком умножения[1]), можем как следствие написать:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} \cdot \frac{\overrightarrow{OQ}}{\overrightarrow{ON}}. \tag{7}$$

Под умножением здесь разумеется построение. Если векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OQ}$ даны ($\overrightarrow{ON} = 1$), то легко построить и вектор $\overrightarrow{OP}$. Действительно, по предыдущему треугольники MOP и NOQ (черт. 3) должны быть подобны, с одинаковым расположением в смысле последовательности сторон; поэтому на стороне OM можно построить единственный треугольник, подобный данному NOQ, и тем самым однозначно определится искомый вектор $\overrightarrow{OP}$.

Исходя из такого построения, легко вычислить и размер r искомого вектора, а также угол α его наклона к оси абсцисс. Действительно, пусть r_1 и r_2 — размеры данных векторов, а α_1 и α_2 — углы их наклона к оси абсцисс:

$$OM = r_1, \quad OQ = r_2, \quad ON = 1,$$
$$\angle NOM = \alpha_1, \quad \angle NOQ = \alpha_2.$$

Из подобия треугольников MOP и NOQ и их расположения относительно оси абсцисс следует:

$$r : r_1 = r_2 : 1 \text{ и } \alpha - \alpha_1 = \alpha_2,$$

---

[1]) В равенствах (6) и (7) двоеточие (:) и черта $\left(\frac{\overrightarrow{OQ}}{\overrightarrow{ON}}\right)$ суть не знаки действия, а знаки отношения.

откуда

$$r = r_1 r_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2. \tag{8}$$

Теперь, переходя от векторов к комплексным числам, можно определить равенствами (8) и умножение комплексных чисел. Размер вектора и угол его наклона к оси абсцисс являются для соответствующего комплексного числа модулем и аргументом. Таким образом, *умножить одно комплексное число* (a_1, b_1) *на другое* (a_2, b_2) *— значит составить новое комплексное число — произведение, модуль которого равен произведению модулей множимого и множителя, а аргумент — сумме аргументов их*:

$$[r_1, \alpha_1]\ [r_2, \alpha_2] = [r_1 r_2, \alpha_1 + \alpha_2]. \tag{9}$$

В частности, умножить на комплексное число, модуль которого равен единице, значит повернуть вектор, соответствующий множимому, на угол, равный аргументу множителя.

Если перенести обобщённое понятие отношения векторов и на комплексные числа, определяя отношение двух комплексных чисел как отношение соответствующих векторов, то умножение комплексных чисел можно определить так: умножить одно комплексное число на другое — значит составить третье комплексное число, произведение, так, чтобы его отношение к множимому равнялось отношению множителя к единице. То же самое можно сказать другими словами и следующим образом: *умножить одно комплексное число на другое — значит составить из множимого третье число, произведение, так, как множитель составлен из единицы.*

Эта последняя формулировка определения умножения сходна с обычным обобщённым определением умножения действительных чисел, но при этом расширяется, конечно, содержание слова «составить».

Формула (9) определяет операцию умножения, сводя её к действиям над модулями и аргументами. Модуль и аргумент являются полярными координатами конца соответствующего комплексному числу вектора. Составные части комплексного числа a и b выражаются через его модуль и аргумент r и α следующими формулами:

$$a = r\cos\alpha, \qquad b = r\sin\alpha.$$

На основании формул (8) получим:

$$a = r_1 r_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) = r_1 r_2 [\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2],$$

$$b = r_1 r_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = r_1 r_2 [\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \sin\alpha_2],$$

или

$$a = a_1 a_2 - b_1 b_2 \quad \text{и} \quad b = a_1 b_2 + a_2 b_1. \tag{10}$$

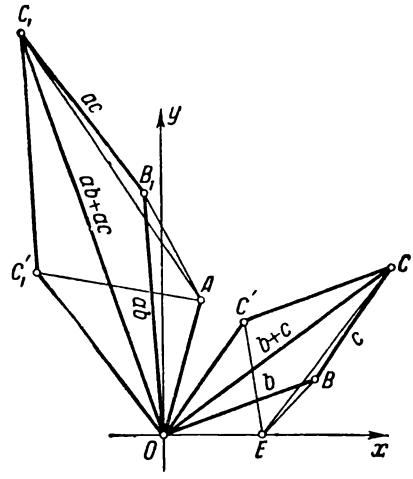
Таким образом, умножение комплексных чисел определяется также следующей формулой:

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{11}$$

Из формулы (9) [или (11)] следует, что *умножение комплексных чисел* 1) *всегда и однозначно выполнимо и* 2) *подчиняется закону переместительному и сочетательному*, так как сводится к перемножению действительных чисел — модулей и сложению действительных чисел — аргументов. Закон монотонии неприменим, так как понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определены.

Закон распределительный $(a+b)c = ac+bc$, или $a(b+c) = ab+ac$ (где a, b и c — комплексные числа) вытекает из соответствующего этим действиям построения.

Справедливость распределительного закона $a(b+c) = ab+ac$ докажем следующим образом. Пусть $OBCC'$ — параллелограмм, определяющий сумму $b+c$, и $\overrightarrow{OA}$ — вектор, соответствующий множимому a (черт. 7). Строя на стороне OA треугольники OAB_1, OAC_1 и OAC_1', соответственно подобные треугольникам OEB, OEC и OEC', где $OE = 1$, мы тем самым строим произведения $ab = OB_1$, $ac = OC_1'$ и $a(b+c) = OC_1$. Из подобия треугольников следует, что фигура $OB_1C_1C_1'$ — тоже параллелограмм, и потому



Черт. 7.

$$OC_1' = B_1C_1 \quad \text{и} \quad OC_1 = OB_1 + OC_1',$$

то есть

$$a(b+c) = ab+ac.$$

Таким образом, умножение комплексных чисел подчиняется законам действий.

Умножение действительных чисел является частным случаем умножения комплексных. Действительно, полагая в формуле (11) $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$, будем иметь:

$$(a_1, 0)(a_2, 0) = a_1a_2. \qquad (11')$$

Произведение двух сопряжённых чисел равно действительному числу — квадрату их общего модуля:

$$(a, b)(a, -b) = (a^2+b^2, -ab+ba) = (a^2+b^2, 0) = a^2+b^2.$$

Произведение комплексных чисел, как и произведение действительных, только в том случае обращается в нуль, когда по крайней мере один из сомножителей равен нулю, так как комплексное число только тогда равно нулю, когда его модуль равен нулю, а модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, т. е. произведению действительных чисел.

Возведение в целую положительную степень представляет частный случай умножения, и потому *при возведении комплексного числа* $(a, b) = [r, \alpha]$, где r — модуль его, а α — аргумент, в n-ю степень возводится в эту степень модуль, а аргумент умножается на показатель степени:

$$(a, b)^n = [r, \alpha]^n = [r^n, n\alpha]. \tag{12}$$

§ 7. Деление комплексных чисел.

Деление есть действие, обратное умножению, т. е. действие, которым по данному произведению и одному из сомножителей отыскивается другой. Из этого общего определения и вытекают те вычисления, к каким сводится деление комплексных чисел. Если r и α — модуль и аргумент искомого частного, а r_1 и α_1, r_2 и α_2 — соответственно модули и аргументы делимого и делителя, то согласно определению деления и умножения должны иметь место равенства

$$[r, \alpha]\,[r_2, \alpha_2] = [r_1, \alpha_1], \text{ т. е. } rr_2 = r_1 \text{ и } \alpha + \alpha_2 = \alpha_1,$$

откуда

$$r = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2. \tag{13}$$

Таким образом, *при делении одного комплексного числа на другое надо разделить модуль делимого на модуль делителя, а из аргумента делимого вычесть аргумент делителя*:

$$\frac{[r_1, \alpha_1]}{[r_2, \alpha_2]} = \left[\frac{r_1}{r_2}, \alpha_1 - \alpha_2\right]. \tag{14}$$

Из того же определения можно вывести способ вычисления составляющих a и b искомого частного. По определению имеем:

$$(a, b)(a_2, b_2) = (a_1, b_1).$$

Выполняя по формуле (11) перемножение, получим:

$$(aa_2 - bb_2, ab_2 + ba_2) = (a_1, b_1),$$

откуда

$$aa_2 - bb_2 = a_1, \quad ab_2 + ba_2 = b_1.$$

Решая эти уравнения относительно a и b, получим:

$$a = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad b = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

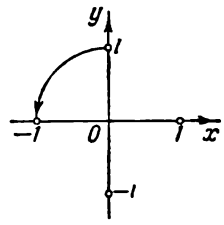
Следовательно,

$$(a_1, b_1) : (a_2, b_2) = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right). \tag{15}$$

Таким образом, деление однозначно выполнимо, если только делитель не равен нулю, т. е. если a_2 и b_2 не равны нулю одновременно, или, соответственно формулам (13), если $r_2 \neq 0$.

§ 8. Мнимая единица. Алгебраическая форма комплексного числа.

Мнимой единицей называют комплексное число (0, 1); соответствующая этому числу точка расположена на оси ординат (черт. 8). Обозначим это комплексное число буквой i, т. е. положим $(0, 1) = i$. Модуль его равен единице, а аргумент $\frac{\pi}{2}$. *Умножить на i — значит, геометрически, повернуть вектор, соответствующий множимому, против движения часовой стрелки на прямой угол.* Поэтому квадрат мнимой единицы равен отрицательной единице. Действительно, по формуле (12) имеем:



Черт. 8.

$$i^2 = (0, 1)^2 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]^2 = [1, \pi].$$

Но комплексное число с аргументом, равным π, есть отрицательное число, абсолютная величина которого равна модулю. Следовательно,

$$i^2 = [1, \pi] = -1. \tag{16}$$

Тот же результат можно получить по формуле (11), полагая $a_1 = a_2 = 0$ и $b_1 = b_2 = 1$:

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1,\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1. \tag{16'}$$

На основании равенства (16) легко определяются и высшие степени i:

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = +1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \text{ и т. д.}$$

Определяя и для комплексных чисел извлечение корня как операцию, обратную соответствующему возведению в степень, пользуясь для этого действия тем же знаком, мы должны заключить, что

$$i = \sqrt{-1}. \tag{17}$$

Таким образом, символ $\sqrt{-1}$, не имевший раньше смысла, теперь, после введения комплексных чисел, получил вполне определённое содержание.

Всякое чисто мнимое число $(0, b)$ можно представить, пользуясь формулой (11), в виде произведения действительного числа b на мнимую единицу i. Действительно, перемножая по формуле (11) комплексные числа $(b, 0)$ и $(0, 1)$, будем иметь:

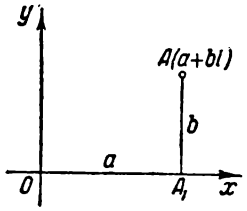
$$(b, 0) \cdot (0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1,\ b \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (0, b),$$

и потому, принимая во внимание, что $(b, 0) = b$ и $(0, 1) = i$, получим:

$$(0, b) = (b, 0)(0, 1) = bi. \tag{18}$$

Всякое комплексное число (a, b), как мы знаем (§ 4), разлагается на сумму действительного и чисто мнимого числа (черт. 9) и потому может быть представлено в следующей форме:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi. \tag{19}$$



Черт. 9.

Применяя к комплексным числам в этой форме установленные правила действий, будем иметь:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i,$$

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i,$$

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Из этих равенств видно, что действия над комплексными числами совершаются по обычным правилам алгебраических вычислений над выражениями вида $a + bi$, причём полагается $i^2 = -1$. Так, последнее равенство мы могли бы получить следующим образом:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}.$$

§ 9. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

Комплексное число $a + bi$ можно представить в следующей так называемой *тригонометрической форме*, если заменить составные части a и b их выражениями через модуль и аргумент:

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha \quad \text{и} \quad a + bi = r(\cos \alpha + i \sin \alpha). \tag{20}$$

Множитель $\cos \alpha + i \sin \alpha$ содержит аргумент α и определяет направление соответствующего вектора, а потому называется *коэффициентом направления*.

Для тригонометрической формы комплексного числа особенно просто выражаются уже установленные правила умножения, деления, возведения в степень, а также извлечения корня. Формулы (9) и (14) принимают теперь вид

$$r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \cdot r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) = r_1 r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]. \tag{21}$$

$$\frac{r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)}{r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]. \tag{22}$$

Правило (12) возведения комплексного числа в степень составляет так называемую *формулу Моавра*:

$$(a + bi)^n = [r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha). \tag{23}$$

§ 10. Извлечение корня.

Из формулы Моавра вытекает и правило извлечения корня из комплексного числа: *при извлечении корня из комплексного числа извлекается* (арифметически) *соответствующий корень из модуля, а аргумент делится на показатель корня.* В самом деле, пусть ρ и φ — искомые модуль и аргумент корня n-й степени из комплексного числа

$$a + bi = r\,[\cos(\alpha + 2\pi k) + i\sin(\alpha + 2\pi k)].$$

Мы имеем теперь полный аргумент $\alpha + 2\pi k$, где k — какое угодно целое число, потому что в рассматриваемой операции этим обусловливается многозначность результата, между тем как при умножении, делении и возведении в целую степень результат не зависит от того, принят ли во внимание полный аргумент $\alpha + 2\pi k$ или только главное его значение α. Таким образом имеем

$$\sqrt[n]{r\,[\cos(\alpha + 2\pi k) + i\sin(\alpha + 2\pi k)]} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

или

$$r\,[\cos(\alpha + 2\pi k) + i\sin(\alpha + 2\pi k)] = \rho^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi),$$

откуда

$$\rho^n = r \text{ и } n\varphi = \alpha + 2\pi k, \text{ или } \rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[n]{r\,[\cos(\alpha + 2\pi k) + i\sin(\alpha + 2\pi k)]} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\alpha + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2\pi k}{n}\right]. \quad (24)$$

Здесь под символом $\sqrt[n]{r}$ разумеется арифметическое значение корня. Давая k различные значения 0, 1, 2, ..., $n-1$, получим различные значения для аргумента

$$\frac{\alpha}{n},\ \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n},\ \frac{\alpha}{n} + 2\cdot\frac{2\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\alpha}{n} + (n-1)\cdot\frac{2\pi}{n}.$$

Для других значений k значения аргумента будут повторять только что полученные, или точнее — отличаться от них на полное число оборотов. Таким образом, при извлечении корня n-й степени получается n различных результатов. Корень n-й степени из действительного числа также имеет n значений, так как действительное положительное или отрицательное число можно представить в виде комплексного с аргументом $2k\pi$ или $(2k+1)\pi$:

$$A = A(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi),$$
$$-A = A\,[\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi].$$

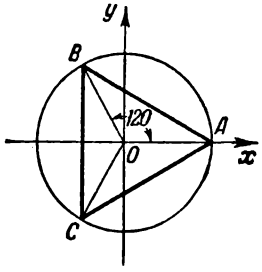
Таким образом, для частного вида уравнения n-й степени, так называемого двучленного уравнения $x^n = A$, мы теперь уже можем сказать, что оно имеет n корней.

Пример. Найти все значения (действительные и мнимые) корня кубичного из единицы.

Имеем:

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi; \quad \sqrt[3]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}.$$

Полагая последовательно k равным 0, 1, 2, получим три значения кубичного корня, из которых два — сопряжённые числа:



Черт. 10.

$$x_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$

$$x_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad x_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

$$\frac{2\pi}{3} = \text{arc } 120°; \quad \cos \frac{2\pi}{3} = \cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{4\pi}{3} = \text{arc } 240°; \quad \cos \frac{4\pi}{3} = \cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2};$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin 240° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Действительно, возводя числа x_0, x_1, x_2 в куб, получим 1:

$$x_0^3 = 1;$$

$$x_1^3 = \frac{1}{8}(-1 + i\sqrt{3})^3 =$$

$$= \frac{1}{8}[(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot i\sqrt{3} + 3 \cdot (-1) \cdot i^2 \cdot 3 + i^3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}] =$$

$$= \frac{1}{8}[-1 + 3i\sqrt{3} + 9 - 3i\sqrt{3}] = 1;$$

$$x_2^3 = -\frac{1}{8}(1 + i\sqrt{3})^3 = -\frac{1}{8}[1 + 3i\sqrt{3} - 9 - 3i\sqrt{3}] = 1.$$

Точки, соответствующие числам x_0, x_1, x_2, модули которых равны 1, а амплитуды 0°, 120°, 240°, являются вершинами A, B, C (черт. 10) правильного треугольника, вписанного в круг, радиус которого равен 1. Вообще надо заметить, что построение правильного n-угольника, вписанного в круг, и извлечение корня n-й степени из 1 — задачи равносильные.

Корень квадратный из отрицательного числа можно представить как произведение $\pm i$ и корня той же степени из абсолютной величины этого числа. Рассмотрим, например, $\sqrt{-A}$, где A — положительное число. Отрицательное число $-A$ можно представить как

комплексное с модулем A и амплитудой $(2k+1)\pi$; поэтому

$$\sqrt{-A} = \sqrt{A}\,[\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi] =$$
$$= \sqrt{A}\left[\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Если k — чётное число (в частности равное нулю), то из последнего равенства следует:

$$\sqrt{-A} = i\sqrt{A}, \quad \text{или} \quad \sqrt{-A} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{A};$$

если же k принять равным нечётному числу, то

$$\sqrt{-A} = -i\sqrt{A}, \quad \text{или} \quad \sqrt{-A} = -\sqrt{-1}\cdot\sqrt{A}.$$

Двузначность всякого квадратного радикала отмечается знаком плюс или минус, поставленным перед ним, а если знак явно не поставлен, то принято разуметь знак плюс. Из последних двух равенств лишь первое подчиняется этому правилу обозначения, а потому второе, чтобы и его согласовать с принятым условием обозначения, следует писать в таком виде:

$$-\sqrt{-A} = -\sqrt{-1}\cdot\sqrt{A}.$$

Извлечение корня — операция многозначная; поэтому всякое равенство, содержащее знаки радикалов, нужно понимать относящимся к какому-либо определённому их значению. Так, правила действий с радикалами, рассматриваемые в элементарной алгебре, относятся к арифметическому значению корней: арифметическим будет единственное действительное значение корней нечётной степени из действительных чисел и положительное значение корней чётной степени из положительных чисел. Этим правилам действий подчиняются действия над корнями из модулей комплексных чисел, но не действия над корнями самих этих чисел. Так, правило действий над радикалами, выражаемое равенством

$$\sqrt{A}\cdot\sqrt{B} = \sqrt{A\cdot B},$$

где перед каждым из радикалов разумеется лишь один знак плюс, имеет определённый смысл лишь в том случае, если A и B — положительные числа. Но нельзя написать такого равенства:

$$\sqrt{-A}\cdot\sqrt{-B} = \sqrt{(-A)\cdot(-B)} = \sqrt{A\cdot B},$$

где A и B — положительные числа, так как по предыдущему имеем:

$$\sqrt{-A} = i\sqrt{A}, \quad \sqrt{-B} = i\sqrt{B},$$

следовательно,

$$\sqrt{-A}\cdot\sqrt{-B} = i\sqrt{A}\cdot i\sqrt{B} = i^2\sqrt{A}\cdot\sqrt{B} = -\sqrt{AB}.$$

§ 11. Понятие предела для комплексного переменного.

Комплексная величина $x+iy$ будет комплексным переменным, если составляющие её x и y меняются, как действительные переменные, по какому-либо закону. Если $\lim x = a$ и $\lim y = b$, то комплексное переменное $x+iy$ стремится к пределу $a+ib$, т. е.

$$\lim(x+iy) = \lim x + i \lim y. \tag{25}$$

Из этого определения следует, что модуль разности комплексного переменного и его предела

$$|x+iy-(a+ib)| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \tag{26}$$

стремится к нулю как своему пределу, так как $(x-a)^2$ и $(y-b)^2$ по условию стремятся к нулю. Обратно, если этот модуль (26) имеет пределом нуль, то это означает, что x стремится к a, а y к b, т. е. $\lim(x+iy) = a+ib$; действительно,

$$|x-a| \leqslant \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}, \qquad |y-a| \leqslant \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

и левые части стремятся к нулю, когда правая стремится к нулю.

Теоремы о пределах, в частности о пределе суммы, произведения, частного, выведенные (т. I, Дифф. и интегр. исч., ч. 1, гл. II) для действительного переменного, применимы и к комплексному переменному.

Комплексное переменное, имеющее пределом нуль, называют бесконечно малым. Модуль бесконечно малого комплексного переменного бесконечно мал, и обратно.

§ 12. Комплексная величина как показательная функция аргумента. Формула Эйлера.

Действия с комплексными числами, модули которых равны единице, сводятся исключительно к действиям над аргументами по тем же правилам, по каким действия над степенями сводятся к действиям над показателями, именно: умножение таких комплексных чисел сводится к сложению аргументов, деление — к вычитанию, возведение в степень — к умножению аргумента, а извлечение корня — к делению аргумента:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha) : (\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta),$$
$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha,$$
$$\sqrt[n]{\cos(\alpha+2\pi k) + i\sin(\alpha+2\pi k)} = \cos\frac{\alpha+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\alpha+2\pi k}{n}.$$

По тем же правилам совершаются и действия над степенями:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \quad a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}, \quad (a^\alpha)^n = a^{n\alpha}, \quad \sqrt[n]{a^\alpha} = a^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Если рассматривать аргумент как переменное, то комплексная величина будет функцией этого независимого переменного. Обозначим аргумент — независимое переменное — через φ, а комплексную величину — функцию — через z:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{27}$$

Следует заметить, что эту функцию нельзя представить графически в прежнем смысле, т. е. рассматривая её как ординату, так как z — мнимая величина; но каждому значению z будет соответствовать точка M на плоскости, именно точка окружности радиуса, равного единице, так как модуль равен единице; при непрерывном изменении φ точка M перемещается по этой окружности.

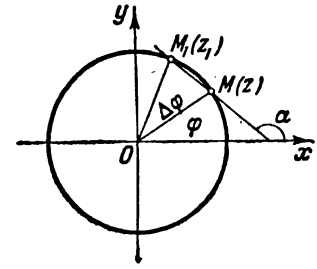
Комплексная величина z есть функция действительного переменного φ. Найдём производную этой функции, т. е. $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta\varphi}$. Эта производная должна быть, вообще говоря, комплексной величиной, так как Δz — комплексная величина, а $\Delta\varphi$ — действительная. К выражению $\cos\varphi + i\sin\varphi$, опираясь на теорию пределов для комплексного переменного, можно применить обычные правила дифференцирования, хотя в нём и встречается нечто новое, что не имелось в виду при выводе этих правил, именно, множитель $i = \sqrt{-1}$. Но i не зависит от изменений аргумента φ и потому играет роль такую же в этом отношении, как и всякое постоянное. Итак, дифференцируя, найдем [1])

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\sin\varphi + i\cos\varphi. \tag{28}$$

[1]) Этот же результат можно получить и непосредственно, находя $\lim\limits_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta\varphi}$. Пусть значению z соответствует точка M на окружности радиуса, равного единице (черт. 11), а значению $z+\Delta z = z_1$ — точка M_1. Δz, как разность комплексных величин z_1 и z, представляется геометрически по размеру (модулю) и направлению хордой $\overline{MM_1}$ (стр. 24):

$$\Delta z = \overline{MM_1}(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

где α — угол наклона хорды $\overline{MM_1}$ к положительному направлению оси абсцисс. $\Delta\varphi$ равно дуге $\overset{\smile}{MM_1}$. Кроме того, $\overline{MM_1} = 2\sin\frac{\overset{\smile}{MM_1}}{2} = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$. Имея эти выражения для Δz и хорды $\overline{MM_1}$, составляем отношение $\Delta z : \Delta\varphi$, предел которого и будет искомой производной:



Черт. 11.

$$\frac{\Delta z}{\Delta\varphi} = \frac{\overline{MM_1}}{\overset{\smile}{MM_1}}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Переходим теперь к пределу в предположении, что $\Delta\varphi$ стремится

Вынося i за скобку и заменяя $\frac{1}{i}$ на $-i$, получим:

$$\frac{dz}{d\varphi} = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{d\varphi} = iz. \tag{29}$$

Таким образом, функция $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ обладает тем свойством, что, во-первых, её производная равна самой функции, умноженной на i, во-вторых, при $\varphi = 0$ эта функция равна единице. Если бы z и i были действительными числами, мы отсюда сделали бы заключение, что $z = e^{i\varphi}$. Но z — комплексное число и $i = \sqrt{-1}$, символ $e^{i\varphi} = e^{\varphi\sqrt{-1}}$ ещё не определён и не имеет смысла. Опираясь на сходство свойств показательной функции и функции $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, мы определим теперь этот символ, полагая

$$z = e^{\varphi i}, \quad \text{или} \quad e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{30}$$

Эта формула — формула Эйлера — расширяет, таким образом, понятие показательной функции и на область мнимых показателей; вместе с тем расширяется и понятие обратной функции — функции логарифмической на область отрицательных и мнимых чисел. Всякое комплексное число, а в частности и действительное, можно теперь представить в форме произведения его модуля на $e^{\alpha i}$, где α есть аргумент этого числа:

$$a + ib = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) = re^{\alpha i};$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{и} \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + 2k\pi.$$

Пример. Представить числа 1, i, -1, $-i$ как значения показательной функции $e^{\alpha i}$.

Имеем:

$$1 = \cos 2\pi k + i\sin 2\pi k = e^{2\pi k i},$$

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i} = e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$-1 = \cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi = e^{(2k+1)\pi i} = e^{\pi i},$$

$$-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = e^{\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i} = e^{-\frac{\pi}{2}i},$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$

к нулю, т. е. что точка M_1, перемещаясь по окружности, стремится к точке M. При этом хорда $\overline{MM_1}$, вращаясь около точки M, в пределе займёт положение касательной к окружности в точке M, и, следовательно, угол α стремится к углу $\varphi + \frac{\pi}{2}$, где φ — аргумент точки M. Принимая во внимание, кроме того, что $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0}\left(\sin\frac{\Delta\varphi}{2} : \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 1$ (т. I, стр. 257), получим:

$$\frac{dz}{d\varphi} = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

или

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\sin\varphi + i\cos\varphi.$$

Если $a+bi$ — какое-либо комплексное число, то по определению полагаем

$$e^{a+bi}=e^{a}\cdot e^{bi}=e^{a}(\cos b+i\sin b).$$

Всякое число можно представить в виде $z=re^{(\alpha+2\pi k)i}$, где r — его модуль, а $\alpha+2\pi k$ — его полный аргумент ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$); модуль r можно представить в виде степени e:

$$r=e^{\ln r}.$$

Следовательно,

$$z=e^{\ln r}\cdot e^{(\alpha+2\pi k)i},\quad \text{или}\quad z=e^{\ln r+(\alpha+2\pi k)i}.$$

Отсюда следует, что логарифм числа в расширенном смысле этого слова есть функция многозначная:

$$\ln z=\ln r+(\alpha+2\pi k)i,\quad \text{где}\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

При таком понимании слова логарифм можно утверждать, что и отрицательное число имеет логарифм, например:

$$\ln(-1)=\ln e^{(2k+1)\pi i}=(2k+1)\pi i.$$

В силу данных определений логарифмы от комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и логарифмы действительных чисел. Так, например, если z_1 и z_2 — два комплексных числа, то $\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2$. В самом деле, пусть φ_1 и φ_2, r_1 и r_2 — модули и аргументы данных чисел. В таком случае

$$z_1=r_1e^{\varphi_1 i}=e^{\ln r_1+(\varphi_1+2\pi k_1)i},$$
$$z_2=r_2e^{\varphi_2 i}=e^{\ln r_2+(\varphi_2+2\pi k_2)i},$$

где k_1 и k_2 могут принимать независимо друг от друга все целые значения. Следовательно,

$$z_1z_2=e^{\ln r_1+\ln r_2+(\varphi_1+\varphi_2+2\pi k)i},$$

или

$$z_1z_2=e^{\ln(r_1r_2)+(\varphi_1+\varphi_2+2\pi k)i},$$

где $k=k_1+k_2$ принимает все целые значения. Отсюда, по определению логарифма комплексного аргумента,

$$\ln(z_1z_2)=\ln(r_1r_2)+(\varphi_1+\varphi_2+2\pi k)i,$$

или

$$\ln(z_1z_2)=\ln r_1+(\varphi_1+2\pi k_1)i+\ln r_2+(\varphi_2+2\pi k_2)i.$$

Но

$$\ln r_1+(\varphi_1+2\pi k_1)i=\ln z_1\quad\text{и}\quad \ln r_2+(\varphi_2+2\pi k_2)i=\ln z_2,$$

следовательно,

$$\ln(z_1z_2)=\ln z_1+\ln z_2.$$

Применяя формулу Эйлера к двум сопряжённым комплексным числам с модулем, равным единице, будем иметь

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \tag{31}$$

$$e^{-\alpha i} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) = \cos\alpha - i\sin\alpha, \tag{32}$$

откуда получаются выражения тригонометрических функций через показательные:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}), \tag{33}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2i}(e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}). \tag{34}$$

В нашем изложении формула Эйлера определяет показательную функцию через функции тригонометрические, а эти последние определены обычным способом, т. е. геометрически. Если бы показательная функция для мнимых показателей была определена независимо от формулы Эйлера, то эта последняя определяла бы тригонометрические функции, и из формул (31), (32), (33) и (34) можно было бы вывести все основные формулы тригонометрии. Для примера выведем таким способом формулу для $\cos(\alpha+\beta)$. По формуле (33) имеем:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}[e^{(\alpha+\beta)i} + e^{-(\alpha+\beta)i}] = \frac{1}{2}[e^{\alpha i}\cdot e^{\beta i} + e^{-\alpha i}\cdot e^{-\beta i}].$$

Применяем далее ко второй части предыдущего равенства формулы (31) и (32):

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}[(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) + (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta)].$$

По умножении и приведении подобных членов, получим

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Показать, что общие корни уравнений $z^n = 1$ и $z^m = 1$ определяются уравнением $z^p = 1$, где p — наибольший общий делитель m и n.

2. Показать, что всякая степень корня уравнения $z^n = 1$ также есть корень этого уравнения, т. е. если α — корень уравнения $z^n = 1$, то и α^2, $\alpha^3, \ldots$, а также α^{-1}, α^{-2}, $\alpha^{-3}, \ldots$ — тоже корни этого уравнения.

3. Показать, что все корни уравнения $z^p = 1$, где p — простое число, можно представить как степени одного из корней, не равного единице: $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^p$.

4. Какое геометрическое содержание заключается в предыдущих предложениях?

ГЛАВА III.

ОСНОВНОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ.

§ 1. Целый многочлен как функция комплексного переменного.

Предложение, согласно которому алгебраическое уравнение любой степени имеет по крайней мере один корень, действительный или мнимый, является основным в алгебре. Из него на основании тех рассуждений, которые были изложены в § 1 главы I, как следствие, вытекает, что уравнение n-й степени имеет n корней (не обязательно попарно различных). Доказательство основного предложения сводится к исследованию целого многочлена

$$f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n; \qquad (1)$$

здесь z принимает любое комплексное значение, и даже коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ можно ради общности предположить комплексными:

$$z = x + iy, \; p_k = a_k + ib_k \; (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

После выполнения в многочлене (1) указанных действий над комплексными величинами мы получим многочлен $(n+1)$-й степени относительно i; но все чётные степени i, как следует из определяющего этот символ равенства $i^2 + 1 = 0$, равны $+1$ или -1, а нечётные степени равны $+i$ или $-i$:

$$i^2 = -1, \; i^4 = +1, \; i^6 = -1, \ldots; \; i^3 = -i, \; i^5 = i, \; i^7 = -i, \ldots$$

Следовательно, многочлен $f(x+iy)$ сводится к двучлену первой степени относительно i

$$f(x+iy) = U(x, y) + iV(x, y), \qquad (2)$$

где $U(x, y)$ и $V(x, y)$ суть многочлены n-й степени относительно x и y.

Таким образом результат подстановки комплексной величины $x+iy$ вместо z в многочлен $f(z)$ есть комплексная величина. Эта комплексная величина меняется вместе с изменением независимого комплексного переменного z и будет, таким образом, функцией комплексного переменного. Если $\zeta = \xi + i\eta$ — корень многочлена $f(z)$,

то $f(\xi+i\eta)$ должно обратиться в нуль, т. е. должно иметь место равенство

$$U(\xi, \eta)+iV(\xi, \eta)=0.$$

Но комплексная величина обращается в нуль, лишь если её составные части порознь равны нулю:

$$U(\xi, \eta)=0 \text{ и } V(\xi, \eta)=0, \tag{3}$$

или, что сводится к тому же, если модуль её равен нулю:

$$\left.\begin{aligned} |f(\zeta)| &= \sqrt{U^2(\xi, \eta)+V^2(\xi, \eta)}=0, \\ \text{или} \quad U^2(\xi, \eta)+V^2(\xi, \eta) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Обратно, если существуют такие значения ξ и η, при которых имеют место равенства (3) или (3'), то многочлен $f(z)$ обращается в нуль при $z=\xi+i\eta$, т. е. уравнение $f(z)=0$ имеет корень, равный $\xi+i\eta$.

Непрерывность функции двух переменных $U^2(x, y)+V^2(x, y)$ и функции $f(z)$ [1]. Пусть переменная величина x принимает какой-нибудь ряд значений $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, стремясь к определённому числу a как к своему пределу, а переменная y — ряд значений $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, стремясь к пределу b:

$$\lim x_n = a, \quad \lim y_n = b.$$

В целых многочленах

$$U(x_n, y_n), \quad V(x_n, y_n) \text{ и } U^2(x_n, y_n)+V^2(x_n, y_n)$$

над x_n и y_n совершается конечное число рациональных операций, именно — сложений, умножений и возведений в целую положительную степень. Применяя к этим многочленам соответствующие предложения о пределах, будем иметь:

$$\lim U(x_n, y_n) = U(\lim x_n, \lim y_n), \quad \lim V(x_n, y_n) = V(\lim x_n, \lim y_n).$$

По какому бы закону величины x_n и y_n ни стремились к своим пределам a и b, эти равенства будут иметь место по тем же предложениям о пределах; а это означает, что многочлены U, V, а также U^2+V^2 суть непрерывные функции в точке (a, b). Но a и b — какие угодно числа, и потому рассматриваемые многочлены непрерывны в каждой точке плоскости. Около каждой точки плоскости можно ограничить достаточно малую область, где изменения (приращения) этих функций будут по абсолютной величине менее сколь угодно малого положительного числа ε:

$$|U(x+\Delta x, y+\Delta y)-U(x, y)|<\varepsilon \text{ при } |\Delta x|<\delta \text{ и } |\Delta y|<\eta,$$

где δ и η — достаточно малые положительные числа.

---

[1]) По поводу понятия непрерывности функции нескольких переменных в общем случае см. ниже § 2 гл. IV второй части «Дифференциального и интегрального исчислений».

Вместе с функциями U и V будет непрерывной и функция $f(z)$, где z — комплексное переменное, так как

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

и

$$\lim f(z_n) = \lim U(x_n, y_n) + \lim i\,V(x_n, y_n) = \\ = U(a, b) + iV(a, b) = f(a + ib),$$

т. е.

$$\lim f(z_n) = f(\lim z_n).$$

§ 2. Основное предложение высшей алгебры.

Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$ — некоторое комплексное постоянное. По формуле Тэйлора, которая по тем же основаниям применима и при комплексном переменном, имеем:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{1 \cdot 2} f''(z_0) + \ldots \\ \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(z_0), \qquad (4)$$

где

$$f^{(n)}(z_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n p_0 \neq 0,$$

так как данный многочлен — n-й степени. Мы будем также считать и $f(z_0) \neq 0$, так как противное означало бы предполагать доказываемое. Но ради общности можно положить, что несколько производных, начиная с первой, при $z = z_0$ обращается в нуль:

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0,$$

и таким образом

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z - z_0)^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} f^{(k)}(z_0) + \ldots + \frac{(z - z_0)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(z_0). \qquad (4')$$

Вычислим теперь квадрат модуля $f(z)$. Полагая

$$z - z_0 = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad f(z_0) = U_0 + V_0 i,$$

$$\frac{f^{(l)}(z_0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots l} = U_l + V_l i = P_l(\cos\alpha_l + i \sin\alpha_l), \qquad (5)$$

где r и φ — переменные, а P_l и α_l — известные постоянные, будем иметь

$$f(z) = U_0 + V_0 i + r^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi) \cdot P_k(\cos\alpha_k + i \sin\alpha_k) + \ldots \\ \ldots + r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \cdot P_n(\cos\alpha_n + i \sin\alpha_n).$$

Отсюда по выполнении умножений и отделении действительных и мнимых частей получим:

$$U(x, y) = U = U_0 + r^k P_k \cos(k\varphi + \alpha_k) + \ldots + r^n P_n \cos(n\varphi + \alpha_n),$$

$$V(x, y) = V = V_0 + r^k P_k \sin(k\varphi + \alpha_k) + \ldots + r^n P_n \sin(n\varphi + \alpha_n)$$

и, следовательно [1]),

$$U^2+V^2=U_0^2+V_0^2+$$
$$+2r^kP_k[U_0\cos(k\varphi+\alpha_k)+V_0\sin(k\varphi+\alpha_k)]+\ldots+r^{2n}P_n^2. \quad (6)$$

Лемма 1. *Модуль функции $f(z)$, т. е. $\sqrt{U^2+V^2}$ при достаточно большом значении модуля разности $z-z_0$ можно сделать больше любого наперёд заданного числа.*

Доказательство. Выражение (6), вынося старшую степень r за скобки, можно представить в следующем виде:

$$U^2+V^2=(\eta+P_n^2)r^{2n}, \text{ или } \sqrt{U^2+V^2}=\sqrt{\eta+P_n^2}\cdot r^n,$$

где η, представляющая собой сумму отрицательных степеней r, может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, модуль $|f(z)|=\sqrt{U^2+V^2}$ при достаточно большом r растёт безгранично вместе с r^n, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Если $f(z_0)\neq 0$, иначе, если $\sqrt{U_0^2+V_0^2}\neq 0$, то $|f(z_0)|=\sqrt{U_0^2+V_0^2}$ не может быть минимумом.*

Доказательство. Согласно условию, U_0 и V_0 одновременно не равны нулю. Можно поэтому положить

$$\frac{U_0}{\sqrt{U_0^2+V_0^2}}=\sin\beta \text{ и } \frac{V_0}{\sqrt{U_0^2+V_0^2}}=\cos\beta,$$

где β — некоторый постоянный угол, определяемый этими равенствами. После этого выражение (6) можно представить в следующем виде:

$$U^2+V^2=U_0^2+V_0^2+2r^kP_k\sqrt{U_0^2+V_0^2}[\sin\beta\cos(k\varphi+\alpha_k)+$$
$$+\cos\beta\sin(k\varphi+\alpha_k)]+\ldots+P_n^2r^{2n},$$

или после вынесения r^k за скобки и соответствующего тригонометрического преобразования

$$U^2+V^2=U_0^2+V_0^2+r^k[2P_k\sqrt{U_0^2+V_0^2}\sin(k\varphi+\alpha_k+\beta)+\delta], \quad (7)$$

где δ — многочлен, расположенный по положительным степеням r. При достаточно малом значении r значение δ будет сколь угодно мало и, следовательно, не будет влиять на знак выражения в пря-

---

[1]) По формуле возведения в квадрат многочлена

$$(a+b+c+\ldots+l)^2=a^2+b^2+c^2+\ldots+l^2+\ldots$$
$$\ldots+2ab+2ac+\ldots+2al+2bc+\ldots$$

В формуле (6) результат расположен по восходящим степеням r.

мых скобках (если только первый член этого выражения отличен от нуля). Следовательно, меняя φ, будем иметь:

$$\text{при } 0 < k\varphi + \alpha_k + \beta < \pi$$
$$\sin(k\varphi + \alpha_k + \beta) > 0 \quad \text{и} \quad U^2 + V^2 > U_0^2 + V_0^2,$$
$$\text{при } \pi < k\varphi + \alpha_k + \beta < 2\pi$$
$$\sin(k\varphi + \alpha_k + \beta) < 0 \quad \text{и} \quad U^2 + V^2 < U_0^2 + V_0^2,$$

. . . . . .

Таким образом, если $f(z_0) \neq 0$, то всегда существует такой путь изменения φ и r, а стало быть и z, при котором модуль $\sqrt{U^2 + V^2}$ может быть сделан меньше $\sqrt{U_0^2 + V_0^2}$, т. е., если $f(z_0) \neq 0$, то модуль $\sqrt{U_0^2 + V_0^2}$ — не минимум, что и требовалось доказать.

Теорема Даламбера. (Основное предложение.) *Всякое алгебраическое уравнение* $f(z) = 0$ *имеет корень.*

Доказательство. Возьмём произвольную точку z_0 плоскости. По лемме 1, мы можем описать вокруг точки z_0 как центра окружность столь большого радиуса R, что значения $f(z)$ на этой окружности будут по модулю больше, чем $|f(z_0)|$. Но $|f(z)| = \sqrt{U^2(x, y) + V^2(x, y)}$ есть непрерывная функция от x, y. Теперь мы воспользуемся следующим свойством непрерывных функций (которое будет установлено ниже, в § 2 гл. IV второй части «Дифференциального и интегрального исчислений»): непрерывная функция достигает в замкнутой ограниченной области своего наименьшего значения. В силу этого свойства, $|f(z)|$ достигает своего наименьшего значения в некоторой точке ζ замкнутого круга (R), ограниченного построенной окружностью. Но на границе этого круга $|f(z)| > |f(z_0)|$, тогда как $|f(\zeta)|$, будучи наименьшим в круге (R), должно не превышать $|f(z_0)|$. Следовательно, ζ лежит внутри круга (R). Но тогда, в силу леммы 2, $f(\zeta) = 0$, т. е. ζ есть корень уравнения $f(z) = 0$. Тем самым теорема доказана.

§ 3. Уравнение с действительными коэффициентами. Сопряжённые корни.

Если все коэффициенты данного уравнения действительны, то мнимые его корни, если оно их имеет, попарно сопряжены, и потому число мнимых корней уравнения с действительными коэффициентами чётно. В самом деле, подставляя последовательно в многочлен $f(z)$ вместо z сопряжённые комплексные числа $x_0 + iy_0$ и $x_0 - iy_0$, при действительности коэффициентов $f(z)$ получим:

$$f(x_0 + iy_0) = U(x_0, y_0) + iV(x_0, y_0),$$
$$f(x_0 - iy_0) = U(x_0, y_0) - iV(x_0, y_0),$$

Если число $x_0 + iy_0$ является корнем многочлена $f(z)$, то

$$U(x_0, y_0) = 0, \quad V(x_0, y_0) = 0,$$

а следовательно, и сопряжённое ему число $x_0 - iy_0$ обращает многочлен $f(z)$ в нуль:

$$f(x_0 - iy_0) = U(x_0, y_0) - iV(x_0, y_0) = 0.$$

Из этого свойства следует, что уравнение нечётной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень. Это же предложение вытекает и из общего свойства непрерывной функции, принимающей при двух значениях независимого переменного значения противоположных знаков (т. I, стр. 284). В самом деле,

$$f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_n = x^n\left(p_0 + \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \ldots + \frac{p_n}{x^n}\right).$$

При достаточно большом значении абсолютной величины x дроби $\frac{p_1}{x}, \frac{p_2}{x^2}, \ldots, \frac{p_n}{x^n}$ будут достаточно малы для того, чтобы их сумма по абсолютной величине была меньше абсолютной величины p_0, и, следовательно, знак многочлена $f(x)$ при таком значении x совпадает со знаком произведения x^np_0. Если n — число нечётное, то при перемене знака x и произведение x^np_0, а вместе с тем и многочлен $f(x)$, меняют свой знак. Пусть A — абсолютная величина рассматриваемого значения x. В таком случае $f(A)$ и $f(-A)$ имеют противоположные знаки, и, следовательно, $f(x)$ при некотором значении x, заключённом между A и $-A$, обращается по крайней мере один раз в нуль.

§ 4. Соотношения между коэффициентами уравнения и его корнями.

Многочлен n-й степени

$$f(z) = p_0z^n + p_1z^{n-1} + p_2z^{n-2} + \ldots + p_n, \tag{8}$$

как следует из теоремы Даламбера и теоремы Безу, имеет n корней (возможно кратных). Обозначая эти корни через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, можно представить многочлен $f(z)$ в следующем виде:

$$f(z) = p_0(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)\ldots(z - \alpha_n). \tag{9}$$

Выполняя указанные умножения в правой части этого равенства и заменяя $f(z)$ его первоначальным выражением (8), будем иметь следующее тождество:

$$p_0z^n + p_1z^{n-1} + p_2z^{n-2} + \ldots + p_n =$$
$$= p_0[z^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n)z^{n-1} +$$
$$+ (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n)z^{n-2} + \ldots + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n].$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в обеих частях этого тождества, получим следующие соотношения между коэффициентами уравнения $f(z)=0$ и его корнями:

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n=-\frac{p_1}{p_0}, \quad \text{или} \quad \sum \alpha_i=-\frac{p_1}{p_0},$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\frac{p_2}{p_0}, \quad \text{или} \quad \sum \alpha_i\alpha_k=\frac{p_3}{p_0} \qquad (i\neq k),$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\frac{p_2}{p_0},$$

$$\text{или} \quad \sum \alpha_i\alpha_k\alpha_l=\frac{p_3}{p_0} \quad (i\neq k\neq l\neq i),$$

. . . . . .

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n=(-1)^n\frac{p_n}{p_0}, \quad \text{или} \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n=(-1)^n\frac{p_n}{p_0},$$

т. е.: 1) сумма корней уравнения равна взятому с обратным знаком отношению коэффициента при $(n-1)$-й степени неизвестного к коэффициенту при n-й степени; 2) сумма попарных произведений корней равна отношению коэффициента при $(n-2)$-й степени к коэффициенту при n-й степени; 3) сумма произведений по три равна взятому с обратным знаком отношению коэффициента при $(n-3)$-й степени к коэффициенту при n-й степени, и т. д.

Эти соотношения являются обобщением известных предложений элементарной алгебры относительно суммы и произведения корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a},$$

где α и β — корни этого уравнения.

§ 5. Общий вид разложения целого многочлена в произведение.

Если уравнение $f(z)=0$ имеет и действительные и мнимые корни, то при действительности коэффициентов уравнения мнимые корни попарно сопряжены (§ 3). Пусть

$$\alpha_k=x_k+iy_k \quad \text{и} \quad \alpha_{k_1}=x_k-iy_k$$

— два сопряжённых корня уравнения (8). Соответствующие этим корням линейные множители в произведении (9) по перемножении дадут квадратный трёхчлен с действительными коэффициентами

$$(z-\alpha_k)(z-\alpha_{k_1})=(z-x_k-iy_k)(z-x_k+iy_k)=(z-x_k)^2+y_k^2,$$

или

$$(z-\alpha_k)(z-\alpha_{k_1})=z^2+\beta_k z+\gamma_k,$$

где

$$\beta_k=-2x_k \quad \text{и} \quad \gamma_k=x_k^2+y_k^2.$$

Таким образом, соединяя попарно сопряжённые множители в произведении (9), будем иметь

$$f(z) = p_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_l)\times \\ \times(z^2+\beta_1 z+\gamma_1)\ldots(z^2+\beta_m z+\gamma_m), \qquad (10)$$

где

$$l+2m=n.$$

Предполагая в общем случае, что многочлен $f(z)$ имеет кратные корни как действительные, так и мнимые, мы должны заключить, что разложение его имеет следующий вид:

$$f(z) = p_0(z-\alpha_1)^{l_1}(z-\alpha_2)^{l_2}\ldots(z-\alpha_k)^{l_k}\times \\ \times(z^2+\beta_1 z+\gamma_1)^{m_1}\ldots(z^2+\beta_s z+\gamma_s)^{m_s}, \qquad (11)$$

где

$$l_1+l_2+\ldots+l_k+2(m_1+m_2+\ldots+m_s)=n.$$

Решение уравнения с кратными корнями, как было указано в § 4 главы I, может быть приведено к решению уравнений низшей степени без кратных корней. Вычисление корней таких уравнений и составляет, таким образом, основную задачу высшей алгебры.

ГЛАВА IV.

ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ.

§ 1. Отделение действительных корней уравнения. Теорема Штурма.

Уравнения первой и второй степени можно решить, пользуясь общими формулами; можно выразить корень такого рода уравнения в зависимости от коэффициентов этого уравнения. Для уравнений третьей и четвёртой степеней тоже можно составить подобные формулы решения, хотя и не столь удобные в применении, как формула решения квадратного уравнения. Формулы для решения уравнений второй, третьей и четвёртой степеней содержат радикалы, т. е. для решения этих уравнений требуются не только рациональные операции, но сверх того и извлечение корней. Для решения уравнений высших степеней, если имеется в виду составление общей формулы, этих операций, т. е. рациональных и извлечения корней, недостаточно. Но корни уравнения какой угодно степени можно вычислить с желаемой степенью точности, пользуясь различными приёмами постепенных приближений. В основе этих приёмов лежит теорема Штурма, дающая возможность ответить вполне определённо на вопрос, сколько действительных корней данного уравнения заключается между любыми двумя данными числами. Меняя эти данные числа, можно достигнуть того, что все действительные корни будут отделены один от другого, будут известны достаточно малые интервалы, в каждом из которых находится только один корень уравнения. Числа, ограничивающие такого рода интервалы, и будут первыми приближениями корней.

Функции Штурма. Пусть уравнение n-й степени $f(x)=0$ не имеет кратных корней, т. е. многочлены $f(x)$ и $f'(x)$ не имеют общих множителей. К функциям $f(x)$ и $f'(x)$ присоединим ряд функций $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., составленных следующим образом: $f_2(x)$ есть остаток от деления $f(x)$ на $f'(x)$, взятый с обратным знаком; $f_3(x)$ — остаток с обратным знаком от деления $f'(x)$ на $f_2(x)$, и т. д. Каждый раз делим предыдущую функцию на найденную, а остаток с обратным знаком принимаем за новую функцию в этом ряде. Таким образом в общем случае составится $n+1$

функций

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),$$

образующих так называемый ряд функций Штурма.

Эти функции Штурма по самому их определению находятся в следующих тождественных соотношениях:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= q_1 f'(x) - f_2(x), \\ f'(x) &= q_2 f_2(x) - f_3(x), \\ f_2(x) &= q_3 f_3(x) - f_4(x), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-2}(x) &= q_{n-1} f_{n-1}(x) - f_n(x), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_{n-1}$ — соответственные частные вышеупомянутых делений. Степени функций Штурма постепенно понижаются в общем случае на единицу, и последняя функция $f_n(x)$ представляет постоянное число, не зависящее от x.

Ряд функций Штурма обладает следующими свойствами.

1. *Две последовательные функции Штурма не могут обращаться в нуль при одном и том же значении аргумента.*

В самом деле, если бы, например, $f_3(x) = 0$ и $f_4(x) = 0$, то, как следует из соотношений (1), и функции $f_2(x)$ и $f_3(x)$ при том же значении аргумента обратились бы в нуль, а следовательно, при том же значении аргумента обратились бы в нуль функции $f'(x)$ и $f_2(x)$, а значит, и $f(x)$. Но $f(x)$ и $f'(x)$ не могут одновременно обращаться в нуль, так как предполагается, что уравнение $f(x) = 0$ кратных корней не имеет. С другой стороны, если $f_3(x) = 0$ и $f_4(x) = 0$, то и $f_5(x) = 0$, и т. д.; мы дойдём таким образом до последней функции Штурма, которая при сделанном предположении должна обратиться в нуль, чего опять-таки быть не может.

2. Подставляя вместо x какое-нибудь число, например a, в каждую из функций Штурма, получим ряд чисел. Отмечая только знаки этих чисел, получим ряд знаков такого, например, вида:

$$\begin{array}{cccccccc} + & + & - & + & \ldots & - & + \\ f(a), & f'(a), & f_2(a), & & \ldots, & & f_n(a). \end{array}$$

Число перемен знаков в этом ряде при переходе от каждого места к соседнему и играет существенную роль в теореме Штурма. Функции Штурма как целые многочлены — функции непрерывные. Поэтому всякое изменение в группировке знаков в этом ряде функций может произойти лишь при переходе той или другой из них через нуль. При обращении в нуль какой-нибудь средней из функций Штурма не теряется ни одной перемены знака в ряде этих функций. Действительно, пусть $f_{k-1}(a) = 0$, тогда $f_k(a)$ и $f_{k-2}(a)$ в силу соотношения

$$f_{k-2}(x) = q_{k-1} f_{k-1}(x) - f_k(x)$$

будут различных знаков, и мы будем иметь такое расположение их знаков:

$$\begin{array}{ccc} + & 0 & - \\ f_{k-2}(a), & f_{k-1}(a), & f_k(a) \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} - & 0 & + \\ f_{k-2}(a), & f_{k-1}(a), & f_k(a). \end{array}$$

При достаточно близких к a значениях x знаки и $f_{k-2}(x)$ и $f_k(x)$ в силу непрерывности сохраняются, и мы будем иметь один из следующих порядков в знаках: при изменении $f_{k-1}(x)$ от положительных значений к отрицательным [1]):

$$\begin{array}{ccc} f_{k-2}, & f_{k-1}, & f_k, \\ + & + & - \\ + & 0 & - \\ + & - & - \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} f_{k-2}, & f_{k-1}, & f_k \\ - & + & + \\ - & 0 & + \\ - & - & + \end{array}$$

или при изменении $f_{k-1}(x)$ от отрицательных значений к положительным:

$$\begin{array}{ccc} f_{k-2}, & f_{k-1}, & f_k, \\ + & - & - \\ + & 0 & - \\ + & + & - \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} f_{k-2}, & f_{k-1}, & f_k \\ - & - & + \\ - & 0 & + \\ - & + & + \end{array}$$

Следовательно, около функции $f_{k-1}(x)$ до перехода её через нуль и после перехода мы будем иметь одну перемену, лишь смещённую с прежнего места.

Если же обращается в нуль данный многочлен $f(x)$, т. е. если x проходит, возрастая, через один из корней данного уравнения, то в ряде функций Штурма теряется одна перемена.

В самом деле, если $f(x)$ проходит через нуль от отрицательных к положительным значениям, т. е. возрастает, то первая производная его $f'(x)$ положительна. В этом случае расположение знаков может быть таково:

$$\begin{array}{ccc} f(x), & f'(x), & f_2(x), \\ - & + & + \\ 0 & + & + \\ + & + & + \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} f(x), & f'(x), & f_2(x) \\ - & + & - \\ 0 & + & - \\ + & + & - \end{array}$$

Если же $f(x)$ обращается в нуль, переходя от положительных значений к отрицательным, т. е. убывает, то $f'(x)$ отрицательна и расположение знаков таково:

$$\begin{array}{ccc} f(x), & f'(x), & f_2(x), \\ + & - & + \\ 0 & - & + \\ - & - & + \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} f(x), & f'(x), & f_2(x) \\ + & - & - \\ 0 & - & - \\ - & - & - \end{array}$$

[1]) Здесь значком $\frown$ или $\smile$ указывается место перемены знака.

Подсчитывая число перемен в первой и последней строках, т. е. до перехода многочлена $f(x)$ через нуль и после перехода, замечаем потерю одной перемены. Для остальных функций Штурма знаки во всех трёх строках по доказанному имеют одинаковое число перемен.

Итак, при каждом переходе $f(x)$ через нуль ряд функций Штурма теряет одну перемену; отсюда получается:

Теорема Штурма. *Число корней алгебраического уравнения между a и b $(a<b)$, не являющимися его корнями, равно числу потерянных перемен знака в ряде функций Штурма при переходе x от a к b, иначе — число перемен в ряде чисел*

$$f(a),\ f'(a),\ f_2(a),\ \ldots,\ f_n(a)$$

превышает на столько единиц число перемен в ряде чисел

$$f(b),\ f'(b),\ f_2(b),\ \ldots,\ f_n(b),$$

сколько корней уравнения $f(x)=0$ заключается между a и b.

Полагая a равным нулю и b — положительной бесконечности, т. е.

$$a=0,\ b=+\infty,$$

мы можем таким способом определить, сколько положительных корней имеет данное уравнение; полагая же

$$a=-\infty,\ b=0,$$

можем определить число отрицательных его корней. Давая другие значения числам a и b, мы можем отделить все корни друг от друга, т. е. подобрать такие интервалы, относительно которых можно утверждать, что каждый из них содержит по одному корню уравнения.

Примечание. При составлении ряда функций Штурма, чтобы избежать сложных арифметических вычислений с дробями, можно заменить ту или другую из этих функций произведением её на какое-либо положительное число. В самом деле, если $c,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_n$ — положительные числа, то функции

$$cf(x),\ c_1f'(x),\ c_2f_2(x),\ \ldots,\ c_nf_n(x)$$

могут играть ту же роль, что и функции Штурма, потому что знаки их при любом значении аргумента совпадают со знаками функций

$$f(x),\ f'(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x).$$

Пример 1. Определить число действительных и мнимых корней уравнения

$$x^3-6x+2=0.$$

Решение.

$$f(x)=x^3-6x+2,\ f'(x)=3x^2-6=3(x^2-2).$$

За вторую функцию Штурма примем $\frac{1}{3}f'(x) = x^2 - 2$. Вычисляем следующие функции Штурма:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x + 2 & x^2 - 2 \\ \hline x^3 - 2x & x \\ \hline -4x + 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2 - 2 & 2x - 1 \\ \hline 2x^2 - 4 & x + \frac{1}{2} \\ \hline 2x^2 - x & \\ \hline x - 4 & \end{array}$$

$$\frac{1}{2}f_2(x) = 2x - 1. \qquad \begin{array}{r|l} x - \frac{1}{2} & \\ \hline -3\frac{1}{2} & \end{array} \qquad f_3(x) = +3\frac{1}{2}.$$

Итак, имеем следующий ряд функций Штурма и ряд их знаков при $x = -\infty$, 0 и $+\infty$:

	$x =$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^3 - 6x + 2$		$-$	$+$	$+$
		)	)	
$\frac{1}{3}f'(x) = x^2 - 2$		$+$	$-$	$+$
		)		
$\frac{1}{2}f_2(x) = 2x - 1$		$-$	$-$	$+$
		)	)	
$f_3(x) = +3\frac{1}{2}$		$+$	$+$	$+$

В первом столбце этой таблицы знаков имеется три перемены, во втором — две и в третьем — ни одной. Следовательно, данное уравнение имеет один корень, заключенный между $-\infty$ и 0, т. е. один отрицательный корень, и два корня между 0 и $+\infty$, иначе — два положительных корня. Таким образом, все три корня действительны.

Чтобы отделить корни уравнения и найти более тесные границы для каждого из них, вычислим значения функций Штурма, отмечая только их знаки, при $x = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$:

	$x =$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
$f(x) = x^3 - 6x + 2$		$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
		)		)	)		)	
$\frac{1}{3}f'(x) = x^2 - 2$		$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
		)	)			)		
$\frac{1}{2}f_2(x) = 2x - 1$		$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
		)	)	)	)			
$f(x) = +3\frac{1}{2}$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

При $x=-3$ ряд функций Штурма имеет три перемены, при $x=-2$ две, при $x=-1$ и 0 по две, при $x=+1$ и $+2$ по одной и при $x=+3$ ни одной. Следовательно, один корень заключается между -3 и -2, другой между 0 и $+1$, третий между $+2$ и $+3$. Эти границы каждого корня можно сближать по способу, например, применённому уже нами в примере на стр. 286 т. I, и таким образом можно вычислить каждый из корней с желаемой степенью точности.

Пример 2. Определить число действительных и мнимых корней уравнения

$$x^4+2x^3+2x-1=0.$$

Решение. Путём последовательных делений, вводя или уничтожая положительные числовые множители, находим ряд функций Штурма и определяем их знаки при $x=-\infty$, -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, $+\infty$:

	$x=$	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+\infty$
$f(x)=x^4+2x^3+2x-1$		+	+	−	−	−	+	+	+
$f'(x)=4x^3+6x^2+2$		−	−	−	+	+	+	+	+
$f_2(x)=3x^2-6x+5$		+	+	+	+	+	+	+	+
$f_3(x)=-x+1$		+	+	+	+	+	0	−	−
$f_4(x)=-2$		−	−	−	−	−	−	−	−

В первом столбце ($-\infty$) мы имеем три перемены, а в последнем ($+\infty$) одну. Следовательно, действительных корней данное уравнение имеет два (3—1), а другие два корня сопряжённо-комплексные. При $x=0$ функции Штурма имеют две перемены. Следовательно, один корень заключён между $-\infty$ и 0, а другой между 0 и $+\infty$, т. е. один корень отрицательный, а другой положительный. Из рассмотрения других столбцов таблицы следует, что отрицательный корень заключён между -3 и -2, а положительный между 0 и 1.

Теорема Штурма вполне решает вопрос об отделении действительных корней уравнения; но следует заметить, что определение функций Штурма, по идее очень простое, затруднительно при выполнении, так как приводит в общем случае к арифметическим действиям с большими числами. Поэтому полезно иметь в виду и иные признаки, по которым можно судить о величине или характере корней уравнения. Так, уравнение, все коэффициенты которого положительны, не может иметь положительных корней. Рассмотрим, например, уравнение

$$x^3+2x^2+x+3=0.$$

При всяком положительном значении x левая часть его представляет положительное число, не равное нулю. Но это — уравнение нечётной степени и потому (стр. 44) имеет по крайней мере один действительный корень, который может быть, как следует из предыдущего, только отрицательным. Другие два корня или также отрицательны, или сопряжённо-комплексные.

Уравнение, коэффициенты которого при чётных (включая и нулевую) степенях положительны, а при нечётных отрицательны, не может иметь отрицательных корней, так как левая часть такого уравнения, например уравнения

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 5 = 0,$$

при x, равном отрицательному числу, представляет положительное число, не равное нулю. Корни такого уравнения могут быть только положительными или сопряжённо-комплексными.

Но эти признаки, как и многие другие, которые рассматриваются в курсах высшей алгебры, не всегда приводят к определённому ответу, как теорема Штурма. Теорема Штурма, таким образом, является основной и исчерпывающей в вопросе об отделении действительных корней уравнения.

§ 2. Определение верхней и нижней границ положительных (или отрицательных) корней уравнения.

Одним из существенных упрощений задачи отделения корней является определение верхней и нижней границ положительных (или отрицательных) корней, т. е. таких двух чисел, между которыми заключены все положительные (или все отрицательные) корни уравнения. Вместо сложного во многих случаях вычисления функций Штурма можно положить в основание определения границ формулу Тэйлора

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} f^{(n)}(a). \quad (2)$$

Будем подставлять в функции

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x)$$

ряд положительных, постепенно увеличивающихся чисел

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a,$$

определяя каждый раз только знак результата подстановки. Пусть при $x = a$ мы впервые в этой операции получим ряд положительных значений

$$f(a) > 0,\ f'(a) > 0,\ f''(a) > 0,\ \ldots,\ f^{(n)}(a) > 0.$$

В таком случае ни один корень уравнения

$$f(x) = 0$$

не может быть больше a, так как по формуле (2) при всяком значении $x = a + h$, где $h > 0$, $f(a+h)$ — число существенно положительное,

Такой способ определения верхней границы положительных корней уравнения предложен Ньютоном. К тому же способу путём предварительного и соответствующего преобразования уравнения сводится и определение нижней границы положительных корней, а также верхней и нижней границ отрицательных корней. Действительно, заменяя в уравнении неизвестное x обратной величиной $\frac{1}{y}$, мы получим новое уравнение, причём наименьшему положительному корню данного уравнения соответствует наибольший преобразованного. С другой стороны, замена неизвестного x величиной $-y$ приводит к уравнению, положительные корни которого по абсолютной величине равны отрицательным корням данного.

Пример. Определить границы действительных корней уравнения

$$x^3 - 6x + 2 = 0,$$

т. е. верхнюю границу положительных корней и нижнюю отрицательных.

Решение. Составляем ряд функций

$$f(x) = x^3 - 6x + 2, \quad f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2), \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6$$

и вычисляем их значения при $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ При этом достаточно только определять знак этих значений. Чтобы избежать лишних вычислений, испытание начнём с последней функции. $f'''(x) = 6 > 0$, следовательно, $f''(x)$ всегда функция возрастающая. $f''(0) = 0$, $f''(1) > 0$; следовательно, для $x \geqslant 1$ функция $f'(x)$ возрастает. $f'(1) < 0$, но $f'(2) > 0$; следовательно, при $x \geqslant 2$ имеем $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f'''(x) > 0$. Но $f(2) < 0$, а $f(3) > 0$; следовательно, при $x \geqslant 3$

$$f(x) > 0, \quad f'(x) > 0, \quad f''(x) > 0, \quad f'''(x) > 0.$$

Таким образом 3 будет верхней границей для положительных корней данного уравнения: корни его меньше трёх.

Преобразовав данное уравнение, положив $x = -y$, найдём подобным же способом верхнюю границу положительных корней преобразованного уравнения

$$(-y)^3 - 6(-y) + 2 = 0 \quad \text{или} \quad y^3 - 6y - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения по абсолютной величине равны соответственным корням данного, но противоположны им по знаку, и потому верхняя граница положительных корней преобразованного уравнения определяет в то же время нижнюю границу отрицательных корней данного.

Составляем ряд функций:

$$F(y) = y^3 - 6y - 2, \quad F'(y) = 3y^2 - 6 = 3(y^2 - 2),$$
$$F''(y) = 6y, \quad F'''(y) = 6.$$

$F'''(y) = 6 > 0$; следовательно, $F''(y)$ возрастает при $y \geqslant 0$; $F''(0) = 0$, $F''(1) > 0$, следовательно, $F'(y)$ возрастает при $y \geqslant 1$. $F'(1) < 0$, $F'(2) > 0$; следовательно, при $y \geqslant 2$ $F(y)$ — функция возрастающая. Но $F(2) < 0$, а $F(3) > 0$; следовательно, при $y \geqslant 3$

$$F(y) > 0, \quad F'(y) > 0, \quad F''(y) > 0, \quad F'''(y) > 0,$$

т. е. 3 будет верхней границей положительных корней преобразованного уравнения, а -3 нижней границей для отрицательных корней данного. Таким образом корни данного уравнения заключены между -3 и 3.

Полагая $x = -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$, находим:

$$f(-3)<0,\ f(-2)>0,\ f(-1)>0,\ f(0)>0,$$
$$f(1)<0,\ f(2)<0,\ f(3)>0.$$

Следовательно, корни уравнения заключены между -3 и -2, между 0 и 1 и между 2 и 3. В каждом из этих промежутков лежит только по одному корню, так как уравнение третьей степени имеет только три корня (ср. пример 1 § 1).

Определение верхней и нижней границ действительных корней уравнения $f(x)=0$ ограничивает число испытаний при вычислении значения функции $f(x)$ и иногда может заменить применение теоремы Штурма для отделения действительных корней уравнения.

§ 3. Графики целых рациональных функций — параболы высших порядков.

Последний вопрос высшей алгебры, который мы рассмотрим в этой главе, это вопрос о приближённом вычислении корней уравнения. В сущности он уже решён теоремой Штурма и тем методом, который мы применяли при доказательстве теоремы 4 § 11 гл. II I ч. «Дифференциального и интегрального исчислений», т. I. Теперь же мы имеем в виду способы более б ы с т р о г о приближения. Но прежде чем излагать их, рассмотрим, как г е о м е т р и ч е с к и иллюстрируются поставленные задачи алгебры, и прежде всего каков вид графика целой рациональной функции.

Пусть

$$y = f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n. \qquad (3)$$

Кривую, соответствующую такому уравнению, называют п а р а б о л о й n-го порядка [1]). Для отыскания точек пересечения этой линии с осью абсцисс нужно положить $y=0$; следовательно, абсциссы этих точек суть корни уравнения

$$p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0. \qquad (4)$$

---

[1]) Параболу второго порядка мы изучали в аналитической геометрии, составив её уравнение в виде

$$y^2 = 2px.$$

Если повернуть плоскость координат вместе с начерченной на ней кривой около биссектрисы координатного угла так, чтобы положительное направление прежней оси абсцисс совпало с положительным направлением оси ординат и обратно, то уравнение перемещённой параболы относительно осей прежнего направления примет вид

$$x^2 = 2py, \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{2p}x^2,$$

а это уравнение является частным случаем уравнения (3) при $n=2$ и $p_0 = \frac{1}{2p}$, а $p_1 = p_2 = 0$.

Таким образом рассматриваемая кривая пересекает ось абсцисс во стольких (действительных) точках, сколько действительных корней имеет уравнение (4).

Представляя $f(x)$ в виде

$$x^n\left(p_0+\frac{p_1}{x}+\frac{p_2}{x^2}+\ \dots\ +\frac{p_n}{x^n}\right),$$

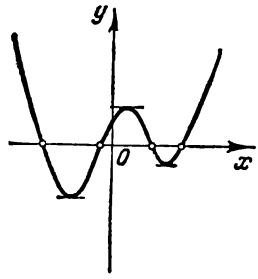
нетрудно заметить, что при достаточно большом значении абсолютной величины x сумма слагаемых

$$\frac{p_1}{x}+\frac{p_2}{x^2}+\ \dots\ +\frac{p_n}{x^n}$$

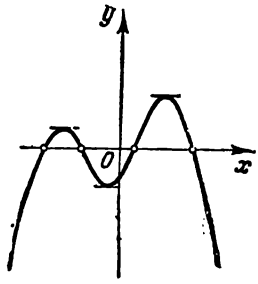
будет достаточно малой сравнительно с первым слагаемым p_0 и потому знак $f(x)$ при таких значениях аргумента совпадает со знаком p_0x^n.

Если число n чётное и $p_0>0$, то $f(x)$ как при положительных, так и при отрицательных значениях x, если абсолютная величина x достаточно велика, имеет положительное значение и стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к $\pm\infty$; если же $p_0<0$, то при тех же условиях $f(x)$ стремится к $-\infty$.

Таким образом, парабола чётного порядка при $p_0>0$ и направо и налево с некоторого места удаляется безгранично в положительную



Черт. 12.



Черт. 13.

сторону оси ординат (черт. 12), а при $p_0<0$ — в отрицательную (черт. 13).

Если n — число нечётное, то при $p_0>0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} p_0x^n=+\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} p_0x^n=-\infty,$$

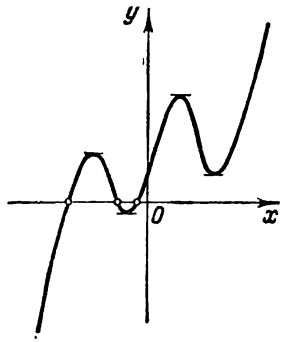
а при $p_0<0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} p_0x^n=-\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} p_0x^n=+\infty.$$

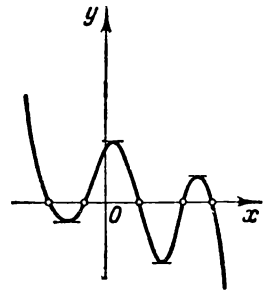
Это означает, что парабола нечётного порядка переходит из третьей четверти в первую (при $p_0>0$) (черт. 14) или из второй

в четвертую (при $p_0 < 0$) (черт. 15). Понятно поэтому, почему уравнение нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень.

Если многочлен $f(x)$ или, иначе, уравнение (4) имеет кратные корни, то кривая касается оси абсцисс в соответствующей точке, ибо в этой точке и $f'(x) = 0$. Если показатель кратности — нечётное



Черт. 14.



Черт. 15.

число, то точка прикосновения будет в то же время и точкой перегиба. В самом деле, обозначим корни данного многочлена через α_1, α_2, α_3, ..., α_m, а показатели их кратности соответственно через l_1, l_2, l_3, ..., l_m, так что

$$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_m = n.$$

Если между числами a и b заключён только один корень α_1, то разности $a - \alpha_1$ и $b - \alpha_1$ будут противоположных знаков, а разности $a - \alpha_i$ и $b - \alpha_i$, где $i > 1$, — одинаковых. Так как

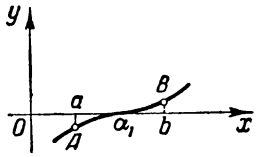
$$f(x) = p_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} (x - \alpha_3)^{l_3} \ldots (x - \alpha_m)^{l_m},$$

то отношение $\frac{f(a)}{f(b)}$ можно представить в следующем виде:

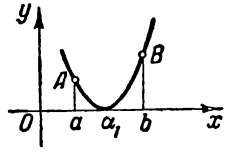
$$\frac{f(a)}{f(b)} = \left(\frac{a - \alpha_1}{b - \alpha_1}\right)^{l_1} \cdot \left(\frac{a - \alpha_2}{b - \alpha_2}\right)^{l_2} \cdot \left(\frac{a - \alpha_3}{b - \alpha_3}\right)^{l_3} \ldots \left(\frac{a - \alpha_m}{b - \alpha_m}\right)^{l_m}.$$

Из дробей правой части этого равенства только первая отрицательна, и если l_1 — число нечётное, то и первый множитель $\left(\frac{a - \alpha_1}{b - \alpha_1}\right)^{l_1}$ останется отрицательным, а стало быть и отношение $f(a) : f(b)$ будет отрицательным, т. е. значения ординат $f(a)$ и $f(b)$ — противоположных знаков, а это означает, что кривая и ось абсцисс, соприкасаясь в точке α_1, в то же время пересекаются в этой точке

(черт. 16). Если бы l_1 было чётным числом, то отношение $f(a):f(b)$ было бы числом положительным, и кривая, прикасаясь к оси абсцисс



Черт. 16.



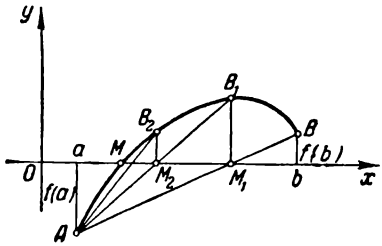
Черт. 17.

в точке α_1, была бы расположена в достаточной близости к этой точке по одну сторону оси абсцисс (черт. 17).

Задача. Вывести то же заключение на основании формулы Тэйлора.

§ 4. Приближённое вычисление корней уравнения.

На основании теоремы Штурма мы можем отделить каждый действительный корень уравнения, т. е. указать два числа a и b, между которыми заключён только один корень. В таком случае, если уравнение не имеет кратных корней, значения многочлена $f(x)$ при $x=a$ и $x=b$ имеют противоположные знаки. Две точки A и B кривой $y=f(x)$, имеющие координаты — одна $x_1=a$ и $y_1=f(a)$, другая $x_2=b$ и $y_2=f(b)$, соединены дугой кривой линии $y=f(x)$; точка пересечения этой дуги с осью абсцисс и определяет тот корень уравнения $f(x)=0$, который мы желаем вычислить с любой степенью точности.



Черт. 18.

Правило ложного положения (Regula falsi). Один из способов приближения состоит в том, что мы заменяем дугу кривой AB прямолинейным отрезком AB (черт. 18); абсцисса точки M_1 пересечения этой прямой с осью Ox и будет искомым приближением корня. Чтобы найти это приближение, нужно прежде составить уравнение прямой AB.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, имеет вид (т. I, стр. 66)

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Подставляя вместо x_1, y_1 и x_2, y_2 их значения в данной задаче будем иметь уравнение искомой прямой AB в следующем виде:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Чтобы определить абсциссу точки пересечения прямой AB, нужно положить в её уравнении $y = 0$:

$$\frac{-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a},$$

откуда

$$x = a - \frac{(b-a)\cdot f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad \text{или} \quad x = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}\ ^{1}). \tag{5}$$

Применяя правило ложного положения несколько раз, мы будем получать всё более и более точные односторонние приближения искомого корня. Геометрически эта операция вычисления постепенных приближений соответствует проведению ряда хорд, вращающихся около одного конца взятой дуги, например A (черт. 18), другой конец которой приближается безгранично к точке пересечения кривой с осью абсцисс, занимая положения B, B_1, B_2, ...

Пример 1. Между 0 и 1 заключается один корень уравнения

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

(пример 1 § 1).

Применим правило ложного положения при отыскании этого корня, полагая

$$f(x) = x^3 - 6x + 2, \qquad a = 0, \qquad b = 1.$$

Следовательно,

$$f(0) = 2, \qquad f(1) = 1 - 6\cdot 1 + 2 = -3.$$

Соединим две точки $A(0, 2)$ и $B(1, -3)$ кривой линии

$$y = x^3 - 6x + 2$$

прямою и составим уравнение этой прямой

$$\frac{y-2}{-3-2} = \frac{x}{1} \quad \text{или} \quad y - 2 = -5x.$$

Абсцисса точки пересечения прямой AB с осью Ox определяется из уравнения этой прямой, если положить в нём $y = 0$:

$$-2 = -5x,$$

откуда для первого приближения искомого корня данного уравнения получаем:

$$x_1 = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Тот же результат можно получить, применяя готовую формулу (5):

$$x_1 = \frac{0\cdot(-3) - 1\cdot 2}{-3-2} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Так как

$$f(0{,}4) = 0{,}4^3 - 6\cdot 0{,}4 + 2 = -0{,}336, \text{ а } f(0) = +2,$$

то корень заключается между 0 и 0,4.

---

[1]) Первые взятые приближения a и b и будут ложными положениями относительно искомого корня. Правило ложного или ложных положений в прежние времена являлось методом сведения задачи к пропорции.

Применяя второй раз то же правило, полагая $a = 0$ и $b = 0{,}4$, найдём следующее приближение:

$$x_2 = \frac{0 \cdot (-0{,}336) - 0{,}4 \cdot 2}{-0{,}336 - 2} = \frac{0{,}8}{2{,}336} = 0{,}342\ldots$$

Другие два корня этого уравнения заключены: один между -3 и -2, другой между 2 и 3. Найдём первое приближение каждого из них по тому же правилу, применяя готовую формулу (5):

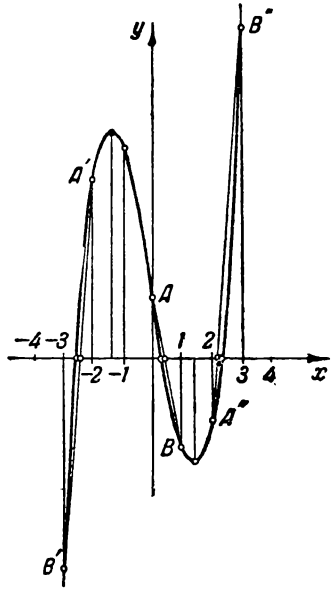
I. $a = -3$; $f(-3) = (-3)^3 - 6 \cdot (-3) + 2 = -7$;
$b = -2$; $f(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2) + 2 = +6$;

$$x_1' = \frac{-3 \cdot 6 - (-2) \cdot (-7)}{6 - (-7)} = -2\frac{6}{13}.$$

II. $a = 2$; $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2 + 2 = -2$;
$b = 3$; $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3 + 2 = 11$;

$$x_1'' = \frac{2 \cdot 11 - 3 \cdot (-2)}{11 - (-2)} = 2\frac{2}{13}.$$

Линия, имеющая уравнение $y = x^3 - 6x + 2$, представлена на черт. 19 [$y' = 3(x^2 - 2)$, $y'' = 6x$; максимум при $x = -\sqrt{2}$, минимум при $x = +\sqrt{2}$; точка перегиба на оси ординат]. Хорды AB, $A'B'$ и $A''B''$ отмечают на оси абсцисс первые приближения корней данного уравнения, и геометрически ясно, насколько хорошо подходят эти приближения к истинным значениям, по крайней мере в пределах точности чертежа.



Черт. 19.

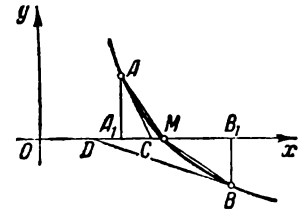
Способ Ньютона также состоит в замене дуги кривой AB прямой линией, но не хордой AB, а касательной к дуге AB в точке A или точке B в зависимости от изгиба этой дуги. Пусть A_1 и B_1 — основания ординат точек A и B (черт. 20), а M — точка пересечения дуги AB с осью Ox, т. е. точка, абсцисса которой и является искомым корнем данного уравнения. Соединив точки A и B с точкой M прямыми, получим два треугольника AMA_1 и BMB_1. Если дуга AB не имеет точки перегиба, то одна из частей этой дуги, на которые она делится точкой M, лежит внутри соответствующего треугольника, другая — вне; на чертеже 20 дуга AM лежит внутри треугольника AMA_1, а дуга BM — вне треугольника BMB_1. Касательная к дуге, лежащей вне соответствующего треугольника, может пересечь ось абсцисс и вне отрезка A_1B_1 и внутри его, и таким образом замена дуги такой касательной иногда и удаляет от искомого корня. Между тем касательная к внутренней дуге — на чертеже 20 к дуге AM — во

всяком случае пересекает ось абсцисс в точке, лежащей между точками A_1 и B_1, и потому абсцисса x_1 этой точки будет приближением к искомому корню уравнения:

$$a < x_1 < b.$$

Чтобы вычислить это приближённое значение корня, нужно составить уравнение касательной прямой в точке $A\,[a,\ f(a)]$ дуги AM. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $(x_0,\ y_0)$ и имеющей данное направление, определяемое её угловым коэффициентом, имеет вид

$$y - y_0 = k\,(x - x_0).$$



Черт. 20.

Рассматриваемая касательная проходит через точку $A\,[a,\ f(a)]$, а угловой коэффициент её, т. е. тангенс угла её наклона к положительному направлению оси абсцисс, равен значению производной при x, равном абсциссе точки прикосновения, т. е. при $x = a$. Полагая $x_0 = a$, $y_0 = f(a)$, а $k = f'(a)$, получим уравнение касательной в следующем виде:

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a). \tag{6}$$

Теперь мы можем вычислить приближённое значение искомого корня уравнения, положив в уравнении (6) $y = 0$, т. е. определяя абсциссу точки пересечения касательной (6) с осью Ox:

$$y = 0, \qquad -f(a) = f'(a)\,(x - a),$$

откуда

$$x = x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{7}$$

Вычисленное по формуле (7) значение x_1 действительно будет приближением искомого корня, если, во-первых, $f''(x) \neq 0$ при $a < x < b$, во-вторых, $f(a)$ и $f''(a)$ имеют одинаковые знаки. Первое условие соответствует требованию, чтобы дуга AB не имела точки перегиба, второе — чтобы дуга AM лежала внутри соответствующего треугольника AMA_1 [1]). Если первое условие выполнено, то второе необходимо выполняется для одного из концов рассматриваемой дуги; если же дуга AB имеет точку перегиба, то, уменьшая интервал A_1B_1, можно достигнуть того, что соответствующая дуга $A'B'$, пересекая попрежнему ось абсцисс, уже не будет иметь точки перегиба [2]).

---

[1]) Если $f(a)$ и $f''(a)$ имеют одинаковые знаки, то в этом месте дуга обращена своей выпуклостью к оси абсцисс.

[2]) Конечно, за исключением того случая, когда сама искомая точка пересечения дуги с осью абсцисс есть точка перегиба.

Формулу (7) можно получить и исходя из других соображений, а именно из теоремы о конечном приращении [1]). Пусть a отличается от истинного значения корня на величину h, так что $a+h$ и будет корнем рассматриваемого уравнения. По теореме о конечном приращении (т. I, стр. 330) должно иметь место следующее равенство:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=f'(\xi),$$

где ξ — число, заключённое между a и $a+h$. Из этого равенства следует

$$f(a+h)=f(a)+hf'(\xi),$$

или

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h),$$

где $0<\theta<1$. Но $a+h$ есть корень уравнения $f(x)=0$; следовательно,

$$f(a+h)=0, \quad \text{и потому} \quad f(a)+hf'(a+\theta h)=0. \tag{8}$$

Если первая производная данной функции в рассматриваемом интервале изменяется очень мало и, стало быть, $f'(a+\theta h)$ мало отличается от $f'(a)$, то из предыдущего равенства (8), заменив $a+\theta h$ числом a, мы получим приближённое равенство

$$f(a)+hf'(a)=0,$$

откуда определяется приближённое значение поправки h:

$$h=-\frac{f(a)}{f'(a)},$$

а следовательно, и приближённое значение x_1 искомого корня:

$$x_1=a+h=a-\frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{7'}$$

Вычислив приближённое значение x_1 искомого корня, мы можем потом вычислить и значение многочлена $f(x)$ при $x=x_1$, т. е. значение $f(x_1)$, и применить затем к числам x_1 и $f(x_1)$ тот же способ Ньютона для вычисления следующего приближения x_2:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

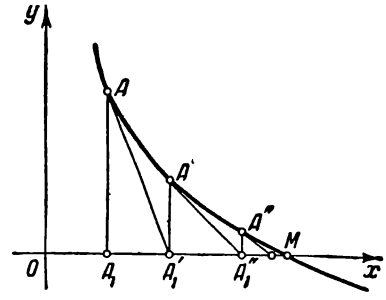
Со вторым приближением x_2 поступают так же; повторяя тот же способ сколько угодно раз, получим ряд односторонних приближён-

[1]) Исходным пунктом можно взять вместо теоремы о конечном приращении разложение многочлена по формуле Тэйлора.

ных значений искомого корня

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Из геометрических соображений (черт. 21) нетрудно убедиться в том, что, при выполнении вышеуказанных условий относительно второй производной $f''(x)$, x_n стремится к искомому корню как своему пределу.



Черт. 21.

В самом деле, абсциссы x_1, x_2, ..., x_n, ... точек A_1', A_1'', ..., $A_1^{(n)}$, ... пересечения последовательных касательных с осью x образуют возрастающую последовательность, ограниченную абсциссой x точки M, и потому, во всяком случае, стремятся к некоторому пределу, так что $A_1^{(n)}A_1^{(n+1)} = x_{n+1} - x_n \to 0$. Но так как выпуклость дуги AM обращена к оси x, то отношения $A_1'A' : A_1'A_1''$, ..., $A_1^{(n)}A^{(n)} : A_1^{(n)}A_1^{(n+1)}$, ... убывают. Следовательно, $A_1^{(n)}A^{(n)} = f(x_n) \to 0$. Переходя к пределу под знаком функции, мы и получаем, что $f(\lim x_n) = 0$, т. е. что $\lim x_n$ есть искомый корень x.

Зигзагообразная линия $A_1AA_1'A'A_1''\ldots A^{(n-1)}A_1^{(n)}\ldots$ ведёт асимптотически к искомой точке M.

Пример 2. Применить способ Ньютона к вычислению одного из корней уравнения

$$x^3 - 6x + 2 = 0,$$

корни которого уже отделены (пример 1).

Решение.

$$0 < x_1 < 1;\ f(x) = x^3 - 6x + 2,\ f'(x) = 3(x^2 - 2),\ f''(x) = 6x;$$
$$f(0) = +2;\ f'(0) = -6;\ f''(x) \neq 0;\ x_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots;$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{6}{3} + 2 = \frac{1}{27};\ f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{9} - 2\right) = -\frac{17}{3};$$
$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1 \cdot 3}{27 \cdot (-17)} = \frac{51 + 1}{153} = 0{,}340\ldots$$

Согласно начальным данным, определяющим изгиб дуги и положение на ней исходной для вычисления точки A, вычисленные по способу Ньютона приближённые значения корня меньше истинного его значения x, а вычисленные раньше по правилу ложного положения больше его:

$$0 < 0{,}333\ldots < 0{,}340\ldots < x < 0{,}342\ldots < 0{,}4 < 1.$$

Сопоставляя значения 0,340... и 0,342..., заключаем, что 0,34 будет приближённым значением с ошибкой, которая во всяком случае меньше 0,002.

Способ Ньютона и правило ложного положения при выполнении вышеуказанных условий относительно второй производной $f''(x)$ дают приближённые значения искомого корня с недостатком и с избытком, и таким образом, комбинируя эти два способа приближённого вычисления, мы можем и оценить допущенную ошибку. Если рассматриваемая дуга кривой линии имеет одну точку перегиба, то правило ложного положения даёт хорошее приближение, а способ Ньютона, если только $f(a)$ и $f''(a)$, а стало быть $f(b)$ и $f''(b)$ не имеют одинаковых знаков, — не всегда.

Относительно приближённого вычисления комплексных корней дело обстоит несколько сложнее, и потому в этом кратком очерке основных задач высшей алгебры мы опустим подробное рассмотрение этого вопроса. Заметим лишь, что его можно было бы свести к предыдущей задаче, т. е. к задаче приближённого вычисления действительных корней. В самом деле, определение корней уравнения

$$f(z)=0, \tag{9}$$

а среди них и комплексных, сводится, как мы видели (стр. 40), к отысканию точек пересечения двух кривых линий, данных уравнениями

$$U(x,\ y)=0 \text{ и } V(x,\ y)=0.$$

Исключая[1]) из этих уравнений, например y, мы сведем задачу к отысканию действительных корней полученного в результате исклю-

---

[1]) Исключение одного неизвестного из уравнений с двумя неизвестными легко свести к решению линейных уравнений, если за неизвестные принять степени y. Положим, например,

$$\left.\begin{aligned} U(x,\ y) &= a_0y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0,\\ V(x,\ y) &= \quad\ b_0y^2+b_1y+b_2=0,\end{aligned}\right\} \tag{α}$$

где коэффициенты a_i и b_i суть целые многочлены относительно x, степени которых указаны соответствующим индексом коэффициента. Исключить из этих уравнений y значит определить его из одного уравнения и вставить полученное выражение в другое. Но можно исключить y и следующим образом, не решая того или другого из данных уравнений. Именно, y, y^2, y^3 имеют одни и те же значения в этих уравнениях, рассматриваемых совместно. Умножая каждое из них на y один или несколько раз, мы получим новые соотношения между степенями y. Таким образом можно составить достаточное число уравнений, из которых, как линейных, можно исключить все встречающиеся в них степени y, для чего нужно иметь число уравнений на единицу большее числа степеней:

$$\begin{aligned} a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y &=0,\\ a_0y^3+a_1y^2+a_2y+a_3 &=0,\\ b_0y^2+b_1y+b_2 &=0,\\ b_0y^3+b_1y^2+b_2y &=0,\\ b_0y^4+b_1y^3+b_2y^2 &=0.\end{aligned}$$

чения уравнения относительно x. Определив с достаточной степенью точности приближённые значения x, можно потом вычислить и соответственные значения y, и таким образом будут вычислены комплексные корни данного уравнения (9).

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Отделить корни уравнения $x^3 - 7x + 7 = 0$ и вычислить их приближённые значения.

Отв. $-4 < x_1 < 0$, $1 < x_2 < x_3 < 2$; $x_2 = 1{,}3568958\ldots$

2. Отделить корни уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$ и вычислить их приближённые значения.

Отв. $2 < x_1 < 3$, x_2 и x_3 мнимы; $x_1 = 2{,}09455148\ldots$

3. Определить верхнюю и нижнюю границы действительных корней уравнения

$$x^4 + 2x^3 + 2x - 1 = 0$$

(ср. пример 2 на стр. 52).

Рассматривая y, y^2, y^3, y^4 как отдельные неизвестные, решаем обычными приёмами четыре из этих уравнений, линейных относительно степеней неизвестного, и полученные выражения для y, y^2, y^3, y^4 вставляем в последнее. Получим в результате такого исключения соотношение между коэффициентами a_i и b_i, каждый из которых содержит x. Таким образом, y из уравнений (α) оказывается исключённым, и получается уравнение, содержащее только x.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ.

ВТОРАЯ ЧАСТЬ.

ГЛАВА I.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Интегрирование простейших дробей.

Дробь, числитель которой постоянное число, а знаменатель — степень линейного двучлена, т. е. дробь вида

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{или} \quad \frac{A}{x^n},$$

где n — положительное целое число, называют *простейшей* или *элементарной*. Простейшая дробь только при одном значении аргумента обращается в бесконечность и ни при каком в нуль.

Простейшую дробь можно представить в виде степени с отрицательным показателем:

$$\frac{A}{x^n} = Ax^{-n}, \quad \frac{A}{(x-a)^n} = A(x-a)^{-n}$$

и таким образом свести задачу интегрирования простейшей дроби к интегрированию степени.

1. $n \neq 1$: $$\int \frac{A\,dx}{x^n} = A\int x^{-n}\,dx = A\frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)\,x^{n-1}} + C. \tag{1}$$

2. $$\int \frac{A\,dx}{x} = A\int \frac{dx}{x} = A\ln|x| + C. \tag{2}$$

Так как $dx = d(x-a)$, то будем иметь также:

1. При $n \neq 1$: $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}\,d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C; \tag{3}$$

2. При $n = 1$: $$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C. \tag{4}$$

Общие правила интегрирования (т. I) дают возможность свести к указанным основным формулам интегрирование многочленов, расположенных по положительным и отрицательным степеням аргумента или линейного двучлена, иначе — многочленов, слагаемые которых суть положительные степени аргумента и простейшие дроби.

Пример.

$$\int\left[x^2-5x+7+\frac{2}{(x-3)^2}+\frac{5}{x-3}-\frac{7}{(x-6)^5}\right]dx=$$

$$=\int x^2\,dx-5\int x\,dx+7\int dx+2\int\frac{dx}{(x-3)^2}+5\int\frac{dx}{x-3}-7\int\frac{dx}{(x-6)^5}=$$

$$=\frac{x^3}{3}-5\cdot\frac{x^2}{2}+7x+2\int(x-3)^{-2}dx+5\ln|x-3|-7\int(x-6)^{-5}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-5\cdot\frac{x^2}{2}+7x+2\frac{(x-3)^{-2+1}}{-2+1}+5\ln|x-3|-7\frac{(x-6)^{-5+1}}{-5+1}+C=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+7x-\frac{2}{x-3}+5\ln|x-3|+\frac{7}{4(x-6)^4}+C.$$

Но такого рода многочлен по приведении его членов к одному знаменателю представляется в виде дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$, где числитель $f(x)$ и знаменатель $F(x)$ суть целые многочлены. Естественно ожидать, что интегрирование дроби такого вида, т. е. дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$, иначе — рациональной функции, можно путём соответствующего разложения свести к интегрированию целого многочлена и простейших дробей.

§ 2. Разложение рациональной дроби на простейшие и интегрирование её в случае действительных корней знаменателя.

Будем называть рациональную дробь правильной, если степень числителя её ниже степени знаменателя. Делением числителя на знаменатель можно всегда выделить из неправильной дроби целую часть и представить неправильную дробь как сумму целого многочлена и правильной дроби.

Пример 1. Выделить из неправильной дроби

$$\frac{3x^5-13x^4+20x^3-16x^2+8x-3}{x^3-4x^2+5x-2}$$

целую часть.

Решение. При делении числителя на знаменатель получим в частном трёхчлен $3x^2-x+1$ и остаток $-x^2+x-1$. Следовательно,

$$\frac{3x^5-13x^4+20x^3-16x^2+8x-3}{x^3-4x^2+5x-2}=3x^2-x+1+\frac{-x^2+x-1}{x^3-4x^2+5x-2}.$$

Правильную рациональную дробь можно разложить на простейшие дроби. Это разложение можно обосновать следующим предложением.

Теорема. *Из правильной рациональной дроби, знаменатель которой имеет α-кратный корень a, можно выделить ряд простейших дробей с знаменателями $(x-a)^k$, где k принимает значения* 1, 2, 3, ..., α, *так что в остатке получится правильная рациональная дробь, знаменатель которой при $x=a$ отличен от нуля. Это разложение единственно.*

Доказательство. Пусть $\frac{f(x)}{F(x)}$ — данная дробь. По условию

$$F(x)=(x-a)^{\alpha}F_1(x) \text{ и } F_1(a)\neq 0.$$

Если знаменатель $F(x)$ — многочлен n-й степени, то $F_1(x)$ — степени $n-\alpha$, а числитель $f(x)$ — степени не выше $n-1$. Расположим многочлены $f(x)$ и $F_1(x)$, пользуясь формулой Тэйлора, по восходящим степеням $x-a$:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a), \quad (5)$$

$$F_1(x)=F_1(a)+\frac{x-a}{1}F_1'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}F_1''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-\alpha}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-\alpha)}F_1^{(n-\alpha)}(a). \quad (6)$$

Так как $F_1(a)\neq 0$, то можно разделить первый многочлен на второй, располагая деление по восходящим степеням $x-a$. Продолжим это деление до тех пор, пока в частном не получим степени $(x-a)^{\alpha-1}$. Обозначим полученное таким образом частное через $P(x)$:

$$P(x)=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}. \quad (7)$$

Остаток, который также расположен по восходящим степеням и начинается со степени не ниже $(x-a)^{\alpha}$, можно обозначить через $(x-a)^{\alpha}f_1(x)$, где $f_1(x)$ — вполне определённый многочлен степени $n-\alpha-1$. В силу соотношения между делимым, делителем, частным и остатком будем иметь:

$$f(x)=P(x)F_1(x)+(x-a)^{\alpha}f_1(x); \quad (8)$$

отсюда

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{f_1(x)}{F_1(x)}. \quad (9)$$

Заменяя $P(x)$ его выражением (7) и производя деление на $(x-a)^{\alpha}$, получим:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+\frac{f_1(x)}{F_1(x)}, \quad (9')$$

т. е. требуемое разложение.

Единственность этого разложения будет следовать из устанавливаемых ниже формул

$$A_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\frac{f(x)}{F_1(x)}\right]_{x=a} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha - 1)$$

(см. стр. 72). Действительно, эти формулы показывают, что коэффициенты A_k вполне определяются дробью $\frac{f(x)}{F(x)}$.

Следствие. *Если*

$$F(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda$$

и степень $f(x)$ *ниже степени* $F(x)$, *то*

$$\left.\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = {} & \frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\ & + \frac{B_0}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{L_0}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \frac{L_2}{(x-l)^{\lambda-2}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Действительно, вводя функции

$$F_1(x) = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha}, \quad F_2(x) = \frac{F_1(x)}{(x-b)^\beta} \text{ и т. д.},$$

получим цепь разложений, аналогичных разложению (9):

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha} + \frac{f_1(x)}{F_1(x)}, \quad \frac{f_1(x)}{F_1(x)} = \frac{P_1(x)}{(x-b)^\beta} + \frac{f_2(x)}{F_2(x)}, \ldots,$$

откуда, полагая число корней a, b, c, $\ldots$, l равным $s+1$, имеем

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^\alpha} + \frac{P_1(x)}{(x-b)^\beta} + \frac{P_2(x)}{(x-c)^\gamma} + \ldots + \frac{P_s(x)}{(x-l)^\lambda}. \quad (11)$$

Заменяя многочлены $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_s(x)$ их выражениями, аналогичными выражению (7), получим разложение (10).

Если корни знаменателя $F(x)$ все простые, то разложение дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ принимает более простой вид

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l}. \quad (12)$$

В этом случае $P(x)$, $P_1(x)$, $\ldots$, $P_s(x)$ — постоянные.

Вычисление коэффициентов разложения. Способ деления. Вычисление коэффициентов разложения (10), как следует из способа доказательства основной теоремы настоящего параграфа, сводится

к определению многочленов $P(x)$, $P_1(x)$, ..., т. е. к предварительному разложению числителя $f(x)$ и функции $F_1(x)=\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha}}$ по степеням $x-a$ и делению первого многочлена на второй по восходящим степеням до степени $(x-a)^{\alpha-1}$. Такой способ мы будем называть способом деления.

Пример 2. Разложить дробь

$$\frac{-3x^4+17x^3-30x^2+17x+1}{(x-1)^3(x-2)^2}$$

на простейшие дроби.

Решение. Расположим числитель по степеням $x-1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^4+17x^3-30x^2+17x+1, & f(1) &= 2;\\ f'(x) &= -12x^3+51x^2-60x+17, & f'(1) &= -4;\\ f''(x) &= -36x^2+102x-60, & f''(1) &= 6;\\ f'''(x) &= -72x+102, & f'''(1) &= 30;\\ f^{IV}(x) &= -72, & f^{IV}(1) &= -72. \end{aligned}$$

По формуле Тэйлора имеем

$$f(x)=f(1)+\frac{x-1}{1}f'(1)+\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}f''(1)+\frac{(x-1)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(1)+\frac{(x-1)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^{IV}(1).$$

Полагая ради сокращения $x-1=t$, получим

$$f(x)=2-4t+3t^2+5t^3-3t^4.$$

Функцию $F_1(x)=(x-2)^2$ располагаем также по степеням $x-1=t$, пользуясь либо формулой Тэйлора, либо даже простой подстановкой $x-1=t$, или $x=1+t$, что при низкой степени располагаемого многочлена будет проще:

$$F_1(x)=(x-2)^2=(t-1)^2=1-2t+t^2.$$

Делим многочлен $f(x)$ на трёхчлен $F_1(x)$ по восходящим степеням t и вычисляем частное до второй степени:

$$\begin{array}{l|l} 2-4t+3t^2+5t^3-3t^4 & 1-2t+t^2 \\ \underline{2-4t+2t^2} & \overline{2+t^2} \\ t^2+5t^3-3t^4 & \\ \underline{t^2-2t^3+t^4} & \\ 7t^3-4t^4. & \end{array}$$

Следовательно,

$$2-4t+3t^2+5t^3-3t^4=(2+t^2)(t-1)^2+t^3(7-4t).$$

Внося в это равенство значение $t=x-1$, будем иметь

$$-3x^4+17x^3-30x^2+17x+1=[2+(x-1)^2](x-2)^2+(x-1)^3(11-4x).$$

Деля обе части этого равенства на знаменатель данной дроби, т. е. на $(x-1)^3(x-2)^2$, получим следующее разложение данной дроби:

$$\frac{-3x^4+17x^3-30x^2+17x+1}{(x-1)^3(x-2)^2}=\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{x-1}+\frac{11-4x}{(x-2)^2}.$$

Применение того же способа к последней дроби полученного разложения упрощается тем, что числитель приходится делить на 1 [1]), и, следовательно, вычисление сводится только к разложению числителя этой дроби, т. е. $11-4x$ по степеням $x-2$:

$$11-4x=11-4(x-2)-8=3-4(x-2).$$

Таким образом получаем следующее разложение данной дроби на простейшие:

$$\frac{-3x^4+17x^3-30x^2+17x+1}{(x-1)^3(x-2)^2}=\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}.$$

Можно вычислять коэффициенты разложения рациональной дроби и иными способами. Все эти способы основываются на том, что равенство (10) относительно x есть тождество, т. е. равенство, справедливое при всяком значении аргумента x. Это тождество остаётся тождеством и после каких угодно тождественных преобразований. Можно поэтому приводить в этом равенстве дроби к одному знаменателю и отбрасывать в обеих частях общий знаменатель; можно давать аргументу x какие-либо определённые числовые значения, можно дифференцировать обе части равенства по x и т. п. Оставляя коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{\beta-1}, \ldots, L_0, L_1, \ldots$ $\ldots, L_{\lambda-1}$, число которых будет $\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n$, неизвестными, из этого тождества можно различными способами получить достаточное число (т. е. n) уравнений для определения неизвестных коэффициентов: разрешимость этих уравнений уже заранее установлена предшествующими рассуждениями.

Способ последовательных дифференцирований. Умножая обе части равенства (9′) или (10) на $(x-a)^\alpha$, получим:

$$\frac{f(x)}{F_1(x)}=A_0+A_1(x-a)+A_2(x-a)^2+\ldots+A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}+$$
$$+(x-a)^\alpha\frac{f_1(x)}{F_1(x)}, \qquad (13)$$

где

$$\frac{f_1(x)}{F_1(x)}=\frac{B_0}{(x-b)^\beta}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.$$

Последнее слагаемое второй части равенства (13) имеет α-кратный корень a, и потому этот член и $\alpha-1$ его производных при

---

[1]) В обозначениях, употреблявшихся при выводе теоремы о разложении рациональной дроби на простейшие, дробь $\frac{11-4x}{(x-2)^2}$ представляет выражение вида $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$. Согласно данному способу, числитель $11-4x$ надо разделить на многочлен, определяемый равенством: $F_2(x)=\frac{F_1(x)}{(x-2)^2}$, откуда видно, что этот многочлен равен 1, так как $F_1(x)=(x-2)^2$.

$x = a$ обращаются в нуль. Следовательно,

$$A_0 = \left[\frac{f(x)}{F_1(x)}\right]_{x=a}, \quad A_1 = \left[\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{F_1(x)}\right]_{x=a},$$

$$1 \cdot 2A_2 = \left[\frac{d^2}{dx^2}\frac{f(x)}{F_1(x)}\right]_{x=a}, \ldots,$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\alpha - 1) A_{\alpha-1} = \left[\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}\frac{f(x)}{F_1(x)}\right]_{x=a}.$$

Точно так же, полагая $f(x) = (x-b)^\beta F_2(x)$, будем иметь

$$B_0 = \left[\frac{f(x)}{F_2(x)}\right]_{x=b}, \quad B_1 = \left[\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{F_2(x)}\right]_{x=b},$$

$$1 \cdot 2B_2 = \left[\frac{d^2}{dx^2}\frac{f(x)}{F_2(x)}\right]_{x=b}, \ldots$$

Такой способ определения коэффициентов разложения рациональной дроби мы будем называть способом последовательных дифференцирований.

Пример 3. Разложить дробь

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}$$

на простейшие дроби.

Решение. Разложение должно иметь вид

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = \frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_0}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2}.$$

По умножении обеих частей этого равенства на x^3 получим

$$\frac{x^2-2}{(x+2)^2} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + x^3\left[\frac{B_0}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2}\right].$$

Следовательно,

$$A_0 = \left[\frac{x^2-2}{(x+2)^2}\right]_{x=0} = -\frac{1}{2},$$

$$A_1 = \left[\frac{d}{dx}\frac{x^2-2}{(x+2)^2}\right]_{x=0} = \left[\frac{4x+4}{(x+2)^3}\right]_{x=0} = \frac{1}{2},$$

$$2A_2 = \left[\frac{d^2}{dx^2}\frac{x^2-2}{(x+2)^2}\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}\frac{4x+4}{(x+2)^3}\right]_{x=0} =$$

$$= \left[\frac{-8x-4}{(x+2)^4}\right]_{x=0} = -\frac{1}{4},$$

$$A_2 = -\frac{1}{8}.$$

Для определения коэффициентов B_0 и B_1 будем иметь:

$$\frac{x^2-2}{x^3} = B_0 + B_1(x+2) + (x+2)^3\left[\frac{A_0}{x^3} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x}\right],$$

откуда

$$B_0 = \left[\frac{x^2-2}{x^3}\right]_{x=-2} = -\frac{1}{4},$$

$$B_1 = \left[\frac{d}{dx}\frac{x^2-2}{x^3}\right]_{x=-2} = \left[-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^4}\right]_{x=-2} = \frac{1}{8}.$$

Таким образом, для данной дроби получаем следующее разложение.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2} = -\frac{\frac{1}{2}}{x^3}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2}-\frac{\frac{1}{8}}{x}-\frac{\frac{1}{4}}{(x+2)^2}+\frac{\frac{1}{8}}{x+2}.$$

Способ сравнения коэффициентов. Если привести дроби правой части равенства (10) к одному знаменателю, то знаменатели обеих частей будут одинаковы, и поэтому числители должны быть тождественно равны между собой. Коэффициенты при одинаковых степенях тождественно равных многочленов равны между собой, и если какой-либо степени в многочлене $f(x)$ нет, то соответствующий коэффициент правой части должен тождественно равняться нулю. Многочлен $f(x)$ по условию не выше $(n-1)$-й степени; в правой части получается также многочлен $(n-1)$-й степени, а такой многочлен имеет n коэффициентов. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, мы получим n уравнений — число, достаточное для определения n неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{\beta-1}, \ldots, L_0, L_1, \ldots, L_{\lambda-1}$ (поскольку разрешимость этих уравнений уже заранее известна).

Пример 4. Разложить дробь

$$\frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}$$

на простейшие дроби.

Решение. Знаменатель разлагается на множители

$$(x-1)(x+1)(x+2).$$

Следовательно,

$$\frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}.$$

По приведении к общему знаменателю получим:

$$x^2-x+4 = (A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента, получим для определения коэффициентов A, B, C три уравнения:

$$A+B+C=1, \quad 3A+B=-1, \quad 2A-2B-C=4.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$A=\frac{2}{3}, \quad B=-3, \quad C=\frac{10}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}}{x-1}-\frac{3}{x+1}+\frac{\frac{10}{3}}{x+2}.$$

Пример 5. Разложить дробь

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}$$

на простейшие помощью сравнения коэффициентов.

Решение. По приведении к общему знаменателю соответствующего разложения (пример 3) получим

$$x^2-2=(A_0+A_1x+A_2x^2)(x+2)^2+[B_0+B_1(x+2)]x^3$$

или

$$x^2-2=(A_2+B_1)x^4+(A_1+4A_2+B_0+2B_1)x^3+$$
$$+(A_0+4A_1+4A_2)x^2+4(A_0+A_1)x+4A_0.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента обеих частей предыдущего равенства, получим пять уравнений для определения пяти неизвестных коэффициентов A_0, A_1, A_2, B_0 и B_1:

$$A_2+B_1=0, \qquad A_1+4A_2+B_0+2B_1=0,$$
$$A_0+4A_1+4A_2=1, \quad 4(A_0+A_1)=0, \quad 4A_0=-2.$$

Из пятого, четвёртого и третьего уравнений получаем последовательно

$$A_0=-\frac{1}{2}, \quad A_1=\frac{1}{2}, \quad A_2=-\frac{1}{8};$$

из первого и второго

$$B_1=\frac{1}{8}, \quad B_0=-\frac{1}{4}.$$

Способ сравнения коэффициентов неудобен, если число неизвестных коэффициентов велико, так как тогда приходится решать систему линейных уравнений с большим числом неизвестных. Способ дифференцирования также может оказаться затруднительным, так как с каждым новым дифференцированием для определения последующих коэффициентов приходится дифференцировать, вообще говоря, всё более и более сложные дроби. Иногда смешанные приёмы могут значительно упростить вычисление.

Интегрирование рациональной дроби. Как было уже отмечено в конце предыдущего параграфа, разложение рациональной дроби на простейшие даёт возможность свести интегрирование её к интегрированию этих простейших дробей, т. е. к основным формулам интегрального исчисления.

Пример 6. Вычислить интеграл рациональной дроби, данной в примере 2.

Решение. Эта дробь уже разложена на элементарные в примере 2. Таким образом имеем

$$\int\frac{-3x^4+17x^3-30x^2+17x+1}{(x-1)^3(x-2)^2}\,dx=$$
$$=\int\left[\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{(x-2)^2}-\frac{4}{x-2}\right]dx=$$
$$=2\frac{(x-1)^{-3+1}}{-3+1}+\ln|x-1|+3\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1}-4\ln|x-2|+C=$$
$$=-\frac{1}{(x-1)^2}+\ln|x-1|-\frac{3}{x-2}4\ln|x-2|+C.$$

Пример 7. Интегрировать рациональную дробь, уже разложенную на простейшие в примере 3.

Решение.

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}\,dx = \int\left[-\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x}-\frac{1}{4(x+2)^2}+\frac{1}{8(x+2)}\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{x^{-3+1}}{-3+1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-\frac{1}{8}\ln|x|-$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{(x+2)^{-2+1}}{-2+1}+\frac{1}{8}\ln|x+2|+C=$$

$$= \frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{4(x+2)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|+C.$$

Пример 8. Интегрировать дробь, разложенную на простейшие в примере 4.

Решение.

$$\int \frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}\,dx = \int\left[\frac{\frac{2}{3}}{x-1}-\frac{3}{x+1}+\frac{\frac{10}{3}}{x+2}\right]dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x-1|-3\ln|x+1|+\frac{10}{3}\ln|x+2|+\ln C =$$

$$= \ln\left\{C\,\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)^{10}}}{(x+1)^3}\right\}.$$

Пример 9. Взять интеграл

$$\int \frac{3x^5-13x^4+20x^3-16x^2+8x-3}{x^3-4x^2+5x-2}\,dx.$$

Решение. Степень числителя подинтегральной дроби выше степени знаменателя. По выделении целой части (пример 1) получим

$$\frac{3x^5-13x^4+20x^3-16x^2+8x-3}{x^3-4x^2+5x-2} = 3x^2-x+1+\frac{-x^2+x-1}{x^3-4x^2+5x-2}.$$

Разлагаем теперь оставшуюся правильную дробь на простейшие, определив предварительно корни знаменателя. Находя наибольший общий делитель многочлена x^3-4x^2+5x-2 и его производной $3x^2-8x+5$, увидим, что 1 является двукратным корнем знаменателя данной дроби, а 2 — простым:

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2).$$

Таким образом, имеем:

$$\frac{-x^2+x-1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A_0}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Определим сначала коэффициенты A_0 и B:

$$A_0=\left[\frac{-x^2+x-1}{x-2}\right]_{x=1}=1, \quad B=\left[\frac{-x^2+x-1}{(x-1)^2}\right]_{x=2}=-3.$$

Коэффициент A_1 всего проще определить из равенства

$$\frac{-x^2+x-1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{(x-1)^2}+\frac{A_1}{x-1}-\frac{3}{x-2},$$

давая переменному x какое-либо значение (только не 1 и не 2), например 0:

$$\frac{1}{2} = 1 - A_1 + \frac{3}{2}, \quad A_1 = 2.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x^5 - 13x^4 + 20x^3 - 16x^2 + 8x - 3}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}\,dx =$$

$$= \int \left[3x^2 - x + 1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2}\right]dx =$$

$$= 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + 2\ln|x-1| - 3\ln|x-2| + C =$$

$$= x^3 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{x-1} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x-2|^3} + C.$$

§ 3. Разложение рациональной дроби и интегрирование её в случае мнимых корней знаменателя.

Вышеуказанные способы разложения и интегрирования рациональной функции применимы и в том случае, если знаменатель дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ имеет мнимые корни. Пришлось бы только оперировать с мнимыми числами. Действия с мнимыми числами, как мы видели в предыдущей главе, совершаются по тем же законам, как и с действительными, и нетрудно также убедиться в том, что формулы дифференциального и интегрального исчислений относительно степени и логарифма имеют место и в случае комплексного аргумента. Но возможно поставленную задачу свести к вычислению с действительными числами.

Будем называть дробь вида

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k},$$

где k — какое-либо целое число, простейшей дробью второго типа.

Теорема. *Из правильной рациональной дроби* $\frac{f(x)}{F(x)}$, *знаменатель которой разлагается на множители* $(x^2 + px + q)^\alpha$ *и* $F_1(x)$, *не имеющие общих корней, можно выделить ряд простейших дробей второго типа*

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k},$$

где k *принимает значения* 1, 2, 3, ..., α, *причём в остатке получится правильная рациональная дробь с знаменателем* $F_1(x)$. *Предполагается, что трёхчлен* $x^2 + px + q$ *имеет различные корни. Разложение это единственное.*

Доказательство. Можно подобрать так двучлен A_0x+B_0 и многочлен $f_1(x)$, чтобы

$$f(x)=(A_0x+B_0)F_1(x)+(x^2+px+q)f_1(x). \qquad (14)$$

Действительно, пусть x_1 и x_2 — корни трёхчлена x^2+px+q. Из равенства (14) при $x=x_1$ и $x=x_2$ получаются два уравнения для определения неизвестных коэффициентов:

$$f(x_1)=(A_0x_1+B_0)F_1(x_1),\quad f(x_2)=(A_0x_2+B_0)F_1(x_2). \qquad (15)$$

Из этих уравнений A_0 и B_0 определяются вполне, так как по условию $x_1-x_2\neq 0$. При найденных значениях коэффициентов A_0 и B_0 многочлен $f(x)-(A_0x+B_0)F_1(x)$ обращается в нуль при $x=x_1$ и $x=x_2$, т. е. делится без остатка на трёхчлен x^2+px+q. Частное от такого деления и будет искомым многочленом $f_1(x)$, показатель степени которого равен разности показателей многочлена $f(x)$ и трёхчлена x^2+px+q, т. е. не выше $n-3$, если $F(x)$ — степени n.

Таким же образом можно подобрать двучлен A_1x+B_1 и многочлен $f_2(x)$; потом двучлен A_2x+B_2 и многочлен $f_3(x)$, и т. д., наконец, двучлен $A_{\alpha-1}x+B_{\alpha-1}$ и многочлен $f_\alpha(x)$, удовлетворяющие соответственно следующим равенствам:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x)&=(A_1x+B_1)F_1(x)+(x^2+px+q)f_2(x),\\ f_2(x)&=(A_2x+B_2)F_1(x)+(x^2+px+q)f_3(x),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{\alpha-1}(x)&=(A_{\alpha-1}x+B_{\alpha-1})F_1(x)+(x^2+px+q)f_\alpha(x). \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Показатель степени многочлена $f_\alpha(x)$ не выше $n-2\alpha-1$. Из равенств (14) и (16), обозначив ради сокращения трёхчлен x^2+px+q через Z, получим

$$\left.\begin{aligned} f(x)=[&A_0x+B_0+(A_1x+B_1)Z+(A_2x+B_2)Z^2+\cdots\\ &\cdots+(A_{\alpha-1}x+B_{\alpha-1})Z^{\alpha-1}]F_1(x)+Z^\alpha f_\alpha(x). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Следовательно,

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0x+B_0}{Z^\alpha}+\frac{A_1x+B_1}{Z^{\alpha-1}}+\frac{A_2x+B_2}{Z^{\alpha-2}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{A_{\alpha-1}x+B_{\alpha-1}}{Z}+\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)},$$

или

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_0x+B_0}{(x^2+px+q)^\alpha}+\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{A_{\alpha-1}x+B_{\alpha-1}}{x^2+px+q}+\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}, \qquad (18)$$

т. е. мы получили требуемое разложение.

Покажем, что это разложение единственно. Действительно, умножив обе части равенства (18) на x^2+px+q, получим:

$$\frac{f(x)}{F_1(x)} = A_0x+B_0+(A_1x+B_1)(x^2+px+q)+\ldots$$
$$\ldots+(A_{\alpha-1}x+B_{\alpha-1})(x^2+px+q)^{\alpha-1}+\frac{f_\alpha(x)}{F_1(x)}(x^2+px+q)^\alpha. \quad (18')$$

Беря здесь $x\to x_1$ и $x\to x_2$, получим в пределе:

$$\frac{f(x_1)}{F_1'(x_1)} = A_0x_1+B_0,$$
$$\frac{f(x_2)}{F_1(x_2)} = A_0x_2+B_0,$$

откуда, вследствие неравенства $x_1\neq x_2$, коэффициенты A_0 и B_0 вполне определятся. Перенеся затем A_0x+B_0 в левую часть равенства (18'), разделив обе части полученного равенства на x^2+px+q и снова переходя к пределу по $x\to x_1$ и $x\to x_2$, мы определим единственным образом коэффициенты A_1 и B_1. Продолжая этот процесс, мы убедимся в том, что все коэффициенты разложения (18) однозначно определены.

При доказательстве теоремы мы относительно корней x_1, x_2 трёхчлена x^2+px+q сделали только одно предположение, что они различны. Для целей интегрирования важен случай, когда эти корни сопряжённо-комплексные. Уравнения (15) и им аналогичные, определяющие коэффициенты A_0, B_0 и т. д., содержат в этом случае мнимые коэффициенты и имеют вид

$$U+iV=0, \quad U-iV=0, \quad (15')$$

где U и V — выражения, не содержащие мнимых чисел. Но система уравнений (15') равносильна системе уравнений с действительными коэффициентами

$$U=0, \quad V=0. \quad (15'')$$

Коэффициенты разложения (18) могут быть определены или так, как указано при доказательстве теоремы, или иными способами, из которых, как общий, следует отметить способ сравнения коэффициентов при одинаковых степенях тождественных многочленов, — способ, который мы применяли при разложении рациональной дроби на простейшие в случае действительных корней знаменателя.

Пример 1. Разложить дробь

$$\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)^2(x-2)}$$

на простейшие.

Решение. Согласно указанным в §§ 2 и 3 способам разложения, имеем

$$\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)^2(x-2)} = \frac{A_0x+B_0}{(x^2+x+1)^2}+\frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1}+\frac{C}{x-2}. \quad (19)$$

Приводя обе части этого равенства к одному знаменателю и отбрасывая его, получим тождество

$$2x^4-2x^3+7x^2+5=$$
$$=(A_0x+B_0)(x-2)+(A_1x+B_1)(x^2+x+1)(x-2)+C(x^2+x+1)^2$$

или

$$2x^4-2x^3+7x^2+5=$$
$$=(A_1+C)x^4+(-A_1+B_1+2C)x^3+(A_0-A_1-B_1+3C)x^2+$$
$$+(B_0-2A_0-2A_1-B_1+2C)x+(-2B_0-2B_1+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в обеих частях равенства, получим

$$\left.\begin{aligned} A_1+C&=2,\\ -A_1+B_1+2C&=-2,\\ A_0-A_1-B_1+3C&=7,\\ B_0-2A_0-2A_1-B_1+2C&=0,\\ -2B_0-2B_1+C&=5. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Решая [1]) эти уравнения относительно определяемых коэффициентов, находим

$$A_0=2,\quad B_0=1,\quad A_1=1,\quad B_1=-3,\quad C=1.$$

Таким образом, данная дробь разлагается на простейшие следующим образом:

$$\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)^2(x-2)}=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{x-3}{x^2+x+1}+\frac{1}{x-2}.$$

Интегрирование. Интегрирование рациональной дроби в случае мнимых корней её знаменателя сводится помощью разложения на простейшие дроби к вычислению интегралов вида

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^k}. \qquad (21)$$

Квадратный трёхчлен x^2+px+q с мнимыми корнями можно представить в виде суммы двух квадратов. В самом деле,

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4},$$

или

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)^2$$

---

[1]) Можно упростить решение системы уравнений (20) следующим способом. Сначала определим C, умножая обе части равенства (19) на $x-2$ и полагая $x=2$:

$$C=\left[\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)^2}\right]_{x=2}=\frac{49}{49}=1.$$

Из первого уравнения (20) находим далее A_1, потом из второго B_1 и т. д.

(так как в случае мнимых корней $q-\frac{p^2}{4}>0$). Преобразуем интеграл (21), полагая

$$x+\frac{p}{2}=t \quad \text{и} \quad \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=m.$$

Из первого равенства имеем:

$$dx=dt.$$

Следовательно,

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x^2+px+q)^k}=\int \frac{(At+C)\,dt}{(t^2+m^2)^k}=A\int \frac{t\,dt}{(t^2+m^2)^k}+C\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k},$$

где

$$C=B-\frac{Ap}{2}.$$

Таким образом, вычисление интеграла (21) сводится к вычислению интегралов вида

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+m^2)^k} \quad \text{и} \quad \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}.$$

Первый интеграл сводится к интегралу степени, если $k\neq 1$, или к логарифму, если $k=1$, подстановкой

$$t^2+m^2=y. \tag{22}$$

В самом деле, из равенства (22) получаем:

$$2t\,dt=dy \quad \text{и} \quad t\,dt=\frac{dy}{2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{t\,dt}{(t^2+m^2)^k}=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^{-k+1}}{-k+1}+C=$$

$$=-\frac{1}{2(k-1)\,y^{k-1}}+C=-\frac{1}{2(k-1)\,(t^2+m^2)^{k-1}}+C,$$

если $k\neq 1$, и

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\ln y+C=\ln\sqrt{t^2+m^2}+C.$$

Для второго интеграла можно следующим образом установить формулу приведения, т. е. формулу, сводящую его к интегралу того же вида, но с меньшим показателем знаменателя.

Обозначим $\int (t^2+m^2)^{-k}\,dt$ через J_k; следовательно,

$$J_{k-1}=\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

Интегрируя по частям этот последний интеграл, полагая

$$u = \frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} = (t^2+m^2)^{-(k-1)} \quad \text{и} \quad dt = dv,$$

можно установить соотношение между интегралами J_k и J_{k-1}, т. е. установить желаемую формулу приведения. В самом деле, имеем:

$$J_{k-1} = \int (t^2+m^2)^{-(k-1)}\,dt = \\ = (t^2+m^2)^{-(k-1)}t - \int td\,[(t^2+m^2)^{-(k-1)}],$$

но

$$d\,[(t^2+m^2)^{-(k-1)}] = -(k-1)(t^2+m^2)^{-(k-1)-1}\,2t\,dt = \\ = -2(k-1)\frac{t}{(t^2+m^2)^k}\,dt;$$

следовательно,

$$J_{k-1} = \frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{t^2\,dt}{(t^2+m^2)^k} = \\ = \frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} + 2(k-1)\int \frac{t^2+m^2-m^2}{(t^2+m^2)^k}\,dt,$$

откуда

$$J_{k-1} = \frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} + 2(k-1)J_{k-1} - 2(k-1)m^2 J_k.$$

Определяя из этого соотношения J_k, находим желаемую формулу приведения:

$$J_k = \frac{1}{2(k-1)m^2}\cdot\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)m^2}J_{k-1}.$$

Понижая таким образом указатель k, мы дойдём до интеграла J_1, который берётся по основной формуле:

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m^2}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{m}\right)^2} = \frac{1}{m}\int \frac{d\frac{t}{m}}{1+\left(\frac{t}{m}\right)^2} = \frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m} + C.$$

Пример 2. Проинтегрировать рациональную функцию

$$\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)^2(x-2)}.$$

Решение. Эта дробь была уже нами разложена выше (пример 1) на простейшие:

$$\frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)^2(x-2)} = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x-3}{x^2+x+1} + \frac{1}{x-2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)^2(x-2)}\,dx = \int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2} + \int \frac{(x-3)\,dx}{x^2+x+1} + \int \frac{dx}{x-2}.$$

Нетрудно заметить, что числитель первого из интегралов, к которым мы свели данный, является дифференциалом трёхчлена в знаменателе:

$$(2x+1)\,dx = d(x^2+x+1).$$

Следовательно, не стоит преобразовывать знаменатель в сумму квадратов, так как подстановка

$$x^2+x+1=t$$

очень просто сводит этот интеграл к интегралу степени:

$$\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{x^2+x+1}.$$

При вычислении второго интеграла преобразуем знаменатель в сумму квадратов:

$$x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2.$$

Полагая

$$x+\frac{1}{2}=t,$$

получим

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{x^2+x+1} = \int \frac{\left(t-\frac{7}{2}\right)dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{t\,dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} - \frac{7}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}.$$

Первый из этих интегралов берется подстановкой

$$t^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 = u,$$

откуда

$$2t\,dt = du, \quad t\,dt = \frac{du}{2},$$

и, следовательно.

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln u =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[t^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2\right] = \ln\sqrt{x^2+x+1}$$

Второй интеграл сводится к арктангенсу. Полагая $t = \sqrt{\frac{3}{4}}\,u$ и, следовательно, $dt = \sqrt{\frac{3}{4}}\,du$, получим

$$\frac{7}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = \frac{7}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} u = \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, имеем:

$$\int \frac{2x^4-2x^3+7x^2+5}{(x^2+x+1)^2(x-2)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x^2+x+1} + \ln\sqrt{x^2+x+1} - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \ln|x-2| + C.$$

Пример 3. Взять интеграл

$$\int \frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}\,dx.$$

Решение. Подинтегральная дробь разлагается на простейшие второго типа:

$$\frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3} = \frac{Ax+B}{(1+x^2)^3} = \frac{A_1x+B_1}{(1+x^2)^2} + \frac{A_2x+B_2}{1+x^2},$$

откуда

$$x^4+2x^2+4 = Ax+B+(A_1x+B_1)(1+x^2)+(A_2x+B_2)(1+x^2)^2. \quad (23)$$

Вместо способа сравнения коэффициентов при одинаковых степенях в обеих частях равенства воспользуемся иными приёмами определения коэффициентов A, B, A_1 и т. д.

Полагая $x^2 = -1$ или $x = i = \sqrt{-1}$, получим:

$$1+2\cdot(-1)+4 = Ai+B \quad \text{или} \quad 3 = Ai+B,$$

откуда

$$A = 0, \quad B = 3.$$

Равенство (23) можно написать теперь в следующем виде:

$$x^4+2x^2+4 = 3+(A_1x+B_1)(1+x^2)+(A_2x+B_2)(1+x^2)^2.$$

Перенеся 3 в левую часть, получим:

$$x^4+2x^2+1 = (A_1x+B_1)(1+x^2)+(A_2x+B_2)(1+x^2)^2,$$

или

$$(1+x^2)^2 = (A_1x+B_1)(1+x^2)+(A_2x+B_2)(1+x^2)^2.$$

По сокращении на $1+x^2$ будем иметь:

$$1+x^2 = A_1x+B_1+(A_2x+B_2)(1+x^2). \quad (24)$$

Полагая снова $x^2 = -1$, или $x = i$, получим:

$$0 = A_1i+B_1,$$

откуда

$$A_1 = 0 \quad \text{и} \quad B_1 = 0.$$

Следовательно, равенство (24) принимает вид:

$$1 + x^2 = (A_2 x + B_2)(1 + x^2),$$

или, по сокращении на $1 + x^2$:

$$1 = A_2 x + B_2,$$

откуда

$$A_2 = 0 \quad \text{и} \quad B_2 = 1.$$

Итак, данная дробь разлагается следующим образом:

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1 + x^2)^3} = \frac{3}{(1 + x^2)^3} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1 + x^2)^3}\, dx = 3 \int \frac{dx}{(1 + x^2)^3} + \int \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Обозначим $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^k}$ через J_k; следовательно,

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)^3} = J_3, \quad \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = J_2.$$

Интегрируя J_2 по частям, полагая $(1 + x^2)^{-2} = u$, а $dx = dv$, получим формулу, сводящую J_3 к J_2:

$$J_2 = x(1 + x^2)^{-2} - \int x\, d(1 + x^2)^{-2}$$

или

$$J_2 = \frac{x}{(1 + x^2)^2} + 2 \int x (1 + x^2)^{-3} 2x\, dx =$$

$$= \frac{x}{(1 + x^2)^2} + 4 \int \frac{x^2\, dx}{(1 + x^2)^3} = \frac{x}{(1 + x^2)^2} + 4 \int \frac{(x^2 + 1 - 1)\, dx}{(1 + x^2)^3} =$$

$$= \frac{x}{(1 + x^2)^2} + 4 \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} - 4 \int \frac{dx}{(1 + x^2)^3} = \frac{x}{(1 + x^2)^2} + 4J_2 - 4J_3,$$

откуда

$$J_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(1 + x^2)^2} + \frac{3}{4} J_2.$$

Для сведения J_2 к J_1 интегрируем по частям $J_1 = \int \frac{dx}{1 + x^2}$, полагая $(1 + x^2)^{-1} = u$ и $dx = dv$:

$$J_1 = x(1 + x^2)^{-1} - \int x\, d(1 + x^2)^{-1} = \frac{x}{1 + x^2} + \int x (1 + x^2)^{-2} 2x\, dx =$$

$$= \frac{x}{1 + x^2} + 2 \int \frac{x^2\, dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{x}{1 + x^2} + 2 \int \frac{(x^2 + 1 - 1)\, dx}{(1 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{x}{1 + x^2} + 2J_1 - 2J_2,$$

откуда

$$J_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{1 + x^2} + \frac{1}{2} J_1.$$

Следовательно,

$$J_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} J_1.$$

Но

$$J_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Следовательно,

$$J_3 = \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x,$$

и потому

$$\int \frac{x^4+2x^2+4}{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{3x}{4(1+x^2)^2} + \frac{9x}{8(1+x^2)} + \frac{17}{8} \operatorname{arctg} x + C.$$

§ 4. Соотношение между круговыми функциями и логарифмом. Формула Эйлера.

Интеграл рациональной дроби кроме алгебраической части может содержать и трансцендентную, именно: если знаменатель интегрируемой дроби имеет мнимые корни — арктангенс, а при действительных корнях — логарифм. Нетрудно установить и соотношение между этими трансцендентными функциями, имеющими по первоначальному определению совершенно различное происхождение. Рассмотрим интеграл $\int (1+x^2)^{-1} dx$, который по основным формулам равен $\operatorname{arctg} x + C$. Разлагая подинтегральную дробь на простейшие дроби первого типа, можно для того же интеграла получить иное выражение. Для этого заметим, что можно распространить основные формулы интегрирования и на случай мнимых коэффициентов подинтегрального выражения. В самом деле, в § 12 гл. II действие дифференцирования было распространено на случай мнимых коэффициентов дифференцируемого выражения. Тем самым это распространение имеет силу и для обратной операции — интегрирования. Но, разлагая знаменатель на мнимые множители, имеем:

$$x^2+1 = (x+i)(x-i),$$

где $i = \sqrt{-1}$. Полагая

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i},$$

находим коэффициенты A и B:

$$A = \left[\frac{1}{x-i}\right]_{x=-i} = -\frac{1}{2i}, \quad B = \left[\frac{1}{x+i}\right]_{x=i} = \frac{1}{2i}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{2i}\int \frac{dx}{x+i} + \frac{1}{2i}\int \frac{dx}{x-i} = \frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{x+i} + C,$$

где логарифм от мнимого аргумента понимается в том смысле, как он был определён в § 12 гл. II.

Функции $\operatorname{arctg} x$ и $\frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{x+i}$, полученные при интегрировании одного и того же выражения, имеют одну и ту же производную и потому отличаются

одна от другой на некоторое определённое постоянное:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{x+i} + C \quad \text{или} \quad \operatorname{arctg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{x+i}{x-i} + C.$$

Полагая $x = 0$, получим $C = -\frac{i}{2} \ln(-1)$ [1]). Следовательно,

$$\operatorname{arctg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{x+i}{x-i} - \frac{i}{2} \ln(-1) \quad \text{или} \quad \operatorname{arctg} x = \frac{i}{2} \ln \frac{i+x}{i-x}.$$

Таково соотношение между арктангенсом и логарифмом. Исходя из этого соотношения, можно установить соотношение между обратными функциями — тригонометрическими и показательной. Мы придём таким образом к известной уже нам формуле Эйлера. В самом деле, обозначив $\operatorname{arctg} x$ через φ, будем иметь:

$$\operatorname{arctg} x = \varphi, \quad x = \operatorname{tg} \varphi, \quad \varphi = \frac{i}{2} \ln \frac{i + \operatorname{tg} \varphi}{i - \operatorname{tg} \varphi}.$$

Отсюда, по умножении обеих частей последнего равенства на i и после преобразований правой части, получим:

$$\varphi i = \ln \sqrt{\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi} \quad \text{или} \quad \varphi i = \ln(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Переходя от логарифма к обратной функции, мы и получим формулу Эйлера:

$$e^{\varphi i} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

§ 5. Метод Остроградского выделения алгебраической части интеграла от рациональной дроби.

Вычисление интеграла от рациональной дроби, как мы видим, требовало предварительного отыскания корней знаменателя этой дроби, что в свою очередь приводило к задаче решения алгебраического уравнения n-й степени.

Знаменитый русский математик Остроградский показал, что вычисление интеграла от рациональной дроби во многих случаях может быть значительно упрощено, причём алгебраическая часть этого интеграла может быть найдена без предварительного определения корней знаменателя.

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx,$$

где знаменатель $F(x)$ — многочлен n-й степени, а числитель — степени не выше $n - 1$.

---

[1]) Арктангенс и логарифм — функции многозначные: значения арктангенса отличаются одно от другого на кратное π, а логарифма — на кратное $2\pi i$. Употребляемые здесь равенства относятся лишь к одной ветви той и другой функции, и соответствие между этими ветвями устанавливается этими именно равенствами.

Обозначим корни знаменателя через a, b, c, ..., l, а их кратности соответственно через α, β, γ, ..., λ, так что

$$F(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}.$$

Дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ может быть разложена на простейшие по формуле (10):

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} +$$
$$+ \frac{B_0}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{L_0}{(x-l)^{\lambda}} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.$$

Умножая обе части этого равенства на dx и интегрируя, получим

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx =$$
$$= \frac{A_0}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_1}{(2-\alpha)(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + A_{\alpha-1}\ln|x-a| +$$
$$+ \frac{B_0}{(1-\beta)(x-b)^{\beta-1}} + \frac{B_1}{(2-\beta)(x-b)^{\beta-2}} + \ldots + B_{\beta-1}\ln|x-b| +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{L_0}{(1-\lambda)(x-l)^{\lambda-1}} + \frac{L_1}{(2-\lambda)(x-l)^{\lambda-2}} + \ldots + L_{\lambda-1}\ln|x-l| + C.$$

Приводя в правой части все рациональные дроби к одному знаменателю, будем иметь:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \frac{M(x)}{P(x)} + A_{\alpha-1}\ln(x-a) + \ldots$$
$$\ldots + L_{\lambda-1}\ln(x-l) + C, \qquad (25)$$

где $M(x)$ и $P(x)$ — целые многочлены, причём, если отнести все постоянные множители к числителю $M(x)$, то многочлен $P(x)$ можно представить в виде

$$P(x) = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots(x-l)^{\lambda-1}.$$

Этот многочлен, очевидно, является наибольшим общим делителем многочленов $F(x)$ и $F'(x)$ (стр. 16). Дробь $\frac{M(x)}{P(x)}$, как сумма правильных алгебраических дробей, есть дробь правильная и, следовательно, степень $M(x)$ ниже степени $P(x)$. Дифференцируя равенство (25), имеем:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{M(x)}{P(x)}\right] + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l}.$$

Приводя простые дроби в правой части к одному знаменателю, получим

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{M(x)}{P(x)}\right] + \frac{N(x)}{Q(x)}, \tag{26}$$

где

$$Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)$$

и степень многочлена $N(x)$ ниже степени $Q(x)$. Все многочлены $M(x)$, $N(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$, входящие в равенство (26), могут быть найдены без фактического вычисления корней знаменателя $F(x)$ данной рациональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$. В самом деле, многочлен $P(x)$, как уже сказано, есть наибольший общий делитель многочленов $F(x)$ и $F'(x)$. Его можно найти по правилу нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов. Многочлен $Q(x)$, очевидно, равен частному от деления $F(x)$ на $P(x)$, $Q(x) = \frac{F(x)}{P(x)}$. Многочлены $M(x)$ и $N(x)$ можно найти способом сравнения коэффициентов. Обозначим через m степень многочлена $F(x)$ и через n — степень многочлена $Q(x)$. Степень многочлена $P(x)$ будет, следовательно, $m-n$; степень $M(x)$ — не выше $m-n-1$ и степень $N(x)$ — не выше $n-1$. Вводя в случае надобности нулевые коэффициенты, можно считать степень $M(x)$ равной $m-n-1$ и степень $N(x)$ равной $n-1$. Многочлен $M(x)$ содержит $m-n$ коэффициентов, многочлен $N(x)$ содержит n коэффициентов. Оба многочлена содержат, следовательно, $m-n+n=m$ неизвестных коэффициентов, подлежащих определению.

Выполняя дифференцирование в правой части равенства (26), получим

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M'(x)}{P(x)} - \frac{M(x)P'(x)}{[P(x)]^2} + \frac{N(x)}{Q(x)}.$$

Умножая обе части этого равенства на произведение $P(x)Q(x)$ и замечая, что $P(x)Q(x) = F(x)$, будем иметь:

$$f(x) = M'(x)Q(x) - M(x)\frac{Q(x)P'(x)}{P(x)} + N(x)P(x). \tag{27}$$

Произведение $Q(x)P'(x)$ делится без остатка на $P(x)$. В самом деле, многочлен $P(x)$ имеет корни a, b, c, ..., l с кратностями, соответственно равными $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$, ..., $\lambda-1$. Эти же корни с кратностями $\alpha-2$, $\beta-2$, ..., $\lambda-2$ являются корнями многочлена $P'(x)$. Они же являются простыми корнями многочлена $Q(x)$. Произведение $P'(x)Q(x)$ имеет, следовательно, эти корни с кратностями $\alpha-1$, $\beta-1$, ..., $\lambda-1$ и потому делится без остатка на $P(x)$, причём степень частного равна $n-1$. Правая часть равенства (27) есть, следовательно, целый многочлен. Степень этого многочлена легко определить, подсчитывая степени отдельных слагаемых его.

Степень $M'(x)\cdot Q(x)$ равна $(m-n-2)+n=m-2$, степень $M(x)\frac{Q(x)\cdot P'(x)}{P(x)}$ равна $(m-n-1)+(n-1)=m-2$, степень $N(x)\cdot P(x)$ равна $(n-1)+(m-n)=m-1$. Степень многочлена в правой части равенства (27) равна, следовательно, $m-1$. Этот многочлен содержит m коэффициентов. Приравняв их соответствующим коэффициентам левой части, получим m равенств, содержащих m неизвестных коэффициентов многочленов $M(x)$ и $N(x)$. Для определения этих коэффициентов мы будем иметь, следовательно, m уравнений первой степени с m неизвестными. Знания этих коэффициентов достаточно для непосредственного нахождения алгебраической части данного интеграла $\int\frac{f(x)}{F(x)}dx$ и для упрощения вычисления его трансцендентной части.

В самом деле, из равенства (26) имеем:

$$\int\frac{f(x)}{F(x)}dx=\frac{M(x)}{P(x)}+\int\frac{N(x)}{Q(x)}dx. \tag{28}$$

Алгебраическая часть данного интеграла равна, следовательно, дроби $\frac{M(x)}{P(x)}$, трансцендентная же часть его находится интегрированием рациональной дроби $\frac{N(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой имеет лишь простые корни.

В этом и состоит упрощение, вносимое рассмотренным методом, принадлежащим Остроградскому. Для фактического применения этого метода достаточно определить многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ и степени многочленов $M(x)$ и $N(x)$, а затем написать равенство (26) с ещё неизвестными коэффициентами многочленов $M(x)$ и $N(x)$. Освобождая полученное таким образом равенство от знаменателя и сравнивая коэффициенты одинаковых степеней в обеих частях, найдем искомые многочлены $M(x)$ и $N(x)$.

Пример. Вычислить интеграл

$$\int\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}dx.$$

В данном случае

$$P(x)=x^2(x+2),\quad Q(x)=x(x+2).$$

$M(x)$ имеет степень $m-n-1=5-2-1=2$, $N(x)$ имеет степень $2-1=1$. Следовательно, можно написать

$$\int\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}dx=\frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{x^2(x+2)}+\int\frac{b_0x+b_1}{x(x+2)}dx.$$

Дифференцируя это равенство, получим:

$$\frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}=\frac{x(x+2)(2a_0x+a_1)-(a_0x^2+a_1x+a_2)(3x+4)}{x^3(x+2)^2}+\frac{b_0x+b_1}{x(x+2)}.$$

Освободив это равенство от знаменателя и сравнив коэффициенты обеих частей, получим пять равенств

$$b_0 = 0, \quad -a_0 + b_1 + 2b_0 = 0, \quad -2a_1 + 2b_1 = 1, \quad 2a_1 + 3a_2 = 0, \quad 4a_2 = 2,$$

из которых найдём коэффициенты:

$$a_0 = -\frac{1}{4}, \quad a_1 = -\frac{3}{4}, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = -\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}\,dx = \frac{-x^2-3x+2}{4x^2(x+2)} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(x+2)}.$$

Вычисление последнего интеграла обычным способом даёт:

$$\int \frac{dx}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C.$$

Подставляя это в выражение для данного интеграла, получим:

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x+2)^2}\,dx = \frac{-x^2-3x+2}{4x^2(x+2)} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C.$$

Сравнивая это выражение с ранее найдённым для того же интеграла выражением (§ 2, пример 7), легко убедиться в тождественности обоих выражений.

Замечание. Если корни $a, b, c, \ldots, l$ уравнения $F(x) = 0$ известны, можно, переписав равенство (28) в виде

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \frac{M(x)}{P(x)} + \int \left\{\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{L}{x-l}\right\} dx,$$

вместо того, чтобы определять коэффициенты многочлена $N(x)$, находить сразу величины $A, B, \ldots, L$.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. $\displaystyle\int \frac{(2x^4-x^2+1)\,dx}{x^3-x} = x^2 + \ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right| + C.$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+16} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+2}{x+8}\right| + C.$
3. $\displaystyle\int \frac{(2x+43)\,dx}{x^2+x-12} = 7\ln|x-3| - 5\ln|x+4| + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{(4x-7)\,dx}{x^2+6x+9} = 4\ln|x+3| + \frac{19}{x+3} + C.$
5. $\displaystyle\int \frac{(1-x)\,dx}{x(x+1)^2} = \frac{2}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$
6. $\displaystyle\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x+2)^2} = \frac{x^2+2x-3}{x+2} - \ln(x+2)^4 + C.$
7. $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{x^4-2x^2+1} = x - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

8. $\int \frac{(12x^2+36x-18)\,dx}{x^3-9x} = \ln\left\{C\frac{x^2|x-3|^{11}}{|x+3|}\right\}$.

9. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)(x^2-4)} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + \frac{5}{12}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$.

10. $\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$.

11. $2a\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

12. $\int \frac{dx}{1+x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1+\sqrt{5}}{2x-1-\sqrt{5}}\right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C$.

14. $\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \operatorname{arctg}(x-1) + C$.

15. $\int \frac{(2x-2)\,dx}{x^2-2x+2} = \ln(x^2-2x+2) + C$.

16. $\int \frac{(7x^2-10x+37)\,dx}{(x+1)(x^2-4x+13)} = \ln[|x+1|^3(x^2-4x+13)^2] + 2\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C$.

17. $\int \frac{(2x+2)\,dx}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg}x + C$.

18. $\int \frac{5x^2-8x-4}{x^3+1}\,dx = \ln[|x+1|^3(x^2-x+1)] - 4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$.

19. $\int \frac{4x\,dx}{(x-1)^3(x^2+1)} = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|} + \operatorname{arctg}x - \frac{1}{(x-1)^2} + C$.

20. $\int \frac{(13x^2-68x+95)\,dx}{x^3-11x^2+43x-65}$.

21. $\int \frac{(15x^2-70x-95)\,dx}{x^3-6x^2-13x+42}$.

ГЛАВА II.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Иррациональные функции.

Если две переменные величины x, y связаны алгебраическим уравнением вида

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где под знаком F разумеется совокупность рациональных действий (сложение, вычитание, умножение, деление и возведение в целую и положительную степень), которые надо совершить над переменными x и y, то одну из этих переменных называют алгебраической функцией другой. Если уравнение (1) — первой степени относительно y, то определяемая им функция y будет *рациональной* и может быть явно выражена помощью рациональных операций над аргументом x:

$$(a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p)\,y + (b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q) = 0,$$

откуда

$$y = -\frac{b_0x^q + b_1x^{q-1} + \ldots + b_q}{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p}.$$

Если же уравнение (1) будет второй или высшей степени относительно y, то определяемая им функция y будет в общем случае не рациональной. Для явного выражения алгебраической функции в зависимости от аргумента рациональных операций над ним, вообще говоря, уже недостаточно. В случае второй, третьей и четвёртой степени уравнения (1) относительно y определяемая функция y может быть представлена явно с помощью извлечения корня из выражений, содержащих аргумент; при высших же степенях такое явное выражение функции помощью радикалов возможно только в исключительных случаях.

Алгебраические функции, выражаемые помощью радикалов, мы будем называть специально *иррациональными*.

Интегрирование выражений вида $R(x, y)$, где R — знак рациональных операций, совершаемых над аргументом x и иррациональной

функцией y, вообще говоря, приводит к высшим трансцендентным функциям, и только сравнительно в немногих случаях интегралы этого рода можно выразить помощью конечного числа элементарных функций.

§ 2. Интегрирование выражений, содержащих рациональные степени линейной дроби.

Рассмотрим интеграл вида

$$J = \int R(x, y)\, dx, \tag{2'}$$

где R — знак рациональных операций, совершаемых над x и y, а y есть иррациональная функция, определяемая уравнением

$$y^m = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{или} \quad y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{3}$$

Подинтегральная функция содержит целые степени y и, следовательно, степени с рациональными показателями линейной дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$. Такой интеграл

$$J = \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}\right] dx \tag{2'}$$

рациональной подстановкой можно свести к интегралу рациональной функции. Действительно, примем иррациональное выражение y за новое переменное t:

$$y = t \quad \text{или} \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}} = t, \tag{3'}$$

отсюда получаем уравнение первой степени относительно x, и таким образом x, а стало быть и dx выражаются рационально через t:

$$(cx+d)\, t^m = ax+b, \quad x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = r(t), \quad dx = r'(t)\, dt, \tag{4}$$

где r — сокращённое обозначение указанного рационального выражения для x. Следовательно, подинтегральное выражение преобразованного интеграла будет рациональным относительно нового переменного t:

$$J = \int R[r(t), t]\, r'(t)\, dt. \tag{5}$$

Интеграл (5) находится по правилам интегрирования рациональных функций. Заменяя в полученном результате t соответствующим выражением (3') через x, получим интеграл (2) или (2').

Пример 1. Вычислить интеграл

$$J=\int\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+x}\,dx.$$

Решение. Полагаем

$$\frac{1-x}{1+x}=t^2,$$

откуда

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad\text{и}\quad dx=-\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2},\quad\text{а}\quad 1+x=\frac{2}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$J=\int\frac{(1+t)\cdot(1+t^2)}{2}\left(-\frac{4t\,dt}{(1+t^2)^2}\right)=-2\int\frac{(1+t)\,t\,dt}{1+t^2}=$$

$$=-2\int\left[1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{1+t^2}\right]dt=-2t-\ln(1+t^2)+2\operatorname{arctg}t+C.$$

Возвращаясь к первоначальному переменному, получим:

$$J=-2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-\ln\frac{2}{1+x}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C=$$

$$=-2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\ln(1+x)+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C_1,$$

где $C_1=C-\ln 2$.

Из интегралов этого типа наиболее часто встречаются такие, в которых подинтегральное выражение содержит какой-либо корень, или, более общо, — дробную степень линейного двучлена или аргумента.

Пример 2. Вычислить интеграл

$$J=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}.$$

Решение. Здесь

$$\frac{ax+b}{cx+d}=1+x,\quad m=2.$$

Полагаем

$$1+x=t^2,\quad\text{откуда}\quad x=t^2-1\quad\text{и}\quad dx=2t\,dt.$$

Следовательно,

$$J=\int\frac{(t^2-1)\,2t\,dt}{t}=2\int(t^2-1)\,dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C$$

или

$$J=\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}-2\sqrt{1+x}+C.$$

Пример 3.

$$J=\int\frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$$

Решение. Здесь

$$\frac{ax+b}{cx+d}=x, \quad m=6, \text{ так как } \sqrt{x}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^3, \ \sqrt[3]{x}=\left(\sqrt[6]{x}\right)^2.$$

Полагаем $x=t^6$, откуда $dx=6t^5\,dt$. Следовательно,

$$J=6\int\frac{t^5\,dt}{t^3-t^2}=6\int\frac{t^3\,dt}{t-1}=6\int\left[t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right]dt$$

или

$$J=6\left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right]+C=$$

$$=2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$$

Пример 4.

$$J=\int\left(2x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{4}}+\frac{x^{\frac{2}{5}}}{4}\right)dx.$$

Решение. Интегрирование многочлена, содержащего дробные степени x, выполнимо по основным формулам без предварительной рационализации:

$$J=2\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}+C=\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5}+\frac{5}{28}\sqrt[5]{x^7}+C.$$

§ 3. Интеграл двучленного дифференциала.

Интеграл двучленного дифференциала

$$J=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{6}$$

где a и b — не равные нулю постоянные, при некоторых условиях относительно рациональных показателей m, n и p может быть сведён к интегралу типа

$$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}\right]d, \tag{7}$$

рассмотренному в предыдущем параграфе; в общем же случае интеграл (6) не может быть выражен помощью конечного числа элементарных функций. К условиям интегрируемости можно притти, преобразовывая данный интеграл так, чтобы двучленный множитель был линейным относительно нового переменного. Полагая x^n равным t, получим:

$$x^n=t, \quad x=t^{\frac{1}{n}} \quad \text{и} \quad dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

Интеграл (6) принимает после такой подстановки следующий вид:

$$J=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p\,dt.$$

Обозначая $\frac{m+1}{n}-1$ через q, будем иметь:

$$J=\frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p\,dt. \tag{8}$$

1. Если q — целое число, то интеграл (8) принадлежит типу (7) и вычисляется, как указано в § 2, т. е., если $p=\frac{r}{s}$, — подстановкой $a+bt=u^s$.

2. Если p — целое число, то интеграл (8) принадлежит также к типу (7). Если $p>0$, то, разложив $(a+bt)^p$ по биному Ньютона, почленным интегрированием находим окончательный результат для J. Если $p<0$, то J вычисляется, как указано в § 2, т. е., если $q=\frac{r}{s}$, — подстановкой $t=u^s$.

3. Умножив и разделив подинтегральное выражение (8) на t^p, получим:

$$J=\frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p\,dt=\frac{1}{n}\int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt. \tag{9}$$

Если $p+q$ — целое число, то интеграл (9) принадлежит также к типу (7). При этом, если $p=\frac{r}{s}$, то интеграл (9) рационализуется подстановкой

$$\frac{a+bt}{t}=u^s.$$

Таким образом, если одно из трёх чисел p, q, $p+q$ целое, то интеграл (8) может быть рационализован. Для интеграла (6) целым числом должно быть одно из трёх чисел p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$, так как $q=\frac{m+1}{n}-1$. Великий русский математик Чебышев показал, что во всех остальных случаях интеграл (8) или (6) представляет высшую трансцендентную функцию.

Пример 1.

$$J=\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

$m=3$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ (целое число),

Полагаем $x^2 = t$; следовательно, $x = t^{\frac{1}{2}}$, $dx = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$ и

$$J = \frac{1}{2} \int t (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Полагаем далее $1 - t = u^2$; следовательно, $dt = -2u\,du$, и

$$J = \frac{1}{2} \int t (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = -\int (1-u^2)\,du = -u + \frac{u^3}{3} + C =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{(\sqrt{1-x^2})^3}{3} + C = -\frac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{3} + C.$$

Тот же интеграл можно было бы интегрировать по частям, полагая $u = x^2$, $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и, следовательно, $v = -\sqrt{1-x^2}$:

$$J = -x^2\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}\,2x\,dx = -x^2\sqrt{1-x^2} + 2\int \frac{x-x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

или

$$J = -x^2\sqrt{1-x^2} + 2\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2-x^2}} - 2J,$$

откуда

$$3J = -x^2\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{1-x^2} + C \text{ и } J = -\frac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{3} + C.$$

Тот путь интегрирования двучленных дифференциалов, который указан при установлении условий интегрируемости, не всегда самый простой. Можно было бы установить формулы приведения, сводящие данный интеграл постепенно к интегралам более простым и, наконец, к основным формулам (в случае интегрируемости), а иногда интегрирование по частям, если условие интегрируемости выполняется, приводит быстро к цели.

Пример 2.

$$J = \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \int x^5 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

$$m = 5,\ n = 4,\ p = -\frac{1}{2};\ \frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{4},\ q = \frac{1}{2},$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{5+1}{4} - \frac{1}{2} = 1.$$

Так как $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число, то данный интеграл можно свести к основным формулам. Интегрируем по частям, полагая $u = x^2$, $dv = \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$

и, следовательно, $v=\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}$. Таким образом получаем:

$$J=\frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^4}-\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^4}\,2x\,dx=\frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^4}-\int\frac{x+x^5}{\sqrt{1+x^4}}dx$$

или

$$J=\frac{1}{2}x^2\sqrt{1+x^4}-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}-J,$$

откуда

$$J=\frac{x^2\sqrt{1+x^4}}{4}-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Но

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{2}\int\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)+C.$$

Следовательно,

$$J=\frac{x^2\sqrt{1+x^4}}{4}-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)+C.$$

По первоначальному приёму мы имели бы:

$$J=\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^4}}=\int x^5(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}dt,$$

где $t=x^4$. Полагая далее

$$\frac{1+t}{t}=u^2,$$

получим

$$J=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1+t}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u^2-1)^2}.$$

По правилам интегрирования рациональной дроби будем иметь:

$$J=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u^2-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{u}{u^2-1}+\frac{1}{8}\ln\frac{u-1}{u+1}+C.$$

Но

$$u=\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{t}},\quad u-1=\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{t}}{\sqrt{t}},\quad u+1=\frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{t}}{\sqrt{t}},$$

$$u^2-1=\frac{1}{t},$$

Следовательно,

$$J=\frac{\sqrt{t}\,\sqrt{1+t}}{4}+\frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}+\sqrt{t}}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{t}\,\sqrt{1+t}}{4}-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{1+t}+\sqrt{t}\right)+C$$

или, полагая $t=x^4$:

$$J=\frac{x^2\sqrt{1+x^4}}{4}-\frac{1}{4}\ln\left(\sqrt{1+x^4}+x^2\right)+C.$$

§ 4. Интегрирование выражений, содержащих корень из квадратного трёхчлена.

Интеграл

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$$

где R есть знак рациональных операций над x и $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, одной из следующих, так называемых *эйлеровых подстановок* может быть преобразован в интеграл от рациональной функции или, как говорят, может быть рационализован.

а) Если корни α и β трёхчлена ax^2+bx+c действительны, то можно применить для рационализации данного интеграла подстановку

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\,t, \tag{10}$$

где t — новое переменное. Действительно, по условию

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

и равенство (10) по возведении обеих его частей в квадрат принимает вид

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2.$$

По сокращении будем иметь уравнение первой степени относительно x:

$$a(x-\beta)=(x-\alpha)t^2,$$

откуда для x получаем рациональное выражение относительно t; обозначим это выражение через $r(t)$. Итак,

$$x=r(t),\quad dx=r'(t)\,dt,\quad y=\sqrt{ax^2+bx+c}=[r(t)-\alpha]\,t=\rho(t),$$

где $\rho(t)$ — сокращённое обозначение указанного рационального выражения для y.

Таким образом данный интеграл преобразовывается в интеграл от рациональной функции:

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left[r(t),\rho(t)\right]r'(t)\,dt, \tag{11}$$

так как ряд рациональных операций (R) над рациональными выражениями $r(t)$ и $\rho(t)$ приводит к рациональному выражению; рационален также и второй множитель $r'(t)$.

б) Независимо от того, будут ли корни трёхчлена ax^2+bx+c действительны или мнимы, можно применить для рационализации данного интеграла подстановки

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= x\sqrt{a}+t\\ \sqrt{ax^2+bx+c} &= -x\sqrt{a}+t,\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

или

если коэффициент a — положительное число. Действительно, независимо от знака перед $\sqrt{a}$, из равенства (12) по возведении в квадрат и приведении получаем уравнение первой степени относительно x:

$$bx+c = \pm 2xt\sqrt{a}+t^2.$$

Таким образом x, а вместе с тем dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ будут рациональны относительно t, и данный интеграл преобразуется в интеграл вида (11).

в) Если коэффициент c — положительное число, то можно для рационализации данного интеграла применить подстановку

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= xt+\sqrt{c}\\ \sqrt{ax^2+bx+c} &= xt-\sqrt{c}.\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

или

Действительно, по возведении в квадрат обеих частей равенства (13) получим

$$ax^2+bx+c = x^2t^2 \pm 2\sqrt{c}\,xt+c.$$

Отсюда по приведении и сокращении на x будем иметь уравнение первой степени относительно x:

$$ax+b = xt^2 \pm 2\sqrt{c}t,$$

и, следовательно, данный интеграл преобразовывается в интеграл вида (11).

Пример 1. Применим вторую подстановку к интегралу

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Полагаем

$$\sqrt{x^2+m} = t-x,$$

откуда

$$x^2+m = t^2-2tx+x^2 \text{ или } 2tx = t^2-m.$$

Не определяя x, дифференцируем обе части последнего равенства:

$$2t\,dx+2x\,dt = 2t\,dt,$$

откуда

$$\frac{dx}{t-x}=\frac{dt}{t}.$$

Но $t-x=\sqrt{x^2+m}$; следовательно,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\frac{dt}{t} \text{ и } \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C$$

или

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\ln|x+\sqrt{x^2+m}|+C.$$

Интегрирование выражений $R(x, y)$, где $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, можно и без предварительной рационализации сводить к основным интегралам этого типа

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\ln|x+\sqrt{x^2+m}|+C \text{ и } \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$$

Пример 2. Подстановкой $x=\frac{1}{y}$ интегралы

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \text{ и } \int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

сводятся к основным. Действительно,

$$x=\frac{1}{y},\ dx=-\frac{dy}{y^2},\ \sqrt{x^2-1}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},\ \sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{y^2-1}}{y},$$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=-\ln|y+\sqrt{y^2-1}|+C$$

или

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}=-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C=\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C.$$

Точно так же

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=-\arcsin\frac{1}{x}+C.$$

Пример 3. Интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

можно привести к основным, преобразовав квадратный трёхчлен ax^2+bx+c, смотря по знаку коэффициента a, или в y^2+m или в m^2-y^2.

а) Если $a>0$, то

$$ax^2+bx+c=\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Полагая

$$\sqrt{a}\,x+\frac{b}{2\sqrt{a}}=y \text{ и } c-\frac{b^2}{4a}=m,$$

будем иметь:

$$\sqrt{a}\,dx=dy \text{ и } \sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{y^2+m}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+m}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|y+\sqrt{y^2+m}\right|+C.$$

Возвращаясь к прежнему переменному, получим:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}}+\sqrt{ax^2+bx+c}\right|+C.$$

б) Если $a<0$ и корни трёхчлена ax^2+bx+c действительны, то

$$ax^2+bx+c=c-\frac{b^2}{4a}-\left(\sqrt{-a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2.$$

Полагая

$$c-\frac{b^2}{4a}=m^2 \text{ и } \sqrt{-a}\,x-\frac{b}{2\sqrt{-a}}=my,$$

будем иметь

$$\sqrt{-a}\,dx=m\,dy, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=m\sqrt{1-y^2}$$

и

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin y+C$$

или

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-(2ax+b)}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

Изложенным выше подстановкам Эйлера можно дать очень простое геометрическое истолкование, которое показывает, что подстановки Эйлера являются лишь частными видами в широкой совокупности подстановок, позволяющих рационализировать подинтегральное выражение в интеграле

$$\int R(x,\,y)\,dx,$$

где

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Такая рационализация достигалась тем, что x и y выражались рационально в функции некоторого параметра t. Возможность выбора такого параметра и обусловливала возможность рационализации данного подинтегрального выражения. Рассматривая x и y в равенстве

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$$

как декартовы координаты точки на плоскости и написав это равенство в виде

$$y^2 = ax^2 + bx + c, \tag{14}$$

замечаем, что оно представляет собой уравнение некоторой кривой второго порядка. Если x и y будут выражены рационально через некоторый параметр t, то координаты точек кривой (14) сделаются однозначными функциями этого параметра: каждому значению параметра t будет соответствовать единственная пара значений x и y, т. е. единственная точка на кривой (14). Чтобы получить такое выражение координат x, y точек кривой (14) через параметр t, рассмотрим уравнение между координатами x и y, в которое, кроме координат x и y, входит ещё параметр t:

$$F(x, y, t) = 0. \tag{15}$$

Каждому значению параметра t соответствует свой вид уравнения (15) и, следовательно, своя кривая на плоскости. Принято говорить, что уравнение (15) представляет целое семейство кривых, зависящее от одного параметра t. Допустим, что каждому значению t соответствует одна кривая этого семейства и каждая кривая семейства встречает кривую (14) в одной точке так, что через каждую точку кривой (14) проходит лишь одна кривая семейства (15). В таком случае каждому значению $t = t_0$ будет соответствовать определённая точка кривой (14), именно: точка встречи кривой $F(x, y, t) = 0$ с кривой (14). Следовательно, координаты точек кривой (14) будут однозначными функциями параметра. Чтобы получить их выражения через t, достаточно найти координаты точки пересечения кривых (14) и (15) при произвольном t, т. е. решить совместно уравнения (14) и (15). Если надлежащим выбором семейства кривых (15) и параметра t удастся достигнуть того, что x и y будут выражаться через t рационально, то это и даст возможность рационализировать данный интеграл.

Выберем за семейство кривых (15) пучок прямых, центр которого поместим на кривой (14) в какой-либо точке (x_0, y_0). Уравнение такого пучка будет иметь вид

$$y - y_0 = t(x - x_0), \tag{16}$$

причём x_0 и y_0 удовлетворяют уравнению (14):

$$y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

Каждая прямая пучка (16) встречает кривую (14) дважды: в точке (x_0, y_0) и в некоторой точке (x, y). Первая точка (x_0, y_0) будет одна и та же для всех прямых пучка (16). Её можно назвать поэтому неподвижной точкой. Вторая точка меняется от одной прямой к другой, её можно поэтому назвать подвижной точкой. Каждой прямой пучка (16) соответствует своя подвижная точка встречи с кривой (14). Координаты этой подвижной точки найдутся из совместного решения

уравнений (16) и (14) и будут, как можно проверить, рациональными функциями параметра t пучка (16). Помещая центр пучка (16) в различных точках кривой (14), получим различные рациональные выражения координат x и y через параметр t, т. е. различные методы рационализации подинтегрального выражения в интеграле

$$\int R(x, y)\,dx.$$

Три подстановки Эйлера и соответствуют трём частным положениям центра пучка (16) на кривой (14). В самом деле, допустим, что кривая (14) пересекает ось абсцисс в двух точках α и β. В таком случае её уравнение может быть написано в виде

$$y^2 = a(x-\alpha)(x-\beta). \qquad (14')$$

Выберем одну из точек α или β, например α, за центр пучка (16). Уравнение пучка будет иметь вид

$$y = t(x-\alpha).$$

Замечая, что

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c},$$

видим, что это и есть первая подстановка Эйлера, рационализирующая интеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$$

в случае действительных корней трёхчлена ax^2+bx+c. Допустим теперь, что $a>0$. В таком случае кривая (14) будет гиперболой:

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = -1\cdot a < 0.$$

В этом случае можно поместить центр пучка (16) в одной из бесконечно удалённых точек этой гиперболы, т. е. взять пучок прямых, параллельных одной из её асимптот. Угловые коэффициенты асимптот будут $+\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Следовательно, за пучок прямых (16) можно взять один из следующих пучков параллельных прямых:

$$y = x\sqrt{a}+t \quad \text{или} \quad y = -x\sqrt{a}+t.$$

Сравнивая эти равенства с формулами (12), видим, что этот случай соответствует второй подстановке Эйлера.

Наконец, допустим, что $c>0$. В этом случае кривая (14) пересекает ось ординат в двух действительных точках. В самом деле, из уравнения (14) при $x=0$ находим $y=\pm\sqrt{c}$. Выберем одну из этих точек за центр пучка (16). Уравнение пучка будет

$$y = tx+\sqrt{c} \quad \text{или} \quad y = tx-\sqrt{c}.$$

Сравнивая эти равенства с формулами (13), видим, что этот случай соответствует третьей подстановке Эйлера.

Выбирая центры пучка (16) в произвольной точке кривой (14), можно получать новые подстановки, рационализирующие данный интеграл.

Пример. Возьмём интеграл

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+x-1}\right) dx.$$

Кривая (14) имеет уравнение

$$y^2 = x^2 + x - 1. \qquad (14'')$$

За центр пучка (16) выберем точку пересечения кривой (14″) с биссектрисой первого координатного угла $y = x$. Координаты этой точки найдём, полагая в (14″) $y = x$ и, следовательно,

$$x^2 = x^2 + x - 1.$$

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = \infty$; соответствующие значения y: $y_1 = 1$, $y_2 = \infty$ Кривая (14″) встречает биссектрису $y = x$ дважды: в точке (1, 1) и в бесконечно удалённой точке. Выберем точку (1, 1) за центр пучка (16):

$$y - 1 = t(x - 1).$$

Этому выбору соответствует подстановка

$$\sqrt{x^2+x-1} = t(x-1) + 1,$$

рационализирующая данный интеграл и не совпадающая ни с одной из подстановок Эйлера.

Рассмотренный выше метод рационализации интеграла может быть распространён на более широкий класс интегралов.

Рассмотрим интеграл вида $\int R(x, y)\, dx$, где y — какая-либо алгебраическая функция, определённая некоторым алгебраическим уравнением

$$F(x, y) = 0. \qquad (17)$$

Рассматривая x и y как координаты точки на плоскости, мы видим, что уравнение (17) представляет некоторую кривую. Если эта кривая обладает тем свойством, что координаты её точек могут быть представлены как рациональные функции некоторого параметра t, то интеграл, очевидно, может быть рационализован.

Кривая, координаты точек которой могут быть представлены рациональными функциями параметра, носит название «уникурсальной кривой». Следовательно, если кривая (17) окажется уникурсальной, то интеграл $\int R(x, y)\, dx$ можно рационализировать. Кривая (14), которую мы рассматривали выше, т. е. кривая второго порядка, является частным видом уникурсальной кривой.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = 2a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt{a^2-x^2} + C =$

$$= a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx = 2\sqrt{x} + \ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + C.$

3. $\int \frac{(1+\sqrt{x})\,dx}{\sqrt[6]{x^5}+x\sqrt[6]{x}} = 3\sqrt[3]{x} - 3\ln(1+\sqrt[3]{x}) + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$

4. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\sqrt{x+1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + C.$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{x+2a-2\sqrt{a(x+a)}}{x}\right| + C.$

6. При каких значениях m интеграл $J = \int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ можно выразить посредством конечного числа элементарных функций?

7. При каких целых положительных значениях n интеграл $J = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^n}}$ можно выразить в конечном виде?

8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2} + C.$

9. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$

10. $\int \sqrt{x^2+x+1}\,dx = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} +$

$$+ \frac{3}{8} \ln\left(\frac{2x+1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$$

11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \sqrt{x^2+2x+2} - \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.$

12. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = -\sqrt{1+x-x^2} - \operatorname{arctg} \frac{1+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C.$

13. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\sqrt{ax-x^2} - a \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{x}} + C.$

14. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$

ГЛАВА III.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Интегрирование функций, содержащих трансцендентный множитель с алгебраической производной.

Рассмотрим теперь интегрирование выражений, содержащих трансцендентные функции. Не исчерпывая всех возможных комбинаций, отметим лишь некоторые группы интегралов; при этом будем обозначать символом $E(x)$ целую, а $R(x)$ — дробную рациональную функцию. Рассмотрим прежде всего следующую группу интегралов:

$$\int E(x)\ln x\,dx;\quad \int E(x)\operatorname{arctg} x\,dx;\quad \int E(x)\operatorname{arcctg} x\,dx;$$

$$\int E(x)\arcsin x\,dx;\quad \int E(x)\arccos x\,dx.$$

В интегралах этой группы подинтегральный дифференциал содержит множителем трансцендентную функцию, имеющую алгебраическую производную. Интегрированием по частям первые три интеграла сводятся к интегралам рациональных функций, а последние два — к интегралам выражения, содержащего $\sqrt{1-x^2}$. Действительно, полагая трансцендентный множитель равным u, а $E(x)\,dx$ равным dv, будем иметь:

$$dv = E(x)\,dx \quad \text{и} \quad v = \int E(x)\,dx = E_1(x);$$

1) $u = \ln x;$ $\quad \int E(x)\ln x\,dx = E_1(x)\ln x - \int E_1(x)\frac{dx}{x};$

2) $u = \operatorname{arctg} x;$ $\quad \int E(x)\operatorname{arctg} x\,dx = E_1(x)\operatorname{arctg} x - \int E_1(x)\frac{dx}{1+x^2};$

3) $u = \operatorname{arcctg} x;$ $\quad \int E(x)\operatorname{arcctg} x\,dx = E_1(x)\operatorname{arcctg} x + \int E_1(x)\frac{dx}{1+x^2};$

4) $u = \arcsin x;$ $\quad \int E(x)\arcsin x\,dx = E_1(x)\arcsin x - \int E_1(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

5) $u = \arccos x;$ $\quad \int E(x)\arccos x\,dx = E_1(x)\arccos x + \int E_1(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Вместо целой функции $E(x)$ подинтегральное выражение может содержать дробный рациональный множитель $R(x)$; если интеграл дроби $R(x)$ представляет тоже рациональную дробь:

$$\int R(x)\,dx = R_1(x),$$

то тем же приёмом интегрирование может быть доведено до конца.

Пример 1. $J = \int (x^2 + x - 2)\ln x\,dx.$

$$u = \ln x;\quad dv = (x^2 + x - 2)\,dx;\quad v = \int (x^2 + x - 2)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x;$$

$$\int (x^2 + x - 2)\ln x\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\frac{dx}{x} =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} - 2\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)\ln x - \left(\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - 2x\right) + C.$$

Пример 2. $J = \int \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$

$$u = \ln x;\quad dv = \frac{dx}{x^2};\quad v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x};$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

§ 2. Интегрирование функций с трансцендентным множителем e^{ax}, $\sin ax$ или $\cos ax$.

В интегралах этой группы

$$\int E(x)\,e^{ax}\,dx;\quad \int E(x)\sin ax\,dx;\quad \int E(x)\cos ax\,dx$$

подинтегральная функция содержит множителем трансцендентную функцию, производная и интеграл которой принадлежат к тому же типу. Повторным интегрированием по частям, относя трансцендентный множитель к дифференциалу, можно постепенно понижать степень целого рационального множителя $E(x)$ и таким образом довести интегрирование до конца.

1. $u = E(x),\quad dv = e^{ax}\,dx;\quad v = \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a};$

$$\int E(x)\,e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}E(x) - \frac{1}{a}\int E'(x)\,e^{ax}\,dx.$$

2. $u = E(x),\quad dv = \sin ax\,dx;\quad v = \int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a};$

$$\int E(x)\sin ax\,dx = -E(x)\frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a}\int E'(x)\cos ax\,dx,$$

3. $u = E(x)$, $dv = \cos ax\,dx$; $v = \int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}$;

$$\int E(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}E(x) - \frac{1}{a}\int E'(x)\sin ax\,dx.$$

Степень многочлена $E'(x)$ ниже степени многочлена $E(x)$.

Пример. $J = \int (x^2 - x + 2)\sin 3x\,dx$.

а) $u = x^2 - x + 2$, $dv = \sin 3x\,dx$; $v = \int \sin 3x\,dx = -\frac{\cos 3x}{3}$;

$$\int (x^2 - x + 2)\sin 3x\,dx = -(x^2 - x + 2)\frac{\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\int (2x - 1)\cos 3x\,dx.$$

б) $u = 2x - 1$, $dv = \cos 3x\,dx$; $v = \int \cos 3x\,dx = \frac{\sin 3x}{3}$;

$$\int (2x - 1)\cos 3x\,dx = (2x - 1)\frac{\sin 3x}{3} - \frac{1}{3}\int 2\sin 3x\,dx =$$

$$= (2x - 1)\frac{\sin 3x}{3} + \frac{2}{9}\cos 3x.$$

в) $$\int (x^2 - x + 2)\sin 3x\,dx =$$

$$= -(x^2 - x + 2)\frac{\cos 3x}{3} + (2x - 1)\frac{\sin 3x}{9} + \frac{2}{27}\cos 3x + C.$$

Если алгебраическим множителем подинтегральной функции является рациональная дробь $R(x)$, то разлагают её на простейшие дроби. Интегрированием по частям, относя простейшую дробь к дифференциалу, можно понизить степень знаменателя этой дроби; например, полагая $u = e^x$, $dv = \frac{dx}{(x-a)^n}$ и, следовательно, $v = \int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{1-n}\cdot\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$, получим

$$\int \frac{e^x\,dx}{(x-a)^n} = \frac{e^x}{(1-n)(x-a)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{e^x\,dx}{(x-a)^{n-1}}.$$

Повторным интегрированием по частям мы дойдём до первых степеней в знаменателях. Таким образом интегралы

$$\int R(x)\,e^x\,dx, \quad \int R(x)\sin x\,dx, \quad \int R(x)\cos x\,dx$$

приводят к интегралам

$$\int \frac{e^x\,dx}{x-a}, \quad \int \frac{\sin x\,dx}{x-a}, \quad \int \frac{\cos x\,dx}{x-a}$$

или, после введения нового переменного $(x - a = t)$, — к интегралам

$$\int \frac{e^t\,dt}{t}, \quad \int \frac{\sin t\,dt}{t}, \quad \int \frac{\cos t\,dt}{t}.$$

Подставляя в первом из этих интегралов $e^t = z$ или $t = \ln z$, а в остальных ради симметрии обозначений $t = z$, можно те же интегралы представить в виде

$$\int \frac{dz}{\ln z}, \quad \int \frac{\sin z\, dz}{z}, \quad \int \frac{\cos z\, dz}{z}.$$

Никакими преобразованиями нельзя свести эти интегралы к основным табличным интегралам. Они представляют высшие трансцендентные функции, которые нельзя выразить помощью элементарных функций, комбинируя их в конечном числе. Первый из этих интегралов называют *интегральным логарифмом*, второй — *интегральным синусом*, а третий — *интегральным косинусом*. При изучении этих новых функций нужно обратиться к первоначальному определению первообразной функции как определённого интеграла или применить для этой цели иного рода бесконечные процессы (разложение в ряд).

§ 3. Интегрирование выражений, зависящих рационально от показательной функции: $\int R(e^x)\,dx$.

Подстановкой

$$e^x = t \text{ и, следовательно, } x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t}$$

этот интеграл преобразовывается в интеграл рациональной функции:

$$\int R(e^x)\,dx = \int R(t)\frac{dt}{t}.$$

Интеграл вида $\int E(e^x)\,dx$, где $E(e^x)$ — целый многочлен относительно степеней e^x, можно интегрировать почленно, не прибегая непосредственно к подстановке.

Пример 1.

$$J = \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx.$$

Полагая $e^x = t$, будем иметь:

$$e^x = t,\ e^{-x} = t^{-1},\ dx = \frac{dt}{t} \text{ и } J = \int \frac{t + t^{-1}}{t - t^{-1}}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^2+1}{(t^2-1)\,t}\,dt;$$

$$\frac{t^2+1}{(t^2-1)\,t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t};$$

$$A = \left[\frac{t^2+1}{(t-1)\,t}\right]_{t=-1} = 1,\ B = \left[\frac{t^2+1}{(t+1)\,t}\right]_{t=1} = 1,\ C = \left[\frac{t^2+1}{t^2-1}\right]_{t=0} = -1;$$

$$\int \frac{t^2+1}{(t^2-1)\,t}\,dt = \int \frac{dt}{t+1} + \int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t+1| + \ln|t-1| - \ln|t| + \ln C;$$

$$J = \ln C\left|\frac{t^2-1}{t}\right| = \ln|C\,|e^x - e^{-x}||.$$

Пример 2.

$$\int (e^{2x} - 3e^x + 1)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,d\,2x - 3\int e^x\,dx + \int dx =$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} - 3e^x + x + C.$$

§ 4. Интегралы выражений, зависящих рационально от тригонометрических функций: $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots)\,dx$. Интегрирование помощью подстановки.

Интеграл выражения, составленного помощью рациональных операций из тригонометрических функций, преобразовывается в интеграл рациональной функции подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \text{ или } x = 2\operatorname{arctg} t. \tag{1}$$

Действительно, на основании формул тригонометрии имеем

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} = \frac{t}{\pm\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+t^2}},$$

причём перед корнем в обоих случаях стоит один и тот же знак, поскольку $\sin\frac{x}{2} : \cos\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Поэтому

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{2}$$

т. е. $\sin x$ и $\cos x$ выражаются рационально через t. Остальные тригонометрические функции выражаются рационально через $\sin x$, $\cos x$ и, значит, рационально через t. Кроме того из (1) имеем:

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}. \tag{3}$$

Таким образом после замены тригонометрических функций и dx их выражениями (1), (2) и (3) через t данный интеграл преобразуется в интеграл рациональной функции:

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \ldots)\,dx =$$
$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \ldots\right)\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt.$$

Пример 1. $J=\int \frac{dx}{\sin x}$.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Из этого интеграла, заменяя x через $x+\frac{\pi}{2}$, получим:

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

Так как $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\sec x$, $\csc x$ выражаются рационально через $\sin x$ или $\cos x$, то рассматриваемый интеграл можно считать данным в зависимости только от $\sin x$ и $\cos x$:

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx. \tag{4}$$

Вместо подстановки (1) иногда более удобны подстановки иные, именно, можно принять за новое переменное $\sin x$ или $\cos x$, или $\operatorname{tg} x$, или $\operatorname{ctg} x$ в зависимости от вида интеграла (4).

Рационализация рассматриваемых интегралов приводит в общем случае к интегрированию более или менее сложной рациональной дроби, но в некоторых случаях может привести к интегрированию целой функции или простых дробей. Рассмотрим, в частности, интеграл

$$J=\int \sin^m x\cos^n x\,dx \tag{5}$$

и исследуем, при каких подстановках и каких соотношениях между показателями m и n рационализация приводит к простому интегрированию.

а) Подстановка $\sin x=t$ даёт следующее преобразование:

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt=\int t^m(1-t^2)^k\,dt,$$

где $k=\frac{n-1}{2}$. Если k — целое положительное число или нуль, т. е. $n=2k+1$ — число нечётное, то данное преобразование приводит к простому интегрированию.

б) Подстановка $\cos x=t$ даёт:

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx=\int (1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}\,t^n\,dt=\int (1-t^2)^k\,t^n\,dt,$$

где $k=\frac{m-1}{2}$. Простой случай получается при k целом и положительном или нуле, т. е. при нечётном показателе $m=2k+1$.

в) Подстановка $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = u$ даёт:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int t^m (1+t^2)^{-\frac{m+n}{2}-1}\, dt = \int t^m (1+t^2)^k\, dt$$

или

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\int (1+u^2)^{-\frac{m+n}{2}-1} u^n\, du = -\int (1+u^2)^k u^n\, du.$$

Если k — целое положительное число или нуль, получим простой случай интегрирования. В этом случае сумма показателей $m+n$ должна быть отрицательным чётным числом:

$$-\frac{m+n}{2} - 1 = k, \quad m+n = -2(k+1).$$

Таким образом, в случаях а), б) и в), если разложить подинтегральный двучлен по биному Ньютона, задача сведётся к почленному интегрированию.

г) Подстановка $\operatorname{tg} x = t$ или $\operatorname{ctg} x = u$ приводит также к простому интегрированию, если $k = -1$, иначе, если $m+n = 0$:

$$\int \sin^m x \cos^{-m} x\, dx = \int \operatorname{tg}^m x\, dx = \int \frac{t^m\, dt}{1+t^2};$$

$$\int \sin^{-n} x \cos^n x\, dx = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^n x} dx = \int \operatorname{ctg}^n x\, dx = -\int \frac{u^n\, du}{1+u^2}.$$

Выделяя в подинтегральных дробях целые части, мы сведём задачу к простым интегралам.

д) Подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ даёт:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = 2^{m+1} \int t^m (1+t^2)^{-m-n-1} (1-t^2)^n\, dt.$$

Простой случай интегрирования получим при $n = 0$ и m отрицательном или при n положительном и $m = -(n+1)$:

$$m = -p, \quad n = 0, \quad \int \frac{dx}{\sin^p x} = \frac{1}{2^{p-1}} \int t^{-p} (1+t^2)^{p-1}\, dt;$$

$$m = -(n+1), \quad \int \frac{\cos^n x}{\sin^{n+1} x} dx = \frac{1}{2^n} \int t^{-(n+1)} (1-t^2)^n\, dt.$$

Так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, имеем также

$$\int \frac{dx}{\cos^p x} = \frac{1}{2^{p-1}} \int t^{-p} (1+t^2)^{p-1}\, dt, \quad \text{где } t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^{n+1} x} dx = \frac{(-1)^n}{2^n} \int t^{-(n+1)} (1-t^2)^n\, dt, \quad \text{где } t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

§ 5. Формулы приведения для интеграла $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$.

Интегрированием по частям можно установить формулы приведения для сведения интеграла (5)

$$J_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

к интегралам с меньшими по абсолютной величине показателями. Полагая $\sin^{m-1} x = u$, $\cos^n x \sin x\, dx = dv$ и, следовательно, $v = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$, получим

$$J_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx. \qquad (6)$$

Точно так же, полагая $\cos^{n-1} x = u$, $\sin^m x \cos x\, dx = dv$ и, следовательно, $v = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$, будем иметь

$$J_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx. \qquad (7)$$

Так как

$$\cos^{n+2} x = \cos^n x (1 - \sin^2 x), \quad \text{а} \quad \sin^{m+2} x = \sin^m x (1 - \cos^2 x),$$

то

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx = J_{m-2,n} - J_{m,n},$$

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx = J_{m,n-2} - J_{m,n}.$$

Таким образом из равенств (6) и (7), решая их относительно $J_{m,n}$, получим формулы приведения, понижающие один из показателей на 2:

$$J_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,n}, \qquad (8)$$

$$J_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} J_{m,n-2}. \qquad (9)$$

Если в формуле (8) заменить m на $m+2$, а в формуле (9) n на $n+2$, получим, с одной стороны, соотношение между $J_{m+2,n}$ и $J_{m,n}$, с другой — соотношение между $J_{m,n+2}$ и $J_{m,n}$, а определяя из них $J_{m,n}$, получим формулы приведения, повышающие на 2 один из показателей:

$$J_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} J_{m+2,n}, \qquad (10)$$

$$J_{m,n} = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} J_{m,n+2}. \qquad (11)$$

Формулы (8) и (9) применяются для понижения положительных показателей, а формулы (10) и (11) — для понижения абсолютной величины отрицательных показателей. В случае целых m и n повторное применение этих формул приводит интеграл $J_{m,n}$ к одному из следующих простейших интегралов, для которых m и n имеют одно из значений -1, 0, 1:

$$J_{0,0}=\int dx; \qquad J_{0,1}=\int \cos x\,dx; \qquad J_{0,-1}=\int \frac{dx}{\cos x};$$

$$J_{1,0}=\int \sin x\,dx; \qquad J_{1,1}=\int \sin x\cos x\,dx; \qquad J_{1,-1}=\int \operatorname{tg} x\,dx;$$

$$J_{-1,0}=\int \frac{dx}{\sin x}; \qquad J_{-1,1}=\int \operatorname{ctg} x\,dx; \qquad J_{-1,-1}=\int \frac{dx}{\sin x\cos x}.$$

Эти простейшие интегралы находятся или по основным формулам или с помощью одной из рассмотренных в § 4 подстановок.

Если показатели m и n — противоположных знаков, то лучше применять соответственно формулы (6) или (7), которые в этом случае понижают абсолютную величину обоих показателей.

Пример 1. $J_{4,0}=\int \sin^4 x\,dx$. По формуле (8) имеем:

$$J_{4,0}=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{4}J_{2,0}; \qquad J_{2,0}=-\frac{\sin x\cos x}{2}+\frac{1}{2}J_{0,0}.$$

Следовательно,

$$J_{4,0}=-\frac{\sin^3 x\cos x}{4}+\frac{3}{8}(x-\sin x\cos x)+C.$$

Пример 2. $J_{2,-2}=\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int \sin^2 x\cos^{-2} x\,dx$. По формуле (6) имеем:

$$J_{2,-2}=\frac{\sin x}{\cos x}-\int dx \quad \text{или} \quad \int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\operatorname{tg} x-x+C.$$

Можно применить также подстановку $\operatorname{tg} x=t$ (§ 4, г):

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int \frac{t^2\,dt}{1+t^2}=\int \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt=\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=$$

$$=t-\operatorname{arctg} t+C;$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\operatorname{tg} x-x+C.$$

§ 6. Разложение степеней $\sin^n x$ и $\cos^m x$ по синусам и косинусам кратных дуг.

Предположим, что m и n суть целые числа. При интегрировании тригонометрических функций можно воспользоваться также разложением степеней синуса и косинуса по синусам или косинусам кратных дуг. Как мы видели, исходя из формулы Эйлера (стр. 38), $\sin x$

и $\cos x$ можно выразить через показательную функцию:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \qquad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}.$$

Следовательно,

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin^n x = (e^{xi} - e^{-xi})^n, \quad 2^n \cos^n x = (e^{xi} + e^{-xi})^n,$$

или

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin^n x = e^{nxi} - ne^{(n-2)xi} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} e^{(n-4)xi} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n e^{-nxi},$$

$$2^n \cos^n x = e^{nxi} + ne^{(n-2)xi} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} e^{(n-4)xi} + \ldots + e^{-nxi}.$$

Заменяя показательные функции тригонометрическими, т. е. полагая

$$e^{kxi} = \cos kx + i \sin kx,$$

где $k = n, n-2, n-4, \ldots$, получим:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin^n x =$$
$$= \cos nx - n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x - \ldots + (-1)^n \cos nx +$$
$$+ i\left[\sin nx - n\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin(n-4)x - \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n+1}\sin nx\right]; \quad (12)$$

$$2^n \cos^n x =$$
$$= \cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x + \ldots + \cos nx +$$
$$+ i\left[\sin nx + n\sin(n-2)x + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin(n-4)x + \ldots - \sin nx\right]. \quad (13)$$

В равенстве (12) левая часть будет действительной, если n — число чётное, и чисто мнимой при n нечётном, ибо в последнем случае

$$(-1)^{\frac{n}{2}} = i(-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

где $n-1$ есть число чётное. В равенстве (13) левая часть как при чётном, так и нечётном n — число действительное. Следовательно,

а) при $n=2k$, где $k=1, 2, \ldots$, имеем:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin^n x = \cos nx - n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x - \ldots + \cos nx; \quad (14)$$

б) при $n=2k+1$, где $k=1, 2, \ldots$:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^n \sin^n x = \sin nx - n\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin(n-4)x - \ldots + \sin nx; \quad (15)$$

в) при $n=1, 2, 3, \ldots$:

$$2^n \cos^n x = \cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-4)x + \ldots + \cos nx. \quad (16)$$

Пример. $J=\int \sin^4 x\,dx$. По формуле (14) имеем:

$$2^4 \sin^4 x = \cos 4x - 4\cos 2x + 6 - 4\cos 2x + \cos 4x,$$

откуда

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8};$$

следовательно,

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int \cos 4x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{3}{8}\int dx = \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3x}{8} + C.$$

(Ср. пример 1 § 5.)

§ 7. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

Интегрируем каждый из этих интегралов по частям, относя показательную функцию к дифференциалу:

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a}\int \cos bx\,de^{ax} = \frac{e^{ax}\cos bx}{a} + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx;$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}\int \sin bx\,de^{ax} = \frac{e^{ax}\sin bx}{a} - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

Таким образом мы получаем два уравнения, в которые искомые интегралы входят как неизвестные:

$$aJ_1 = e^{ax}\cos bx + bJ_2, \quad aJ_2 = e^{ax}\sin bx - bJ_1,$$

где J_1 — первый из рассматриваемых интегралов, а J_2 — второй. Решая эти уравнения и прибавляя в каждом решении произвольное постоянное, получим:

$$J_1 = \int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C,$$

$$J_2 = \int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Тот же результат можно получить следующим образом. Составим сумму интегралов $J_1 + iJ_2$, где $i = \sqrt{-1}$. По формуле Эйлера $\cos bx + i \sin bx = e^{bxi}$, и потому сумма $J_1 + iJ_2$ сводится к интегралу показательной функции:

$$J_1 + iJ_2 = \int e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)\, dx = \int e^{(a+bi)x}\, dx.$$

Интегрируя, находим:

$$J_1 + iJ_2 = \frac{1}{a + ib} e^{(a+ib)x} + C.$$

Преобразовывая полученное выражение в целях отделения действительной и мнимой частей и представляя произвольное постоянное в виде $C_1 + iC_2$, получим:

$$J_1 + iJ_2 = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) + C_1 + iC_2,$$

откуда

$$J_1 = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C_1,$$

$$J_2 = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C_2.$$

§ 8. Интегралы вида $\int x^n e^{ax} \cos bx\, dx$, $\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx$.

Приём, применённый в конце предыдущего параграфа, даёт возможность свести интегралы функций $x^n e^{ax} \cos bx$ и $x^n e^{ax} \sin bx$ к интегралу вида, рассмотренного в § 2. Действительно, составляя сумму $J_1 + iJ_2$, где J_1 — первый, а J_2 — второй интеграл, будем иметь

$$J_1 + iJ_2 = \int x^n e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)\, dx = \int x^n e^{(a+bi)x}\, dx.$$

Интегрированием по частям, относя показательную функцию к дифференциалу, можно постепенно понижать степень алгебраического множителя (§ 2). Таким образом получим в конечном виде выражение для $J_1 + iJ_2$, а отделяя в этом выражении действительную и мнимую части, найдём и интегралы J_1, J_2.

Пример 1. $J_1 = \int xe^x \cos x\,dx$.

Составляем сумму $J_1 + iJ_2$, где $J_2 = \int xe^x \sin x\,dx$:

$$J_1 + iJ_2 = \int xe^{(1+i)x}dx = \frac{1}{1+i}\int x\,de^{(1+i)x}.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$J_1 + iJ_2 = \frac{xe^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{1}{1+i}\int e^{(1+i)x}dx =$$

$$= \frac{xe^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^2}e^{(1+i)x} + C_1 + iC_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(1-i)\,xe^x(\cos x + i\sin x) + \frac{i}{2}e^x(\cos x + i\sin x) + C_1 + iC_2 =$$

$$= \frac{e^x}{2}\{x\cos x - (1-x)\sin x + i[(1-x)\cos x + x\sin x]\} + C_1 + iC_2,$$

откуда

$$J_1 = \int xe^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}[x\cos x - (1-x)\sin x] + C_1,$$

$$J_2 = \int xe^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}[(1-x)\cos x + x\sin x] + C_2.$$

К рассмотренным выше интегралам можно свести и интегрирование многочлена

$$E(x,\ e^{ax},\ \sin bx,\ \sin b_1x,\ \ldots,\ \cos cx,\ \cos c_1x,\ \ldots),$$

расположенного по степеням x, e^{ax}, $\sin bx$, ..., $\cos cx$, ... Действительно, после замены степеней синусов и косинусов суммами синусов или косинусов кратных дуг по формулам (14), (15), (16) этот многочлен будет состоять из членов вида

$$x^m e^{nax}\sin\alpha x\sin\beta x\ \ldots\ \cos\gamma x\cos\delta x\ \ldots$$

Но произведения синусов и косинусов можно заменить суммами или разностями синусов или косинусов соответствующих дуг (т. I, стр. 228). Следовательно, рассматриваемый многочлен сводится к сумме слагаемых вида

$$x^m e^{nax},\quad x^m e^{nax}\sin px,\quad x^m e^{nax}\cos px,$$

которые интегрируются указанными выше способами.

Пример 2. $J = \int (x + e^x\cos x)^2\,dx$.

Имеем:

$$(x + e^x\cos x)^2 = x^2 + 2xe^x\cos x + e^{2x}\cos^2 x,$$

Но $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$. Следовательно,

$$J = \int \left(x^2 + 2xe^x \cos x + \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + e^x [x \cos x - (1-x) \sin x] + \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{8} e^{2x} (\cos 2x + \sin 2x) + C.$$

К интегралам этого типа можно свести интегралы вида

а) $\int E(x, \ln x)\, dx$, б) $\int E(x, \arcsin x)\, dx$, в) $\int E(x, \arccos x)\, dx$

соответственно подстановкой

а) $\ln x = t$, б) $\arcsin x = t$, в) $\arccos x = t$.

После преобразования будем иметь:

а) $\int E(e^t, t) e^t\, dt$, б) $\int E(\sin t, t) \cos t\, dt$,

в) $-\int E(\cos t, t) \sin t\, dt$.

§ 9. Некоторые замечательные определённые интегралы.

Формулы приведения (8) и (9) для определённых интегралов в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$ принимают следующий вид:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{m-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx, \tag{17}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx, \tag{18}$$

ибо

$$\left[-\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \text{и} \quad \left[\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

(за исключением случаев $m = 1$, $n \neq -1$ или $m \neq 1$, $n = -1$ для первого интеграла и $m = -1$, $n \neq 1$ или $m \neq -1$, $n = 1$ — для второго). Отсюда, в частности, положив в первом случае $n = 0$, а во втором $m = 0$, получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\, dx, \tag{19}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x\, dx \tag{20}$$

(предполагая в первом случае $m \neq 1$, а во втором $n \neq 1$). Повторное применение этих формул приведения, понижающих показатель степени на 2, приводит, смотря по тому, будут ли числа m и n чётными или нечётными, к интегралам

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 1.$$

Интегралы (19) и (20) при одинаковых показателях ($m = n$) равны между собой. Таким образом для чётного положительного показателя $2n$ или нечётного $2n+1$ [вместо m и n формул (19) и (20)] будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{\pi}{2}, \tag{21}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}. \tag{22}$$

1. Формула Валлиса. Вычисленные определённые интегралы дают возможность представить отношение окружности к диаметру, т. е. число π, в виде бесконечного произведения. Действительно, в пределах интегрирования $\sin x$ — положительное число, меньшее единицы. Следовательно,

$$\sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x,$$

откуда

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx.$$

Заменяя интегралы их значениями по формулам (21) и (22), получим следующие неравенства:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)} > \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{\pi}{2} > \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}, \tag{23}$$

откуда

$$\left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n} > \frac{\pi}{2} > \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}. \tag{24}$$

Обозначая ради краткости выражение $\left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n}$ через $\frac{a_n}{2}$, будем иметь:

$$a_n > \pi > a_n \cdot \frac{2n}{2n+1} \quad \text{или} \quad 1 > \frac{\pi}{a_n} > \frac{2n}{2n+1}.$$

Переходя к пределу в предположении, что n безгранично увеличивается, получим:

$$\lim \frac{\pi}{a_n} = 1,$$

откуда вытекает так называемая формула Валлиса:

$$\pi = \lim a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n}. \tag{25}$$

То же соотношение можно представить в виде предела произведения, число множителей которого безгранично растёт, иначе — в виде бесконечного произведения:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1} \tag{26}$$

или

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots{}^{1}). \tag{26'}$$

Из формулы Валлиса (25) следует:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\pi}. \tag{27}$$

С помощью этого выражения из интегралов (21) и (22) получаются следующие пределы, которыми мы воспользуемся при вычислении интеграла Пуассона:

$$\lim \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\sqrt{n}\right]\frac{\pi}{2},$$

или

$$\lim \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \tag{28}$$

далее,

$$\lim \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\frac{n}{2n+1},$$

или

$$\lim \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{29}$$

---

[1]) Формулу (26') обыкновенно и называют формулой Валлиса.

2. Интеграл Пуассона. Интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ имеет большое значение в теории вероятностей. Для его вычисления нельзя воспользоваться основным предложением интегрального исчисления (т. I, стр. 354), так как соответствующая первообразная функция представляет высшую трансцендентную, не выражаемую с помощью элементарных функций в конечном виде.

Рассмотрим предварительно следующую функцию:

$$u = (1 + t)\,e^{-t}.$$

Как следует из выражения её производной $u' = -te^{-t}$, функция u при отрицательных значениях t возрастает, достигая своего наибольшего значения, равного 1, при $t = 0$, а при положительных убывает. Следовательно,

$$(1 + t)\,e^{-t} < 1 \quad (\text{при } t \neq 0).$$

Подставляя $-x^2$ или $+x^2$ вместо t, получим следующие два неравенства:

$$(1 - x^2)\,e^{x^2} < 1 \text{ или } 1 - x^2 < e^{-x^2},$$

$$(1 + x^2)\,e^{-x^2} < 1 \text{ или } e^{-x^2} < \frac{1}{1 + x^2}.$$

По возведении в n-ную степень и умножении на $\sqrt{n}$ обеих частей этих неравенств будем иметь:

$$\sqrt{n}(1 - x^2)^n < \sqrt{n}\,e^{-nx^2} < \frac{\sqrt{n}}{(1 + x^2)^n}. \tag{30}$$

Интеграл от 0 до 1 первого члена этих неравенств меньше интеграла от 0 до 1 и тем более интеграла от 0 до ∞ второго члена, а этот последний интеграл меньше интеграла от 0 до ∞ последнего члена:

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx < \int_0^1 e^{-nx^2}\,d(x\sqrt{n}) < \int_0^\infty e^{-nx^2}\,d(x\sqrt{n}) <$$

$$< \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$$

Но

$$\int_0^\infty e^{-nx^2}\,d(x\sqrt{n}) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Таким образом интеграл Пуассона, взятый в пределах от 0 до ∞, заключён между двумя величинами, зависящими от произвольного

целого числа n:

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx < \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \sqrt{n}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Полагая в первом из этих интегралов $x=\sin z$, а в последнем $x=\operatorname{tg} z$, будем иметь:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} z\,dz, \tag{31}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} z\,dz. \tag{32}$$

Следовательно,

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} z\,dz < \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-2}}\sqrt{n-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} z\,dz.$$

Эти неравенства имеют место при всяком положительном и целом n. Пусть число n безгранично возрастает. На основании равенств (28) и (29) будем иметь в пределе:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ т. е. } \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{33}$$

Так как функция e^{-x^2} — чётная и потому

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{34}$$

3. Представление произведения $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n$ в виде определённого интеграла. Вычислим определённый интеграл

$$J = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx, \tag{35}$$

применяя правило интегрирования по частям, причём трансцендентный множитель отнесём к дифференциалу:

$u = x^n$, $dv = e^{-x}\,dx$ и, следовательно, $v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$;

$$J = -[x^n e^{-x}]_0^{\infty} + n\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx. \tag{36}$$

Произведение $x^n e^{-x}$ при $x = 0$ обращается в нуль, то же произведение имеет пределом нуль и при $x = \infty$. Действительно, при $x > 0$

$$e^x - 1 > 0 \text{ и } \int_0^x (e^x - 1)\,dx > 0, \text{ откуда } e^x > \frac{x}{1}.$$

Точно так же имеем

$$\int_0^x \left(e^x - \frac{x}{1}\right)dx > 0, \text{ откуда } e^x - \frac{x^2}{1\cdot 2} > 0,$$

$$\int_0^x \left(e^x - \frac{x^2}{1\cdot 2}\right)dx > 0, \text{ откуда } e^x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} > 0,$$

и т. д. После m интегрирований получим

$$e^x - \frac{x^m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} > 0 \text{ или } e^x > \frac{x^m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}.$$

Исходя из этого неравенства, будем иметь:

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x^{m-n}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} \text{ или } 0 < x^n e^{-x} < \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}{x^{m-n}}.$$

Полагая $m > n$ и переходя к пределу в предположении, что x безгранично увеличивается, получим

$$0 \leqslant \lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} \leqslant 0 \text{ или } \lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

Итак, принимая во внимание этот результат, из равенства (36) имеем

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx. \tag{36'}$$

Таким образом мы получили формулу приведения для данного интеграла: интеграл в правой части — того же типа, только показатель

степени x на единицу меньше показателя в данном интеграле. Если n — число целое, то, применяя формулу (36′) n раз, получим:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \tag{37}$$

УПРАЖНЕНИЯ.

I. Интегрирование функций с трансцендентным множителем.

1. $3\int x^2 \ln x\,dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$

2. $\int \arcsin x\,dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

3. $\int (2x+2) \operatorname{arctg} x\,dx = (x+1)^2 \operatorname{arctg} x - x - \ln(1+x^2) + C.$

4. $\int \frac{\ln x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{x}{1+x} \ln x - \ln(1+x) + C.$

5. $\int (x^2 - x + 1)\, e^x\,dx = e^x (x^2 - 3x + 4) + C.$

6. $\int (x^2+1) \sin x\,dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + \cos x + C.$

7. $\int (x+1)^2 \cos x\,dx = (x^2 + 2x - 1) \sin x + 2(x+1) \cos x + C.$

8. Если $E(x)$ — многочлен степени n, то

$$\int E(x)\, e^{-x}\,dx = -e^{-x}\left[E(x) + E'(x) + E''(x) + \ldots + E^{(n)}(x)\right].$$

II. Интегрирование выражений, зависящих рационально от показательной функции.

1. $\int \frac{e^x\,dx}{(e^x+1)^2} = -\frac{1}{1+e^x} + C.$

2. $\int \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^2} = -\frac{1}{2(1+e^{2x})} + C.$

3. $\int (e^{3x} - 4e^{2x} + e^x - 1)\,dx = \frac{1}{3} e^{3x} - 2e^{2x} + e^x - x + C.$

III. Тригонометрические функции.

а) Интегрирование подстановкой.

1. $\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sin x\,(1+\cos x)} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

2. $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

3. $\int \sin^5 x\,dx = -\left(\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x\right) + C.$

4. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + C.$

5. $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$

6. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$

7. $\int (\operatorname{tg}^3 x - 8\operatorname{tg}^2 x + 5\operatorname{tg} x - 7)\frac{dx}{\cos^2 x}.$

8. $\int (\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3)\,dx = \operatorname{tg} x + 2\ln|\cos x| + 2x + C.$

б) Интегрирование с помощью формул приведения.

9. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C.$

10. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x}\right) + C.$

11. $\int \sin^4 x\,dx = -\frac{\sin x \cos x}{4}\left(\sin^2 x + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{8}x + C.$

в) Интегрирование с помощью разложения степеней синуса и косинуса по синусам и косинусам кратных дуг.

12. $\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx = -\frac{1}{8}\left(\cos x + \frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{10}\cos 5x\right) + C.$

13. $\int \cos^6 x\,dx = 2^{-6}\left(\frac{1}{3}\sin 6x + 3\sin 4x + 15\sin 2x + 20x\right) + C.$

IV. Применение формулы Эйлера.

1. $\int xe^{2x}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{2x}}{8}\left(2x - 1 + x\cos 2x + x\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$

V. Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических.

1. $J = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C;\ x = a\cos t,\ J = -\frac{\operatorname{tg} t}{a^2} + C.$

2. $J = \int \frac{dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C;\ x = a\sin t,\ J = \frac{\operatorname{tg} t}{a^2} + C.$

3. $J = \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;\quad x = a\sin t,$

$$J = \frac{a^2}{2}(\sin t\cos t + t) + C.$$

4. $J=\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+x^2}\,(x^2-2a^2)+C;\ x=a\operatorname{tg} t,$

$$J=a^3\int \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t}\,dt.$$

VI. Интегралы вида $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$ или приводимые к этому виду.

1. $\int \frac{dx}{x\ln x}$.
2. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.
3. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.
4. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.
6. $\int \frac{\sin x\,dx}{a+b\cos x}$.

VII. Вычисление определённых интегралов.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$.

2. Построить графики функций $y=xe^{-x}$, $y=x^2e^{-x}$, $y=x^3e^{-x}$, ... и вычислить площади, ограниченные этими кривыми и осью абсцисс в интервале от 0 до ∞.

ГЛАВА IV.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ.

§ 1. Функции нескольких переменных.

Пусть несколько переменных величин u, x, y, z, ... меняются так, что каждой рассматриваемой системе значений переменных x, y, z, ... соответствует одно или несколько значений u. В таком случае u будет функцией переменных x, y, z, ..., и мы будем записывать это следующим образом:

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

где f есть знак установленной или данной функциональной зависимости рассматриваемых переменных. Функция u будет однозначной или многозначной, смотря по тому, сколько значений её соответствует каждой рассматриваемой системе значений независимых переменных x, y, z, ... Так, функция

$$u = x + y + z$$

— однозначная, а функция

$$u = \pm\sqrt{x+y+z}$$

— многозначная, именно двузначная.

Функции нескольких переменных, так же как и функции одной переменной, разделяют на алгебраические и трансцендентные, а алгебраические разделяют на рациональные и иррациональные. Если функциональная зависимость переменных x, y, z, ... и u определяется уравнением

$$F(x, y, z, \ldots, u) = 0,$$

то одно из переменных, связанных этим уравнением, например u, называют *неявною* функцией остальных переменных x, y, z, ...

Функцию $F(u, v, \ldots)$, зависящую от нескольких аргументов u, v, ..., из которых каждый в свою очередь является функцией независимых переменных x, y, ..., называют *сложною*; функция от функции, рассмотренная в т. I (стр. 360), является частным случаем сложной функции, а именно, сложной функцией, зависящей от

одного аргумента, который в свою очередь зависит от одного независимого переменного.

Функцию двух независимых переменных

$$z = f(x, y)$$

геометрически можно интерпретировать как аппликату точки, абсциссой и ординатой которой служат независимые переменные x и y; при всевозможных изменениях x и y конец аппликаты, если функция непрерывна, описывает поверхность (т. I, стр. 181—183). Пусть $A_1(x, y)$ — точка в плоскости xOy, A_1A — соответствующая аппликата, т. е. $A_1A = f(x, y)$; принято говорить, что $f(x, y)$ есть значение функции в точке $A_1(x, y)$; короче — в точке (x, y). Понятие «точки», как совокупности значений независимых переменных, можно распространить и на большее число независимых переменных; так, если даны функции

$$u = f(x, y, z), \quad v = F(x, y, z, t),$$

то можно говорить: u есть значение первой функции в точке (x, y, z), а v — значение второй функции в точке (x, y, z, t). В первом случае можно действительно иллюстрировать точку (x, y, z) точкою пространства с координатами x, y, z относительно (какой-либо) данной системы координат; во втором случае такой иллюстрации, апеллирующей к нашему представлению, дать нельзя, но абстрактно можно всё-таки говорить, что (x, y, z, t) есть точка четырёхмерного пространства, понимая четырёхмерное пространство чисто математически, как всю совокупность четвёрок (x, y, z, t), состоящих из всевозможных значений независимых переменных x, y, z и t.

Если последовательность точек

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots), \ldots, (x_n, y_n, \ldots), \ldots$$

такова, что существуют пределы $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, ..., то мы будем говорить, что эта последовательность *стремится* к точке $(x, y, \ldots)$, или точка $(x, y, \ldots)$ есть *предел* этой последовательности, и писать:

$$(x, y, \ldots) = \lim_{n \to \infty} (x_n, y_n, \ldots).$$

На изменение независимых переменных может быть наложено то или иное ограничение или по самому смыслу определения рассматриваемой функции или ради целей исследования. Так, если имеются в виду лишь действительные значения функции

$$u = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)},$$

то изменение независимых переменных x и y ограничено неравенством

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2.$$

Совокупность всех тех значений, которые могут принимать независимые переменные, составляет область их изменения: точка $(x, y, \ldots)$ при изменениях $x, y, \ldots$ перемещается в этой области. Так, в предыдущем примере область изменения x и y ограничена окружностью $x^2+y^2=r^2$. Если независимые переменные меняются каждая в каком-либо интервале

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2, \ \ldots,$$

то область изменения будет прямоугольной: в этом случае при двух независимых переменных точка (x, y) занимает любое положение внутри прямоугольника, в случае трёх — точка (x, y, z) перемещается внутри параллелепипеда.

Точку $(x, y, \ldots)$ называют *предельной точкой* области D, если она является пределом какой-либо последовательности точек, принадлежащих этой области и отличных от самой точки $(x, y, \ldots)$. Предельная точка области может, вообще говоря, и не принадлежать этой области. Так, область изменения переменных x, y, определяемая неравенством $x^2+y^2<r^2$, есть внутренность круга радиуса r с центром в начале координат; очевидно, каждая точка периферии этого круга, т. е. окружности $x^2+y^2=r^2$, является предельной для внутренности круга, не содержась, однако, сама внутри круга.

Область D называют *замкнутой*, если она содержит все свои предельные точки. Так, присоединив к рассмотренному («открытому») кругу $x^2+y^2<r^2$ все точки его периферии, мы получим, очевидно, замкнутую область — замкнутый круг $x^2+y^2\leqslant r^2$.

Мы будем в случае двух независимых переменных рассматривать обычно функции, заданные в областях, ограниченных контурами, не имеющими самопересечений (например, окружностями, периметрами прямоугольников и т. п.). В зависимости от того, будем ли мы считать контур принадлежащим или не принадлежащим области, эта область будет замкнутой или незамкнутой.

Область называют *ограниченной*, если координаты всех точек этой области равномерно ограничены по абсолютной величине, т. е. существует такое число M, что

$$|x|<M, \quad |y|<M, \ \ldots$$

для всех точек рассматриваемой области. Так, круг $x^2+y^2\leqslant r^2$ есть ограниченная область; полуплоскость же $x\geqslant 0$ есть область неограниченная.

§ 2. Непрерывность функций нескольких переменных.

Пусть независимые переменные $x, y, z, \ldots$, изменяясь по какому угодно закону, стремятся к определённым пределам:

$$\lim x=a, \quad \lim y=b, \quad \lim z=c, \ \ldots,$$

т. е. точка $(x, y, z, \ldots)$ по любому закону стремится к точке

$(a, b, c, \ldots)$. Если при этом значение функции стремится также к определённому пределу, равному значению этой функции при $x=a$, $y=b$, $z=c$, ...:

$$\lim f(x, y, z, \ldots) = f(\lim x, \lim y, \lim z, \ldots), \qquad (1)$$

то функцию называют *непрерывной* в точке $(a, b, c, \ldots)$.

Как следует из понятия предела, можно указать для изменения независимых переменных достаточно малую область около точки $(a, b, \ldots)$, чтобы внутри этой области переменное значение функции сколь угодно мало отличалось от своего предела:

$$|f(x, y, \ldots) - f(a, b, \ldots)| < \varepsilon \text{ при } |x-a| < \delta_1, |y-b| < \delta_2, \ldots \qquad (2)$$

Здесь ε — данное наперёд положительное число (сколь угодно малое), а $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — достаточно малые положительные числа, ограничивающие область изменения независимых переменных.

Функцию, непрерывную в каждой точке какой-либо области, называют непрерывной в этой области.

Из предыдущего определения непрерывности следует, что функция $f(x, y, \ldots)$, *непрерывная относительно совокупности своих аргументов, непрерывна и относительно каждого аргумента в отдельности.* Например, если функция $f(x, y, z, \ldots)$ непрерывна в области P, то непрерывна и функция $\varphi_1(x) = f(x, y_1, z_1, \ldots)$, где $y_1, z_1, \ldots$ — постоянные, которые вместе с переменным x принадлежат к области P. Действительно, пусть x_0 — какое-либо значение x, при котором $(x_0, y_1, z_1, \ldots)$ принадлежит области P; тогда при

$$\lim x = x_0, \ \lim y = y_1, \ \lim z = z_1, \ \ldots$$

будем иметь

$$\lim f(x, y\ z, \ldots) = f(x_0, y_1, z_1, \ldots).$$

Но переменные $x, y, z, \ldots$ могут стремиться к своим пределам по какому угодно закону, в частности y может сохранять постоянное значение y_1, z постоянное значение z_1 и т. д., что даст нам переход к пределу функции $\varphi_1(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi_1(x) = \lim f(x, y_1, z_1, \ldots) = f(x_0, y_1, z_1, \ldots) = \varphi_1(\lim x).$$

Но обратное заключение было бы неправильным: функция $f(x, y, z, \ldots)$, непрерывная относительно каждого аргумента в отдельности, не всегда непрерывна относительно совокупности всех аргументов.

Пример. Функция

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

определена в каждой точке плоскости, кроме точки (0, 0), ибо непосредственная подстановка $x=0$ и $y=0$ приводит к не имеющему арифметиче-

ского смысла действию — делению 0 на 0. Если для этой точки (0, 0) по дополнительному определению положим

$$f(0,\ 0) = 0,$$

то функция $f(x, y)$, теперь определённая всюду, будет испытывать разрыв в точке (0, 0), принимая в пределе, при различных подходах к этой точке, любое значение, заключённое между —1 и +1. Изменяя, например, x и y так, чтобы $y = kx$, где k — какое-либо постоянное, будем иметь

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to 0}} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2} \neq 0 \text{ (если } k \neq 0).$$

Но функция

$$\varphi_1(x) = \frac{2xy_1}{x^2 + y_1^2},$$

где y_1 — какое-либо постоянное, непрерывна всюду, ибо, если $y_1 \neq 0$, знаменатель не равен нулю; а если $y_1 = 0$, $\varphi_1(x)$ сохраняет постоянное значение, равное нулю. Следовательно, всегда

$$\lim_{x\to 0} \varphi_1(x) = 0.$$

Точно так же и функция $\varphi_2(y) = \dfrac{2x_1y}{x_1^2 + y^2}$, где x_1 — постоянная величина, непрерывна в точке $y = 0$.

Из теорем о пределах (т. I, стр. 253—255) следует, что сумма и произведение непрерывных функций суть непрерывные функции, а частное двух непрерывных функций будет непрерывной функцией в тех точках, в которых делитель не обращается в нуль (т. е. где это частное вообще существует).

Теорема 1. *Если* $u = f_1(x, y, \ldots)$, $v = f_2(x, y, \ldots)$, ..., — *непрерывные функции в области* P, *а* $F(u, v, \ldots)$ — *непрерывная функция в соответствующей области изменения аргументов* u, v, ..., *то сложная функция* $F(f_1(x, y, \ldots), f_2(x, y, \ldots), \ldots)$ — *также непрерывная функция независимых переменных* x, y, ... *в области* P.

Доказательство. Действительно, по условию имеем:

$$\lim F(u,\ v, \ldots) = F(\lim u,\ \lim v, \ldots)$$

и

$$\lim u = f_1(\lim x,\ \lim y, \ldots),\quad \lim v = f_2(\lim x,\ \lim y, \ldots), \ldots$$

Следовательно,

$$\lim F(f_1(x,\ y, \ldots),\quad f_2(x,\ y, \ldots), \ldots) =$$
$$= F(f_1(\lim x,\ \lim y, \ldots),\quad f_2(\lim x,\ \lim y, \ldots), \ldots),$$

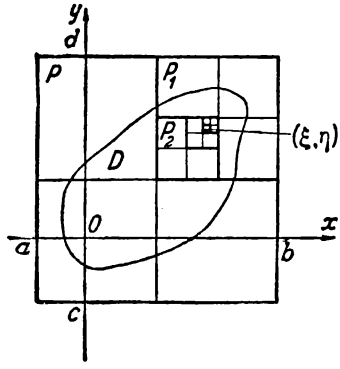
что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Функция $f(x, y, \ldots)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D, ограничена в этой области, т. е. существует такое положительное число N, что*

$$|f(x, y, \ldots)| < N$$

для всех точек $(x, y, \ldots)$ области D.

Доказательство может быть проведено в полной аналогии с доказательством соответствующей теоремы о функциях одного переменного (§ 11 главы II первой части). Мы проведём его для функций двух переменных. По условию, область D, в которой рассматривается функция $f(x, y)$, ограничена, т. е. содержится в некотором прямоугольнике



Черт. 22.

$$P(a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d)$$

(черт. 22). Пусть, в противоречие с утверждением теоремы, $f(x, y)$ не ограничена в области D. Разобьём тогда прямоугольник P на четыре равных прямоугольника (черт. 22). По крайней мере в одном из этих прямоугольников (т. е. в части области D, заключённой в этом прямоугольнике) функция $f(x, y)$ не ограничена. Пусть это будет прямоугольник

$$P_1(a_1 \leqslant x \leqslant b_1, \quad c_1 \leqslant y \leqslant d_1);$$

здесь одно из чисел a_1, b_1 совпадает с одним из чисел a и b, а другое равно $\frac{a+b}{2}$, и аналогично для чисел c_1, d_1. С прямоугольником P_1 поступим так же, как и с первым. Получим новый прямоугольник

$$P_2(a_2 \leqslant x \leqslant b_2, \quad c_2 \leqslant y \leqslant d_2),$$

совпадающий с одной из четвертей прямоугольника P_1 и такой, что в нём $f(x, y)$ должна быть не ограничена.

Продолжая этот процесс, получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга прямоугольников $P_n(a_n \leqslant x \leqslant b_n, \; c_n \leqslant y \leqslant d_n)$:

$$a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots, \quad b \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots,$$

причем

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

так что a_n и b_n сходятся к некоторому (одному и тому же) пределу ξ, и аналогично c_n и d_n сходятся к некоторому пределу η.

Выберем в каждом из прямоугольников P_n по точке (x_n, y_n), принадлежащей к области D. Эти точки (x_n, y_n) образуют, очевидно, последовательность, сходящуюся к точке (ξ, η), и так как область D, по условию,— замкнутая, то и (ξ, η) будет принадлежать к D. Таким образом, в точке (ξ, η), к которой стягиваются прямоугольники P_n, функция $f(x, y)$ определена. Тогда в силу непрерывности функции $f(x, y)$ существует такой квадрат

$$C(\xi - \delta < x < \xi + \delta, \quad \eta - \delta < y < \eta + \delta),$$

что для всех точек (x, y) этого квадрата, принадлежащих области D, выполняется неравенство

$$f(\xi, \eta) - \varepsilon < f(x, y) < f(\xi, \eta) + \varepsilon.$$

Отсюда, в частности, следует, что функция ограничена в квадрате C. Но в этом квадрате, очевидно, содержатся прямоугольники P_n для всех достаточно больших n, а в каждом таком прямоугольнике, по самому его построению, функция $f(x)$ должна быть не ограничена. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Всякая ограниченная функция обладает точными верхней и нижней границами, т. е. числами M и m такими, что замкнутый интервал (m, M) заключает все значения функции, но ни один из интервалов $(m, M-\varepsilon)$ и $(m+\varepsilon, M)$, где ε — сколь угодно малое положительное число, — этим свойством уже не обладает. Доказательство существования верхней и нижней границ для ограниченной функции было дано в первом томе (стр. 279 и сл.), причём в нём не играло никакой роли, зависит ли функция от одного или же нескольких аргументов.

Теорема 3. *Функция $f(x, y, \ldots)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области D, имеет в ней наибольшее и наименьшее значения, т. е. достигает в этой области своих точных верхней и нижней границ.*

Доказательство. Пусть M — точная верхняя, а m — точная нижняя границы данной функции. Докажем, что есть по крайней мере одна точка $(x_0, y_0, \ldots)$, в которой $f(x_0, y_0, \ldots) = M$. Доказательство для минимума совершенно аналогично.

Пусть, в противоречие с нашим утверждением, $f(x, y, \ldots)$ нигде в области D не достигает значения M. Так как $1 = \text{const}$ и $M - f(x, y, \ldots)$ суть функции непрерывные, причём последняя, по предположению, не обращается в нуль, то

$$F(x, y, \ldots) = \frac{1}{M - f(x, y, \ldots)}$$

будет непрерывной функцией, определённой на всей замкнутой области D. Но тогда в силу теоремы 2 она должна быть ограниченной. Однако, по самому определению точной верхней границы, изменяя независимые переменные, можно делать разность $M - f(x, y, \ldots)$ сколь угодно малой, а значит, функцию $F(x, y, \ldots)$ сколь угодно большой. Полученное противоречие и доказывает теорему [1]).

Понятие равномерной непрерывности, определённое ранее для функций одного переменного (см. т. I, стр. 266), переносится и на функции нескольких переменных. Функцию $f(x, y, \ldots)$, непрерывную в некоторой области D, называют *равномерно непрерывной* в этой области, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое,

---

[1]) Эту теорему можно было бы также доказать в полной аналогии с доказательством соответствующей теоремы о функциях одного переменного (см. т. I, стр. 281 и сл.), заменяя лишь интервалы прямоугольными областями.

что для любых двух точек $(x', y', \ldots)$ и $(x'', y'', \ldots)$ области D, удовлетворяющих условиям

$$|x'-x''|<\delta, \quad |y'-y''|<\delta, \ldots,$$

выполняется неравенство

$$|f(x', y', \ldots)-f(x'', y'', \ldots)|<\varepsilon.$$

Теорема 4. *Функция $f(x, y, \ldots)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области, равномерно непрерывна в этой области.*

Доказательство этой теоремы проводится совершенно аналогично доказательству соответствующей теоремы о функциях одного переменного (см. т. I, стр. 283), с заменой разбиения на интервалы разбиением на прямоугольные области.

§ 3. Частные производные.

Будем рассматривать однозначную функцию двух независимых переменных

$$z=f(x, y) \tag{3}$$

и положим, что она непрерывна в некоторой области изменений x и y. Если мы одно из переменных, например y, будем считать сохраняющим постоянное значение, то данная функция будет меняться в зависимости от изменения одного переменного x. Приращение её, соответствующее приращению аргумента Δx, мы будем называть *частным приращением* функции z и обозначать через $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y). \tag{4}$$

Точно так же составим и частное приращение по y, т. е. приращение, которое данная функция получает при изменении y в предположении, что x сохраняет в это время постоянную величину:

$$\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y). \tag{5}$$

Если переменное y мы считаем сохраняющим постоянное значение, то z будет непрерывной функцией одного переменного x. Будем предполагать, что эта функция имеет производную. Производная функции $z=f(x, y)$, составленная в предположении, что из двух независимых переменных меняется только x, а y сохраняет постоянную величину, называют *частной производной по x*. Точно так же, если считать x постоянным, а y переменным, определится частная производная функции $z=f(x, y)$ по y. Частные производные по x и по y обозначают следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\ ^{1}) \text{ или } \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \text{ или } z_x, \text{ или } f'_x(x, y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \text{ или } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \text{ или } z_y, \text{ или } f'_y(x, y).$$

[1]) Для обозначения частных производных употребляется круглое ∂, прямое d — для производных функций одного независимого переменного.

Таким образом, согласно определению производной как предела отношения приращения функции к приращению соответствующего независимого переменного, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim \frac{f(x+\Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x} \quad \text{при } \lim \Delta x = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} \quad \text{при } \lim \Delta y = 0.$$

Эти определения и обозначения естественно распространяются и на функции трёх и большего количества переменных.

Как следует из определения частных производных, нахождение их не представляет новой операции: надо только считать переменным тот аргумент, по которому берётся частная производная, а остальные рассматривать как постоянные величины.

Пример 1. Найти частные производные от функции двух переменных

$$z = 3x^2y^3 - xy^5 + 7x^3 - 6y + 1.$$

При дифференцировании по x нужно рассматривать y как постоянное. Таким образом будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3 - y^5 + 21x^2.$$

При дифференцировании по y аргумент x считается постоянным

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 5xy^4 - 6.$$

Пример 2. Найти частные производные от функции

$$z = x^y.$$

При дифференцировании по x функция z является степенью, а при дифференцировании по y — показательной функцией [т. I, стр. 310 (11); 374 (16′)]:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Пример 3. Найти частные производные функций

а) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$, б) $z = \sin(x+3y)$, в) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$,

г) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Решение.

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2} = \dfrac{2y}{(x+y)^2}$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{(x+y)(-1)-(x-y)}{(x+y)^2} = -\dfrac{2x}{(x+y)^2}$.

б) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos(x+3y)$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos(x+3y)\cdot 3 = 3\cos(x+3y)$,

в) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=-\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$.

г) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+x^2}}$; $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

§ 4. Частные дифференциалы. Полный дифференциал.

Главную часть приращения функции одного независимого переменного, пропорциональную приращению переменного, мы назвали (т. I, стр. 307) дифференциалом этой функции. Как следует из определения производной, дифференциал функции равен произведению производной на приращение независимого переменного или — что одно и то же — на дифференциал независимого переменного.

Понятие дифференциала может быть обобщено и на функции нескольких переменных. Рассмотрим сначала функцию двух независимых переменных

$$z=f(x,\ y).$$

Предполагая, что эта функция имеет частные производные в каждой точке какой-либо рассматриваемой области, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\varepsilon',\quad \Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\varepsilon'\Delta x,\\&\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y}+\varepsilon'',\quad \Delta_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon''\Delta y,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

где ε' стремится к нулю вместе с Δx, а ε'' — вместе с Δy.

Называя главные части частных приращений $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$, пропорциональные приращению соответствующего переменного, *частными дифференциалами* и вводя для них соответствующие обозначения $d_x z$, $d_y z$, будем иметь:

$$d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x\quad\text{и}\quad d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.\qquad(7)$$

Можно говорить и о частных или просто о дифференциалах независимых переменных, понимая под ними частные дифференциалы $d_x x$ и $d_y y$ функций $z=x$ и $z=y$; но так как

$$\frac{\partial x}{\partial x}=1\quad\text{и}\quad\frac{\partial y}{\partial y}=1,$$

то понятие дифференциалов независимых переменных, как следует из определяющих равенств (7), совпадает с понятием их приращений:

$$d_x x=dx=\Delta x,\quad d_y y=dy=\Delta y$$

($d_y x = 0$, $d_x y = 0$). Таким образом, равенство (7) можно представить в следующем виде:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx \quad \text{и} \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{7'}$$

Если рассматривается одновременное изменение x и y по какому бы то ни было закону, то положительными или отрицательными значениями Δx и Δy около точки (x, y) определяется прямоугольная область со сторонами $2|\Delta x|$ и $2|\Delta y|$. Безграничное уменьшение этой области можно связать или с уменьшением половины диагонали $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ или с уменьшением периметра или какой-либо части его, например четверти, которую обозначим через ρ:

$$\rho = |\Delta x| + |\Delta y|.$$

Таким образом вместо двух независимо одна от другой стремящихся к нулю величин Δx и Δy [1]) мы вводим одну величину ρ как главную бесконечно малую, относительно которой будем определять порядок других бесконечно малых величин. Так как $|\Delta x| \leqslant \rho$ и $|\Delta y| \leqslant \rho$, то величина, порядок которой относительно $|\Delta x|$ или $|\Delta y|$ выше первого, будет высшего порядка и относительно ρ.

Второе приращение функции по x и по y. Приращение функции по x [§ 3, (4)] зависит и от x и от y, т. е. является функцией двух независимых переменных:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{8}$$

Беря от этой функции приращение по y, получим второе («смешанное») приращение $\Delta_y(\Delta_x z)$ данной функции:

$$\Delta_y(\Delta_x z) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)] \tag{9}$$

или

$$\Delta_y(\Delta_x z) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y). \tag{9'}$$

Совершенно такое же выражение мы получаем и для второго приращения $\Delta_x(\Delta_y z)$:

$$\Delta_x(\Delta_y z) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y).$$

[1]) Если ρ стремится к нулю, то Δx и Δy стремятся также к нулю, и обратно. Но если стремится к нулю только одно приращение, например Δx, то ρ может и не стремиться к нулю.

Следовательно,

$$\Delta_y(\Delta_x z) = \Delta_x(\Delta_y z). \tag{10}$$

Полное приращение функции. Приращение Δz функции $z = f(x, y)$, которое она получает, когда одновременно изменяются x и y, принимая приращения Δx и Δy, называют *полным*:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y). \tag{11}$$

Полное приращение функции двух независимых переменных можно представить как сумму частных приращений $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и второго приращения $\Delta_x(\Delta_y z)$. Действительно, по определению имеем:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

$$\Delta_x(\Delta_y z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y).$$

Отсюда, складывая последние три равенства и принимая во внимание равенство (11), получаем:

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta_x(\Delta_y z). \tag{12}$$

Предположим данную функцию z имеющей в точке (x, y) частные производные. Тогда

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \varepsilon'\Delta x, \quad \Delta_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon''\Delta y,$$

где ε' и ε'' стремятся к нулю вместе с Δx и Δy, а следовательно, и вместе с $\rho = |\Delta x| + |\Delta y|$. Таким образом полное приращение функции представится в следующем виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon'\Delta x + \varepsilon''\Delta y + \Delta_y(\Delta_x z). \tag{13}$$

Величины $\varepsilon'\Delta x$ и $\varepsilon''\Delta y$, как произведения бесконечно малых Δx и Δy на бесконечно малые ε' и ε'', суть бесконечно малые порядка выше первого относительно ρ. Если второе приращение функции — также бесконечно малая высшего порядка относительно ρ, то сумма двух первых слагаемых, бесконечно малая первого порядка (если, конечно, $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $\frac{\partial z}{\partial y}$ отлично от нуля), будет главною частью полного приращения функции (т. I, стр. 260).

Для того чтобы $\Delta_y(\Delta_x z)$ было бесконечно малым высшего порядка относительно ρ, достаточно, например, чтобы функция z имела частную производную по одному из переменных, например по y, в некоторой «окрестности» $|x'-x| < \delta$, $|y'-y| < \delta$ точки (x, y) и чтобы эта производная была непрерывна в точке (x, y). Действительно, заменяя в правой части равенства

$$\Delta_y(\Delta_x z) = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] - [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]$$

разности в квадратных скобках их выражениями по теореме о среднем значении и принимая во внимание непрерывность частной производной по y в точке x, получаем:

$$\Delta_y(\Delta_x z) = \frac{\partial f(x+\Delta x,\ y+\theta'\Delta y)}{\partial y}\Delta y - \frac{\partial f(x,\ y+\theta''\Delta y)}{\partial y}\Delta y =$$

$$= \left(\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} + \eta'\right)\Delta y - \left(\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} + \eta''\right)\Delta y = (\eta' - \eta'')\Delta y,$$

где η' и η'', а значит и $\eta' - \eta''$, стремятся к нулю вместе с ρ. Это и показывает, что $\Delta_y(\Delta_x z)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с ρ.

Таким образом, полное приращение функции представится в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon'\Delta x + \varepsilon\Delta y, \tag{14}$$

где ε стремится к нулю вместе с ρ:

$$\varepsilon = \varepsilon'' + \eta' - \eta''.$$

В двух первых членах правой части равенства (14) множители при Δx и Δy не зависят от самих приращений Δx и Δy. Сумма этих двух членов представляет собой бесконечно малую величину первого порядка и составляет, следовательно, главную часть полного приращения функции.

Если полное приращение функции можно представить в виде

$$\Delta z = M\Delta x + N\Delta y + \text{бесконечно малое относительно } \rho, \tag{13'}$$

где M и N не зависят от Δx и Δy, то функцию называют *дифференцируемой*. В этом случае величины M и N будут необходимо равны соответственно частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. В самом деле, полагая в равенстве (13') $\Delta y = 0$, деля на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = M$$

и точно так же найдём

$$\lim_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = N.$$

Результат проведённого выше исследования полного приращения функции можно теперь формулировать в виде следующего предложения:

Для того чтобы функция $z = f(x, y)$ была дифференцируемой в точке (x, y), достаточно, чтобы она имела в точке (x, y) частные производные по x и y и, кроме того, чтобы частная

производная по одному из переменных, например по y, существовала в некоторой окрестности точки (x, y) и была непрерывна в самой этой точке.

Полный дифференциал. Главную часть полного приращения функции, линейную относительно приращений независимых переменных, называют *полным дифференциалом* этой функции. Обозначая полный дифференциал функции z через dz, будем иметь из выражения (13′)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y, \tag{15}$$

или, так как можно положить $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{15′}$$

т. е. *полный дифференциал функции равен сумме её частных дифференциалов.*

Понятие полного дифференциала можно распространить на функции скольких угодно переменных, определив его, например, как сумму частных дифференциалов:

$$u = f(x, y, z, \ldots);\quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \ldots \tag{16}$$

В таком случае можно показать, что при некоторых условиях полный дифференциал функции является главною частью полного приращения её. Так, полное приращение функции трёх независимых переменных $u = f(x, y, z)$, как нетрудно убедиться, является суммой частных приращений, вторых приращений и третьего [1]):

$$\Delta u = \Delta_x u + \Delta_y u + \Delta_z u + \Delta_z(\Delta_y u) + \Delta_z(\Delta_x u) + \Delta_x(\Delta_y u) + \Delta_x[\Delta_y(\Delta_z u)].$$

Если функция имеет частные производные в точке (x, y, z), то

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon'\Delta x + \varepsilon''\Delta y + \varepsilon'''\Delta z + \\ + \Delta_z(\Delta_y u) + \Delta_z(\Delta_x u) + \Delta_x(\Delta_y u) + \Delta_x[\Delta_y(\Delta_z u)],$$

где ε', ε'', ε''' стремятся к нулю соответственно вместе с Δx, Δy, Δz, а стало быть, и вместе с $\rho = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$. Если все вторые и третьи приращения, так же как и $\varepsilon'\Delta x$, $\varepsilon''\Delta y$, $\varepsilon'''\Delta z$, — бесконечно малые высшего порядка относительно ρ, то сумма первых трёх слагаемых, бесконечно малая вместе с ρ, но не относительно ρ (если только не все три производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ обращаются в нуль), т. е.

---

[1]) Третье приращение $\Delta_x[\Delta_y(\Delta_z u)]$ определяется аналогично второму. Выражение его не зависит от порядка независимых переменных.

полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$, будет главной частью приращения её:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \varepsilon\rho,$$

где ε стремится к нулю вместе с ρ.

Операция составления полного дифференциала функции сводится согласно его определению к нахождению частных производных и называется *дифференцированием*[1]).

Пример 1. Определить полный дифференциал функции

$$z = 3x^2y^3 - xy^5 + 7x^3 - 6y + 1.$$

Находя частные производные этой функции (пример 1 § 3), будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3 - y^5 + 21x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 5xy^4 - 6.$$

Следовательно,

$$dz = (6xy^3 - y^5 + 21x^2)\,dx + (9x^2y^2 - 5xy^4 - 6)\,dy.$$

Пример 2. Определить полные дифференциалы функций

а) $z = \frac{x-y}{x+y}$, б) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, в) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(ср. пример 3 § 3).

а) $dz = \frac{2(y\,dx - x\,dy)}{(x+y)^2}$, б) $dz = -\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$,

в) $du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

§ 5. Дифференцирование сложной функции.

Рассматривая функции нескольких переменных, ограничимся в дальнейшем, ради сокращения письма, тремя аргументами. Пусть x, y, z зависят от одного независимого переменного t:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{17}$$

причём функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеют производную в рассматриваемой области изменения t. Функция $u = f(x, y, z)$ аргументов x, y, z будет сложной функцией переменного t, и если эта функция имеет полный дифференциал в соответствующей области изменения аргументов x, y, z, то она имеет и производную по t. Действительно, пусть t получило приращение Δt; аргументы x, y, z и функция u получат при этом соответствующие приращения Δx, Δy,

[1]) Если желают отличить операцию составления дифференциала от операции составления производной, то последнюю называют *деривацией* функции (dérivée — производная).

Δz, Δu, которые в силу непрерывности рассматриваемых функций (вытекающей из дифференцируемости) стремятся к нулю вместе с Δt. При всяких приращениях аргументов x, y, z, а стало быть, и при рассматриваемых, т. е. соответствующих приращению Δt, приращение функции u, по выделении из него главной части, можно представить в следующем виде:

$$\Delta u = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial y}{\partial z}\Delta z + \varepsilon\rho, \tag{18}$$

где $\rho = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$ стремится к нулю вместе с Δt, а ε — вместе с ρ. Приращения Δx, Δy, Δz при данных условиях (17) не совпадают с дифференциалами аргументов, что имело бы место, если бы x, y, z были независимыми переменными. Для нахождения производной функции u по t составляем отношение Δu к Δt:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t} + \varepsilon\frac{\rho}{\Delta t}; \tag{19}$$

отсюда, переходя к пределу в предположении, что Δt стремится к нулю, получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \tag{20}$$

ибо $\lim \varepsilon = 0$ и, следовательно,

$$\lim \varepsilon \left|\frac{\rho}{\Delta t}\right| = \lim \varepsilon \cdot \lim \left\{\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| + \left|\frac{\Delta y}{\Delta t}\right| + \left|\frac{\Delta z}{\Delta t}\right|\right\} =$$
$$= \left\{\left|\frac{dx}{dt}\right| + \left|\frac{dy}{dt}\right| + \left|\frac{dz}{dt}\right|\right\} \lim \varepsilon = 0.$$

Равенство (20) представляет формулу дифференцирования сложной функции и является обобщением формулы дифференцирования функции от функции (т. I, стр. 360).

Имея производную функции u по t, можно составить и дифференциал этой функции, умножая производную на дифференциал независимого переменного, т. е. на dt. Таким образом из равенства (20) будем иметь:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz, \tag{21}$$

так как по определению

$$\frac{du}{dt}dt = du, \quad \frac{dx}{dt}dt = dx, \quad \frac{dy}{dt}dt = dy, \quad \frac{dz}{dt}dt = dz.$$

Сравнивая формулу (21) с формулой (16) § 4, мы можем заключить, что дифференциал сложной функции имеет такое же строение, как и полный дифференциал функции u, рассматриваемой

как функция независимых аргументов x, y, z. Но разница заключается в том, что при независимых x, y, z формулы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z, \quad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

совершенно равносильны, ибо $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$, а при зависимости x, y, z от t, в общем случае, — не равносильны, ибо в этом случае

$$\Delta x = dx + \varepsilon'\Delta t, \quad \Delta y = dy + \varepsilon''\Delta t, \quad \Delta z = dz + \varepsilon'''\Delta t.$$

Пример 1. Найти производную по t от функции

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

где $x = \cos t$, $y = \sin t$.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2(a_{11}x + a_{12}y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2(a_{12}x + a_{22}y);$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t;$$

$$\frac{dz}{dt} = -2(a_{11}x + a_{12}y)\sin t + 2(a_{12}x + a_{22}y)\cos t.$$

Подставляя $x = \cos t$ и $y = \sin t$, после тригонометрических преобразований получим

$$\frac{dz}{dt} = (a_{22} - a_{11})\sin 2t + 2a_{12}\cos 2t.$$

Тот же результат, конечно, можно было бы получить, подставляя $\cos t$ и $\sin t$ вместо x и y в данную функцию и дифференцируя её по обычным правилам как функцию t.

Пример 2. Найти производную функции

$$y = (1 + x^2)^{\sin x}.$$

Будем рассматривать y как сложную функцию:

$$y = u^v, \quad \text{где } u = 1 + x^2, \quad v = \sin x;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}. \qquad (\alpha)$$

При v постоянном $y = u^v$ будет степенью, а при u постоянном — показательной функцией. Следовательно,

$$\frac{\partial y}{\partial u} = vu^{v-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u^v \ln u.$$

Кроме того, имеем

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dx} = \cos x.$$

Подставляя найденные выражения для частных производных функции y и производных функций u и v в формулу (α), получим:

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}2x + u^v \ln u \cos x,$$

или

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)^{\sin x}\left[\frac{2x \sin x}{1 + x^2} + \cos x \ln (1 + x^2)\right].$$

Тот же результат можно было бы получить, находя предварительно производную функции

$$\ln y = \sin x \ln(1 + x^2).$$

Если независимое переменное t совпадает с одним из аргументов, например x, то нужно различать частную производную данной функции по x, иначе производную по x, входящему явно, и полную производную по x. Формула (20) принимает в этом случае вид

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}, \tag{20'}$$

ибо, полагая $t = x$, будем иметь:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}.$$

Первое слагаемое суммы (20') будет частной производной функции u по x или производной по x, входящему явно, а вся сумма — полной производной по x.

Пусть теперь аргументы x, y, z функции

$$u = f(x, y, z)$$

зависят не от одного, а от нескольких независимых переменных, например, ξ, η, ζ, ...:

$$x = x(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta, \ldots).$$

В таком случае u будет сложной функцией нескольких независимых переменных:

$$u = \Phi(\xi, \eta, \zeta, \ldots).$$

При нахождении частной производной этой функции по ξ остальные независимые переменные должны считаться постоянными, и потому мы имеем здесь ту же задачу, что и раньше, — задачу, которая привела нас к формуле (20); вся разница только в том, что вопрос идёт теперь не просто о производной сложной функции по (одному) независимому переменному (t), а о частной производной сложной функции по одному из независимых переменных. Таким образом будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial u}{\partial \zeta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Полный дифференциал и в этом случае сохраняет ту же форму (16), только dx, dy, dz не будут совпадать с приращениями Δx, Δy, Δz

аргументов, а будут полными их дифференциалами относительно независимых переменных ξ, η, ζ, ... Действительно, по определению имеем:

$$du = \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta + \dots$$

Внося сюда вместо частных производных функции u по ξ, η, ζ, ... их выражения (22), получим:

$$\begin{aligned} du = &\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta + \dots\right) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta + \dots\right) + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta + \dots\right). \end{aligned}$$

Выражения, на которые множатся в правой части предыдущего равенства частные производные функции u по x, y, z, суть полные дифференциалы аргументов x, y, z относительно независимых переменных ξ, η, ζ, ... Следовательно,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

§ 6. Дифференцирование неявной функции.

Правило дифференцирования сложной функции даёт возможность находить и производные неявных функций как одной, так и нескольких переменных. В первом случае неявная функция y определяется уравнением вида

$$f(x, y) = 0.$$

Левая его часть является сложной функцией; она зависит от x, входящего явно, и от x, входящего через y; производная такой сложной функции находится по вышеустановленному правилу. Но при изменении x и соответствующем изменении y эта сложная функция сохраняет постоянную величину, равную нулю. Поэтому производная её, как производная постоянного, равна нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда и находим искомую производную неявной функции y:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Пример 1. Найти производную функции y, определённой уравнением

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y + 2 = 0.$$

Решение.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 2y - 1;$$

$$(2x + 3y + 2) + (3x - 2y - 1) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y + 2}{3x - 2y - 1}.$$

Рассмотрим теперь неявную функцию z нескольких переменных, например двух, определяемую уравнением вида

$$f(x, y, z) = 0.$$

Решая это уравнение относительно z, мы получили бы z как некоторую определенную функцию двух независимых переменных x и y. Поэтому при дифференцировании по x этого уравнения левую часть должно рассматривать как сложную функцию x, зависящую от x явно и через z, а y как постоянное:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Точно так же при дифференцировании по y левая часть рассматривается как сложная функция, зависящая от y явно и через z, а x как постоянное:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dy} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}.$$

Пример 2. Функция z двух независимых переменных x и y определена уравнением

$$f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y^2 - 3xz - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3xy;$$

$$(3x^2 - 3yz) + (3z^2 - 3xy)\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - 3yz}{3z^2 - 3xy};$$

$$(6y^2 - 3xz - 2) + (3z^2 - 3xy)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3z^2 - 3xy}.$$

Проведённый выше вывод формулы для производной от неявной функции опирается на предположение, что эта функция действительно существует и притом дифференцируема. В следующем параграфе мы рассмотрим вопрос о том, при каких условиях это предположение выполняется.

§ 7. Теорема о существовании неявной функции.

Когда функция какого-либо аргумента дана явно, в этом явном выражении функции содержится и способ её вычисления для каждого данного значения аргумента. Если функция задана в неявной форме уравнением, связывающим значения аргумента с соответствующими значениями функции, то для вычисления величины функции по заданному аргументу приходится решать уравнение.

Так, если функция дана в неявной форме уравнением $f(x, y) = 0$, то для нахождения величины y при заданном $x = x_0$ надо решить уравнение $f(x_0, y) = 0$ относительно неизвестного y. Но такое решение возможно не для всякого уравнения. Чтобы уравнение $f(x, y) = 0$ действительно определяло некоторую функцию аргумента x, т. е. чтобы хотя бы для некоторого интервала изменения x каждому значению x соответствовало вполне определённое действительное значение y, функция $f(x, y) = 0$ должна быть подчинена некоторым ограничительным условиям. Достаточные условия для существования и дифференцируемости неявной функции даются следующей теоремой.

Теорема. *Пусть функция $f(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:* 1) *она непрерывна в некоторой области D изменения переменных x и y;* 2) *в точке (x_0, y_0), лежащей внутри этой области, обращается в нуль, т. е. $f(x_0, y_0) = 0$;* 3) *имеет в области D частные производные по x и по y, причём* 4) *частная производная по y отлична от нуля в точке (x_0, y_0) и непрерывна в окрестности этой точки* [1]). *Тогда уравнение $f(x, y) = 0$ при всех значениях x, достаточно близких к x_0, имеет единственное действительное решение относительно y:*

[1]) Т. е. как в самой точке (x_0, y_0), так и в точках (x, y), координаты которых отличаются по абсолютной величине от координат точки (x_0, y_0) меньше чем на некоторое δ.

$y=\varphi(x)$, достаточно близкое к y_0, причём функция $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема для всех x, достаточно близких к x_0, и принимает значение y_0 при $x=x_0$: $\varphi(x_0)=y_0$.

Для доказательства этой теоремы заметим прежде всего, что в силу непрерывности функции $f'_y(x, y)$ и неравенства $f'_y(x_0, y_0)\neq 0$ эта функция сохраняет знак числа $f'_y(x_0, y_0)$ в некоторой окрестности

$$x_0-\omega<x<x_0+\omega,\quad y_0-\omega<y<y_0+\omega$$

точки (x_0, y_0), содержащейся в D; будем предполагать, например, что $f'_y(x_0, y_0)>0$ и, значит, во всей указанной окрестности $f'_y(x, y)>0$. В силу этого функция $f(x_0, y)$ одного аргумента возрастает в интервале $(y_0-\omega, y_0+\omega)$, и так как в точке $y=y_0$ она равна нулю, то

$$f(x_0, y-\omega)<0,\quad f(x_0, y+\omega)>0.$$

Тогда в силу непрерывности функции $f(x, y)$ существует такое число $h>0$ (которое мы можем считать не превосходящим ω), что для всякого значения x из интервала $x_0-h<x<x_0+h$ (содержащегося в интервале $x_0-\omega<x<x_0+\omega$) имеют место неравенства

$$f(x, y_0-\omega)<0,\quad f(x, y_0+\omega)>0.$$

Закрепив любое какое-нибудь из этих значений x, рассмотрим функцию $f(x, y)$ одного аргумента y. Так как она непрерывна, монотонно возрастает и принимает на концах интервала $(y_0-\omega, y_0+\omega)$ разные знаки, то в некоторой точке этого интервала, и притом только в одной, она обращается в нуль.

Таким образом, каждому значению x в интервале $x_0-h<x<x_0+h$ будет соответствовать одно и только одно значение y такое, что $f(x, y)=0$. Следовательно, в интервале $x_0-h<x<x_0+h$ существует однозначная функция $y=\varphi(x)$, удовлетворяющая уравнению $f(x, y)=0$.

Из предшествующего непосредственно следует, что эта функция непрерывна в точке x_0. В самом деле, ω могло быть сколь угодно малым. Таким образом, мы доказали, что для всякого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что каждому x из интервала $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ отвечает значение из интервала $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$, удовлетворяющее уравнению $f(x, y)=0$. Но при $\varepsilon<\omega$ это y будет необходимо совпадать с $\varphi(x)$. Тем самым, для всякого достаточно малого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |x-x_0|<\delta;$$

а это и означает, что $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0. Но в таком случае $\varphi(x)$ непрерывна в любой точке $x=x_1$ интервала (x_0-h, x_0+h), ибо для точки (x_1, y_1), где $y_1=\varphi(x_1)$, выполнены все те условия, на которые мы опирались при рассмотрении точки (x_0, y_0); а именно, $f(x_1, y_1)=0$ и функции $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ непрерывны в окрестности точки (x_1, y_1), причём $f'_y(x, y)\neq 0$. Итак, $\varphi(x)$ непрерывна во всем интервале $x_0-h<x<x_0+h$.

Покажем теперь, что $\varphi(x)$ дифференцируема в каждой точке x_1 этого интервала. В самом деле, дадим x_1 приращение Δx настолько малое, чтобы $x_0-h<x_1+\Delta x<x_0+h$. В силу изложенного выше значению $x=x_1+\Delta x$ будет отвечать значение $y=y_1+\Delta y$ такое, что $y_0-\omega<y_1+\Delta y<y_0+\omega$ и $f(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y)=0$. Отсюда

$$\Delta f(x_1, y_1)=f(x_1+\Delta x_1, y_1+\Delta y)-f(x_1, y_1)=0.$$

Но в силу условий 3) и 4) $f(x, y)$ имеет в точке (x_1, y_1) частные производные по x и y, причём производная по y непрерывна. Поэтому согласно

предложению, доказанному в § 4 (стр. 140—141), $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_1, y_1) и, следовательно,

$$0 = \Delta f(x_1, y_1) = f'_{x_1}\Delta x + f'_{y_1}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{23}$$

где ε_1 и ε_2 стремятся к нулю вместе с Δx и Δy. При этом Δy действительно стремится к нулю, когда $\Delta x \to 0$, ибо функция $y = \varphi(x)$, по доказанному, непрерывна. Но из формулы (23) имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_{x_1} + \varepsilon_1}{f'_{y_1} + \varepsilon_2}; \tag{23'}$$

принимая во внимание, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2 = 0$, а $f'_{y_1} \neq 0$ (так что правая часть формулы (23) имеет смысл при достаточно малых Δx), заключаем отсюда, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}}.$$

Таким образом, функция $y = \varphi(x)$ имеет определённую конечную производную во всех точках интервала $x_0 - h < x < x_0 + h$. Заметим, что одновременно мы вывели заново и формулу для производной от неявной функции, полученную в предыдущем параграфе при молчаливо сделанном предположении о существовании этой производной.

Пример 1. Уравнение $f(x, y) = y - x^2 = 0$ в точке (0, 0) удовлетворяет условиям теоремы.

В самом деле, $f'_y = 1 \neq 0$. Функция $f(x, y)$ дифференцируема. Данное уравнение определяет единственную функцию $y = x^2$.

Пример 2. Уравнение $f(x, y) = y^2 - x = 0$ в точке(0, 0) не удовлетворяет условиям теоремы, так как $f'_y = 2y$ и при $x = 0$, $y = 0$ имеем $f'_y = 0$; таким образом,мы не можем утверждать, что указанное уравнение определяет единственную функцию y, равную нулю при $x = 0$. И в самом деле, данное уравнение определяет две такие функции: $y = +\sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$. Но в точке (1, 1) условия теоремы выполнены, так как в этой точке $f'_y = 2$. Следовательно, уравнение $y^2 = x$ определяет в окрестности точки (1, 1) единственную функцию, принимающую при $x = 1$ значение $y = 1$. В самом деле, из двух функций $y = +\sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$ лишь первая удовлетворяет этому условию.

Доказанную теорему легко распространить на функции любого числа аргументов.

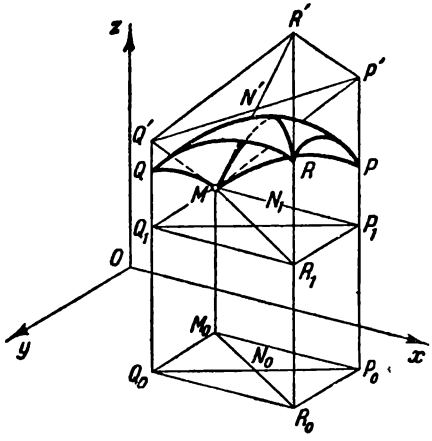
§ 8. Геометрическое значение частных производных и полного дифференциала функции двух независимых переменных.

Геометрическое значение частных производных и частных дифференциалов вытекает из самого их определения. Функция двух переменных

$$z = f(x, y) \tag{24}$$

геометрически представляется некоторой поверхностью, являясь аппликатой точки, движущейся по этой поверхности. Если мы берём частную производную по x, то y при этом рассматривается как постоянная величина и z является функцией одного независимого аргумента x.

Соответствующая точка $M(x, y, z)$ при изменении x перемещается на поверхности (24) по некоторой линии MP, расположенной в плоскости, параллельной плоскости xOz (черт. 23). Давая x приращение Δx, мы из точки $M(x, y, z)$ перейдём в точку $P(x+\Delta x,\ y,\ z+\Delta_x z)$ на этой линии. Пусть MP' — касательная к линии MP, и MP_1 — прямая, параллельная оси Ox, а точки P, P', P_1 лежат на прямой, параллельной оси Oz. Согласно установленному раньше геометрическому значению производных и дифференциалов (т. I, стр. 295—296) мы должны иметь:



Черт. 23.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \operatorname{tg} \angle P_1MP', \\ d_x z &= \frac{\partial z}{\partial x}\,dx = P_1P'. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Точно так же, считая x постоянной величиной, а y переменной, мы будем перемещать точку $M(x, y, z)$ на рассматриваемой поверхности по линии MQ, расположенной в плоскости, параллельной плоскости yOz, и, произведя соответствующие построения, найдём:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \angle Q_1MQ', \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = Q_1Q'. \qquad (26)$$

Если x и y одновременно получат приращения Δx и Δy, то функция получит полное приращение Δz. Точка M перейдёт при этом в точку R на поверхности, и мы будем иметь:

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y) = R_1R.$$

Параллелограмм $MP_1R_1Q_1$ проектируется на плоскость xOy параллелограммом $M_0P_0R_0Q_0$. Продолжая проектирующую призму с основанием $M_0P_0R_0Q_0$ до пересечения с плоскостью, соединяющей касательные прямые MP' и MQ', получим третий параллелограмм $MP'R'Q'$. Нетрудно убедиться в том, что R_1R' и будет полным дифференциалом. Действительно, центры N_0, N_1, N' параллелограммов лежат на одной прямой, параллельной оси Oz; N_1N' является средней линией трапеции $P_1P'Q'Q_1$, и потому

$$N_1N' = \frac{1}{2}(P_1P' + Q_1Q'). \qquad (27)$$

С другой стороны, N_1N' является также средней линией треугольника MR_1R', и, следовательно,

$$N_1N' = \frac{1}{2} R_1R'. \tag{28}$$

Из равенств (27) и (28) следует:

$$R_1R' = P_1P' + Q_1Q' \quad \text{или} \quad R_1R' = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y, \tag{29}$$

ибо P_1P' и Q_1Q' суть частные дифференциалы рассматриваемой функции [(25) и (26)].

Пусть точка $M(x, y, z)$ перемещается по поверхности, оставаясь в какой-либо одной вертикальной плоскости, например так, чтобы проекция этой точки на плоскость xOy, т. е. точка $M_0(x, y)$ перемещалась по диагонали M_0R_0 параллелограмма $M_0P_0R_0Q_0$. Переменные x и y не будут уже независимыми. Если обозначим смещение точки $M_0(x, y)$ от некоторой начальной точки её пути через t, то x и y будут линейными функциями переменного t. При такой зависимости x и y от t соответственные приращения $\Delta t = M_0R_0$, $\Delta x = M_0P_0$, $\Delta y = M_0Q_0$ меняются пропорционально и потому

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt},$$

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t, \qquad \Delta y = \frac{dy}{dt}\Delta t. \tag{30}$$

Производная функции z по t и её дифференциал выражаются следующими формулами:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \quad dz = \frac{dz}{dt}\Delta t = \frac{\partial z}{\partial t}\frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Delta t,$$

или, в силу равенств (30),

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{31}$$

Таким образом дифференциал функции z при рассматриваемой зависимости x и y от t геометрически представляется, как видно из равенства (31), тем же отрезком R_1R'. Отношение этого отрезка к соответственному приращению независимого переменного $\Delta t = MR_1$ представляет поэтому производную функции z по t:

$$\frac{R_1R'}{MR_1} = \frac{dz}{dt}.$$

Из прямоугольного треугольника MR_1R' следует:

$$\frac{R_1R'}{MR_1} = \operatorname{tg} \angle R_1MR'. \tag{32}$$

С другой стороны, согласно геометрическому значению производной, имеем

$$\frac{dz}{dt} = \operatorname{tg}\varphi, \tag{33}$$

где φ — угол, образуемый касательной к кривой MR в точке M с прямою M_0R_0 или MR_1. Из равенств (32) и (33) следует:

$$\varphi = \angle R_1MR',$$

т. е. диагональ MR' параллелограмма $MP'R'Q'$ и будет касательной к кривой MR в точке M.

Меняя отношение приращений $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, иначе — вращая вертикальное сечение поверхности около M_0M, мы не изменим направлений MP' и MQ', но параллелограмм $MP'Q'R'$ будет меняться, оставаясь в одной и той же плоскости; будет меняться в своём направлении и диагональ его MR', оставаясь всё время касательной к соответствующему сечению поверхности, т. е. к самой поверхности.

Таким образом все касательные к поверхности в точке M лежат в одной и той же плоскости; эту плоскость называют *касательною плоскостью* к поверхности.

Точка M является точкою прикосновения касательной плоскости $MP'Q'$, точка R' лежит в касательной плоскости. Так как

$$R_1R' = R_0R' - M_0M,$$

то полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ является приращением аппликаты касательной плоскости при смещении её основания M_0 в какую-либо точку R_0 плоскости xOy, иначе — при изменении аргументов x и y. Это геометрическое значение полного дифференциала функции двух переменных совершенно аналогично геометрическому значению дифференциала функции одного независимого переменного (т. I, стр. 309).

§ 9. Уравнение касательной плоскости и нормаль к поверхности.

Геометрическое значение частных производных функций двух независимых переменных даёт возможность составить уравнение касательной плоскости к поверхности в данной на ней точке.

Пусть уравнение касательной плоскости к поверхности

$$z = f(x, y) \tag{34}$$

в точке $M(x, y, z)$ имеет вид

$$AX + BY + CZ + D = 0, \tag{35}$$

где X, Y, Z — текущие координаты, а A, B, C и D — неизвестные пока коэффициенты. Большими буквами X, Y и Z будем обозначать

текущие координаты точки, перемещающейся по плоскости, в отличие от обозначаемых малыми буквами x, y, z координат рассматриваемой фиксированной точки поверхности.

Точка $M(x, y, z)$, как точка прикосновения, должна лежать на касательной плоскости; поэтому

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{36}$$

Почленным вычитанием мы исключим из уравнения (35) и равенства (36) один неизвестный коэффициент D и получим уравнение той же плоскости в ином виде:

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0;$$

отсюда

$$Z-z=-\frac{A}{C}(X-x)-\frac{B}{C}(Y-y),$$

или, полагая $-\frac{A}{C}=p$ и $-\frac{B}{C}=q$,

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y). \tag{37}$$

В этом уравнении X, Y, Z рассматриваются как текущие координаты, а x, y, z — как постоянные.

Определим теперь коэффициенты p и q. Пересечём касательную плоскость плоскостью, параллельной координатной плоскости xOz и проходящей через точку $M(x, y, z)$; уравнение этой плоскости

$$Y=y.$$

Поэтому линия пересечения этих плоскостей, т. е. MP' (см. черт. 23), выразится уравнением [1])

$$Z-z=p(X-x),$$

и стало быть угловой коэффициент её равен p. Но мы уже знаем (стр. 152), что угловой коэффициент линии MP' равен соответствующей частной производной; следовательно,

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Точно так же, пересекая плоскость (37) плоскостью, параллельной плоскости yOz, уравнение которой $X=x$, найдём, что

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

---

[1]) Точнее — двумя уравнениями: $Z-z=p(X-x)$ и $Y=y$. Но так как прямая, определяемая этими уравнениями, лежит в плоскости, параллельной плоскости xOz, и так как нас интересует только её направление, то в данном случае и не принимается во внимание уравнение $Y=y$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости будет

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y). \tag{38}$$

Это уравнение мы могли бы вывести и непосредственно из выражения полного дифференциала

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta y.$$

Пусть X, Y, Z — координаты какой-либо точки касательной плоскости в точке $M(x, y, z)$. Исходя из геометрического значения дифференциала и определения приращений, выразим dz, Δx и Δy через X, Y, Z и x, y, z:

$$dz=Z-z,\quad \Delta x=X-x,\quad \Delta y=Y-y.$$

Подставляя эти разности в выражение полного дифференциала, мы и получим уравнение касательной плоскости (38).

Нормаль. Приведя уравнение (38) к нормальному виду, мы тем самым определим и направление (α, β, γ) перпендикуляра к ней (т. I, стр. 189). Имеем:

$$\frac{p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)}{\sqrt{p^2+q^2+1}}=0,$$

где p и q — частные производные z по x и по y. Следовательно.

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \cos\beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\\ \cos\gamma&=-\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания называют *нормалью* поверхности. Уравнения этой линии тоже легко найти. Уравнения нормали, как прямой линии, проходящей через точку $M(x, y, z)$ и имеющей данное направление, определяемое формулами (39), имеют вид (т. I, стр. 195)

$$\frac{X-x}{\cos\alpha}=\frac{Y-y}{\cos\beta}=\frac{Z-z}{\cos\gamma},$$

или, по замене косинусов величинами p, q, -1, им пропорциональными:

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}. \tag{40}$$

Пример. Найти касательную плоскость к эллипсоиду, определяемому уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Решение. Находим прежде всего частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}=0 \text{ и отсюда } \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}\frac{c^2}{a^2};$$

$$\frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \text{ и отсюда } \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}\frac{c^2}{b^2}.$$

Составляя искомое уравнение касательной плоскости по формуле (38) получим:

$$Z-z=-\frac{x}{z}\frac{c^2}{a^2}(X-x)-\frac{y}{z}\frac{c^2}{b^2}(Y-y).$$

Перенеся все члены в левую часть, делим на c^2 и умножаем на z:

$$\frac{1}{a^2}(X-x)\,x+\frac{1}{b^2}(Y-y)\,y+\frac{1}{c^2}(Z-z)\,z=0,$$

или

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0.$$

Но

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

так как точка $M(x, y, z)$ лежит на эллипсоиде. Следовательно, уравнение касательной плоскости принимает вид

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}+\frac{Zz}{c^2}-1=0.$$

§ 10. Высшие частные производные. Независимость результата многократного дифференцирования от порядка дифференцирования.

Частные производные функции нескольких переменных, вообще говоря, зависят от тех же переменных, и по ним их снова можно дифференцировать. Получим таким образом частные производные высших порядков. Так, для функции z двух переменных x и y имеем две частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. Дифференцируя каждую по x и y, получим четыре производные второго порядка, которые обозначают следующим образом [1]):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Так же определяются и частные производные третьего порядка, четвёртого и т. д. Число этих частных производных с повышением

[1]) Порядок, в котором написаны внизу ∂x и ∂y, указывает на порядок, в котором были произведены дифференцирования.

порядка всё увеличивается. Но среди них некоторые будут равны; именно, можно доказать, что порядок многократного дифференцирования функции, если только она имеет непрерывные частные производные рассматриваемых порядков, не влияет на результат дифференцирования; так,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\,\partial x}.$$

Достаточно рассмотреть это предложение для вторых производных, т. е. доказать, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x},\ \text{или}\ f''_{xy}=f''_{yx}.$$

Теорема. *Если функция $z=f(x, y)$ имеет в окрестности точки (x, y) частные производные f'_x, f'_y и вторую частную производную f''_{xy}, непрерывную в точке (x, y), то она имеет в этой точке и вторую частную производную f''_{yx} и притом тождественную с первой, т. е. при данных условиях порядок дифференцирования не влияет на результат дифференцирования:*

$$f''_{xy}=f''_{yx}.$$

Доказательство. Составим второе приращение $\Delta_x(\Delta_y z)$, т. е. изменяя сначала y, а потом x:

$$\Delta_x(\Delta_y z)=[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x+\Delta x,\ y)]-\\ -[f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)]. \qquad (41)$$

Положим ради краткости

$$\varphi(x)=f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y),$$

отмечая зависимость лишь от x. Тогда равенство (41) представится в следующем виде:

$$\Delta_x(\Delta_y z)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x).$$

По теореме о конечном приращении (т. I, стр. 330), имеем:

$$\Delta_x(\Delta_y z)=\Delta x\,\varphi'(x+\theta\,\Delta x),$$

где $0<\theta<1$, или, по замене $\varphi'(x+\theta\,\Delta x)$ его выражением:

$$\Delta_x(\Delta_y z)=\Delta x\,[f'_x(x+\theta\,\Delta x,\ y+\Delta y)-f'_x(x+\theta\,\Delta x,\ y)].$$

Разность в правой части этого равенства представляет также приращение функции, именно функции $f'_x(x+\theta\,\Delta x,\ y)$ по y. Применяя снова теорему о конечном приращении получим:

$$\Delta_x(\Delta_y z)=\Delta x\,\Delta y\,f''_{xy}(x+\theta\,\Delta x,\ y+\theta_1\,\Delta y), \qquad (42)$$

где $0 < \theta_1 < 1$. Но $f''_{xy}(x, y)$, по условию, — функция, непрерывная в точке (x, y), следовательно,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f''_{xy}(x + \theta \Delta x,\ y + \theta_1 \Delta y) = f''_{xy}(x, y);$$

по определению предела, имеем:

$$f''_{xy}(x + \theta \Delta x,\ y + \theta_1 \Delta y) = f''_{xy}(x, y) + \varepsilon, \tag{43}$$

где ε стремится к нулю вместе с Δx и Δy, иначе говоря — вместе с $\rho = |\Delta x| + |\Delta y|$. Таким образом из равенств (42) и (43) следует:

$$\Delta_x(\Delta_y z) = \Delta x \Delta y\, [f''_{xy}(x, y) + \varepsilon]. \tag{44}$$

Делим обе части этого равенства на Δy и переходим к пределу, предполагая Δy стремящимся к нулю; при этом в правой части, быть может, будет изменяться ε, оставаясь всё-таки бесконечно малым, стремящимся к нулю вместе с Δx:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_x(\Delta_y z)}{\Delta y} = \Delta x\, [f''_{xy}(x, y) + \varepsilon']. \tag{45}$$

Но на основании равенства (41) имеем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_x(\Delta_y z)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y)}{\Delta y} - \frac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y} \right]$$

или, согласно условию теоремы,

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_x(\Delta_y z)}{\Delta y} = f'_y(x + \Delta x,\ y) - f'_y(x,\ y).$$

Таким образом, равенство (45) принимает вид:

$$f'_y(x + \Delta x,\ y) - f'_y(x,\ y) = \Delta x\, [f''_{xy}(x, y) + \varepsilon'] \tag{45'}$$

или, после деления на Δx,

$$\frac{f'_y(x + \Delta x,\ y) - f'_y(x,\ y)}{\Delta x} = f''_{xy}(x,\ y) + \varepsilon'. \tag{46}$$

Первое слагаемое правой части этого равенства, т. е. $f''_{xy}(x, y)$, — величина постоянная относительно Δx, а ε' стремится к нулю вместе с Δx, так как Δy уже положено равным нулю. Следовательно, предел левой части при Δx, стремящемся к нулю, существует,

а этот предел, согласно определению, и есть $f''_{yx}(x, y)$. Таким образом из равенства (46) имеем

$$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y), \tag{47}$$

т. е. порядок дифференцирования не влияет на результат.

Предложение остаётся в силе и для высших частных производных, если функция имеет их и если эти высшие производные непрерывны. Докажем, например, что

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x\, \partial y}.$$

По смыслу обозначения и по доказанному соотношению (47) имеем:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x\, \partial y}.$$

Пример.

$$z = a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2 + a_3 y^3.$$

Частные производные первого порядка представляются в следующем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = a_1 x^2 + 2a_2 xy + 3a_3 y^2.$$

Находим теперь частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6a_0 x + 2a_1 y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 2a_1 x + 2a_2 y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = 2a_1 x + 2a_2 y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2a_2 x + 6a_3 y.$$

Мы видим действительно, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

Частные производные второго порядка функции двух переменных принято обозначать ещё следующим образом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

§ 11. Высшие частные и полные дифференциалы.

Частные и полные дифференциалы функции нескольких переменных, например двух, $z = f(x, y)$, являются функциями тех же переменных и могут быть снова дифференцируемы; при этом, если аргументы x, y — независимые переменные, то их дифференциалы dx, dy не зависят от x и y и при дальнейшем дифференцировании

рассматриваются как постоянные. Таким образом, вводя соответствующие обозначения для частных и полных дифференциалов высших порядков, будем иметь:

$$\left.\begin{gathered} d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx, \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\,dy; \\ d_x d_x z = d_x^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2, \quad d_x d_y z = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy, \\ d_y d_x z = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy, \quad d_y d_y z = d_y^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \end{gathered}\right\} \tag{48}$$

Точно так же для полных дифференциалов получим:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

$$\frac{\partial dz}{\partial x}\,dx = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dy\right)dx,$$

$$\frac{\partial dz}{\partial y}\,dy = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy;$$

$$ddz = d^2 z = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy,$$

или (при выполнении условий § 10)

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \tag{49}$$

Тот же результат можно получить также не с помощью сложения частных дифференциалов от dz, а оперируя по общим правилам дифференцирования, которые одинаково относятся и к полным дифференциалам, т. е. составляя сумму полных дифференциалов отдельных слагаемых. Так, из второго полного дифференциала (49) мы получим этим способом $d^3 z$:

$$d^3 z = dd^2 z = d\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2d\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\cdot dx\,dy + d\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot dy^2$$

или

$$d^3 z = \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dy\right)dx^2 + \\ + 2\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dy\right)dx\,dy + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy\right)dy^2,$$

откуда

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3. \tag{50}$$

Выражения (49) и (50) можно представить символически следующим образом:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z, \quad d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Символы $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, не имеющие самостоятельного значения, при раскрытии скобок рассматриваются как дроби; ∂x, ∂y, dx и dy рассматриваются каждое как одно количество, а после раскрытия скобок z при умножении приписывается в числителях к степени буквы ∂. Это же правило распространяется и на высшие дифференциалы. Так,

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z,$$

откуда, применяя указанное правило раскрытия, получим

$$d^nz = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n + n\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + \\ + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n.$$

Если аргументы x, y не суть независимые переменные, а являются сами некоторыми функциями других независимых переменных ξ, η, ..., то dx и dy уже нельзя рассматривать как постоянные: они будут зависеть в общем случае от ξ, η, ..., именно, через посредство частных производных x и y по ξ, η, ... Действительно,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta + \ldots, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta + \ldots$$

Если x и y суть линейные функции ξ, η, ..., то

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta}, \ldots, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta}, \ldots$$

будут постоянными, а вместе с тем будут постоянными в этом исключительном случае и dx, dy.

Итак, пусть

$$z = f(x, y) \text{ и } x = x(\xi, \eta, \ldots), \ y = y(\xi, \eta, \ldots).$$

Будем обозначать символом $d^n[z]$ полный дифференциал n-го порядка этой функции, если аргументы её зависят от новых переменных, сохраняя обозначение d^nz для n-го дифференциала той же функции, когда такой зависимости её аргументов не предполагается.

Полные дифференциалы первого порядка $d[z]$ и dz имеют одинаковый вид:

$$d[z] = dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Но дальнейшее дифференцирование вносит уже разницу:

$$d^2[z] = \left[d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial z}{\partial x}\,ddx\right] + \left[d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial z}{\partial y}\,ddy\right]$$

или

$$d^2[z] = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dy\right)dx + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \\ + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y,$$

откуда

$$d^2[z] = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y,$$

или

$$d^2[z] = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^2 z + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y.$$

Сравнивая с формулой второго дифференциала d^2z, мы заметим, что к прежнему выражению второго дифференциала прибавляются члены, содержащие вторые дифференциалы аргументов:

$$d^2[z] = d^2z + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y.$$

Таким же способом можно получить $d^3[z]$, $d^4[z]$ и т. д.

§ 12. Теорема Эйлера об однородных функциях.

Функцию нескольких переменных $f(x, y, z, \ldots)$ называют ***однородной*** *относительно этих переменных, если при умножении всех переменных на какое-либо число t функция получает множителем некоторую степень t,* т. е. если

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = t^m f(x, y, z, \ldots). \qquad (51)$$

Число m называют *показателем однородности.* Так, функции

$$x^2 - 3xy + y^2, \quad \sqrt{xy} - x + \frac{z^2}{x}, \quad \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

будут однородными; показатель однородности первой равен 2, второй 1, а третьей 0.

В равенстве (51) аргументы $x, y, z, \ldots, t$ являются независимыми переменными. Функции $f(tx, ty, tz, \ldots)$ и $t^m f(x, y, z, \ldots)$ по определению тождественны, поэтому и частные производные их по переменному t тождественны. Но первая из этих функций является сложной функцией t:

$$f(tx, ty, tz, \ldots) = f(u, v, w, \ldots), \qquad (52)$$

где $u = tx$, $v = ty$, $w = tz$, ... Таким образом из равенства (51) будем иметь:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \ldots = mt^{m-1} f(x, y, z, \ldots),$$

или

$$x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v} + z\frac{\partial f}{\partial w} + \ldots = mt^{m-1} f(x, y, z, \ldots).$$

Это равенство справедливо при всяком значении t. Полагая $t = 1$ и принимая во внимание, что

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{t=1} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{t=1} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{t=1} = \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots,$$

получим

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots = mf(x, y, z, \ldots), \tag{53}$$

т. е. *сумма частных производных однородной функции, умноженных на соответственные переменные, равна произведению самой функции на показатель однородности.*

Это предложение и составляет теорему Эйлера об однородных функциях.

Пример.

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z).$$

На основании теоремы Эйлера по сокращении на 2 получим следующее тождество:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)z =$$
$$= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy.$$

УПРАЖНЕНИЯ.

I. Явные функции нескольких независимых переменных.

1. Найти частные производные и полный дифференциал функций:

а) $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$, б) $z = x^3 + y^2 - xy$, в) $u = \sin(ax + by + cz)$,

г) $u = \sqrt{xy} - x + \frac{z^2}{x}$, д) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$,

е) $u = x^3 + 2x^2y + 3xz^2 + z^3 - 3xyz + 2x - y + z - 6$.

Отв. а) $dz = x\,dx + y\,dy$; б) $dz = (2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy$;

в) $du = (a\,dx + b\,dy + c\,dz)\cos(ax + by + cz)$;

г) $du = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} - 1 - \frac{z^2}{x^2}\right)dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,dy + \frac{2z}{x}\,dz$;

д) $dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$; е) $\frac{\partial u}{\partial z} = 6xz + 3z^2 - 3xy + 1$.

2. Определить второй дифференциал функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Отв. $d^2z = \frac{2xy\,(dx^2 - dy^2) + 2\,(y^2 - x^2)\,dx\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$.

3. Отделяя действительную часть u и мнимую v функции $(x + iy)^3 - (x + iy)^2 + 1$, где $i = \sqrt{-1}$, показать, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

II. Сложные функции.

1. Полагая $x = t\cos\alpha + a$, $y = t\sin\alpha + b$, найти первую и вторую производные по t сложной функции $f(x, y)$.

Отв. $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$;

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha.$$

2. Пусть $y = \varphi(x)$. Составить полную производную по x функции $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Отв. $\frac{dz}{dx} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$.

3. Составить первый и второй дифференциалы сложной функции

$$z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2),$$

где $y = \varphi(x)$.

Отв. $dz = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{(x + yy')\,dx}{x^2 + y^2}$.

$$d^2z = \frac{y^2 - x^2 - 4xyy' + (x^2 - y^2)\,y'^2 + (x^2 + y^2)\,yy''}{(x^2 + y^2)^2}\,dx^2.$$

4. Предполагая, что функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные не только для действительных значений z, но и для комплексных $z = x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$, доказать, что действительная и мнимая части этой функции u и v удовлетворяют соотношениям (ср. прим. 3, I):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Указание. Эти соотношения вытекают из равенств, получаемых при дифференцировании $f(z)$ по x и y, с одной стороны, как сложной функции, и, с другой, — как суммы $u+iv$.

III. Дифференцирование неявных функций.

1. Функция y определена уравнением:

$$\text{а)}\ \sqrt{x^2+y^2}-xy=1, \quad \text{б)}\ e^y+x^2e^{-y}-4x=0.$$

Найти производную y'.

Отв. а) $y'=\dfrac{y\sqrt{x^2+y^2}-x}{y-x\sqrt{x^2+y^2}}$, б) $y'=\dfrac{4-2xe^{-y}}{e^y-x^2e^{-y}}$.

2. Найти частные производные функции z, определённой уравнением

$$xyz-x-y-z=0.$$

Отв. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-yz}{xy-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1-xz}{xy-1}$.

3. Составить уравнение касательной плоскости в точке (x_1, y_1, z_1) к гиперболоиду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Отв. $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}-\dfrac{zz_1}{c^2}=1$.

ГЛАВА V.

МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

§ 1. Максимум и минимум функции двух независимых переменных. Изыскание тех значений аргумента, при которых функция может иметь максимум или минимум.

Функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ имеет в точке (a, b) максимум или минимум, если приращение её

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) \qquad (1)$$

сохраняет постоянный знак при всех возможных значениях Δx, Δy, не выводящих точки $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ из достаточно малой окрестности точки (a, b). Если, например, Δz сохраняет постоянный знак при

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \leqslant \rho,$$

где ρ — данное наперёд достаточно малое положительное число, то $f(a, b)$ будет наибольшим или наименьшим из всех возможных значений функции $f(x, y)$ внутри круга, описанного из точки (a, b), как центра, радиусом ρ.

Если приращение Δz постоянно отрицательно, то значение функции $f(a, b)$ будет максимумом:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) < 0$$

и, следовательно,

$$f(a, b) > f(a + \Delta x, b + \Delta y);$$

а если Δz положительно, то $f(a, b)$ будет минимумом:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) > 0$$

и, следовательно,

$$f(a, b) < f(a + \Delta x, b + \Delta y).$$

Положим

$$x = a + t\cos\alpha, \quad y = b + t\sin\alpha, \qquad (2)$$

где t — новое независимое переменное, а α, a и b — постоянные. Функция $f(x, y)$ будет сложной функцией одного переменного t. Так как

$$\Delta x = \Delta t \cos\alpha \quad \text{и} \quad \Delta y = \Delta t \sin\alpha,$$

то Δt будет гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами Δx и Δy, а α — углом наклона этой гипотенузы к положительному направлению оси абсцисс. При α постоянном и t, меняющемся от отрицательных значений к положительным, точка (x, y) перемещается по прямой в плоскости xOy, проходя при $t = 0$ через точку (a, b).

Если $f(a, b)$ — максимум или минимум функции $f(x, y)$, то $f(a, b)$ есть также максимум или минимум функции $f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)$ в любом направлении. Но сложная функция $f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)$ для данного значения α может иметь максимум или минимум при $t = 0$, если

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

Найдём эту производную. Принимая во внимание равенство (2), имеем:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha. \tag{3}$$

Поэтому координаты a и b точки максимума или минимума функции $f(x, y)$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha = 0 \tag{4}$$

при всяких значениях α, т. е. a и b должны удовлетворять уравнениям [1])

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{4'}$$

Решая эту систему двух уравнений с двумя неизвестными, мы найдём одну или несколько пар значений x и y, т. е. те точки (a, b), в которых функция $f(x, y)$ может иметь максимум или минимум.

Условия (4') геометрически означают, что касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (a, b, c), где $c = f(a, b)$, параллельна плоскости xOy.

§ 2. Условия существования максимума или минимума функции двух независимых переменных.

Будем теперь предполагать, что в точке (a, b) существуют вторые частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, причём смешанная про-

[1]) Полагая $\alpha = 0$ или $\alpha = \frac{\pi}{2}$, из уравнения (4) получаем уравнения (4').

изводная $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ существует также в некоторой окрестности точки (a, b) и непрерывна в самой этой точке (так что согласно доказанному в § 10 гл IV, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ существует в точке (a, b) и совпадает с $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$).

Покажем, что для того, чтобы при этих условиях действительно существовал максимум или минимум функции $f(x, y)$ в точке (a, b), достаточно, чтобы $\frac{d^2 f}{dt^2}$ в точке (a, b) ни при каком значении α не обращалась в нуль.

Вычислим прежде всего $\frac{d^2 f}{dt^2}$ [1]). Применяя правило дифференцирования сложной функции к правой части формулы (3) и принимая во внимание равенства (2), получаем:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha. \qquad (5)$$

Теперь из сделанных нами предложений следует (см. стр. 140—141), что $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ дифференцируемы в точке (a, b). Так как, кроме того, они по предположению обращаются в этой точке в нуль, то имеем:

$$\frac{\partial f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\sin\alpha + \eta_1\right)t,$$

$$\frac{\partial f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\alpha + \eta_2\right)t,$$

где η_1 и η_2 стремятся к нулю вместе с t. Поэтому

$$\frac{df(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)}{\partial y}\sin\alpha =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha + \right.$$

$$\left. + \eta_1\cos\alpha + \eta_2\sin\alpha\right)t = \left(\frac{d^2 f}{dt^2} + \eta\right)t, \qquad (6)$$

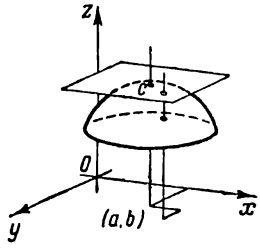
где $\eta = \eta_1\cos\alpha + \eta_2\sin\alpha$; так как $|\eta| \leqslant |\eta_1| + |\eta_2|$, то η стремится к нулю вместе с t равномерно относительно α.

---

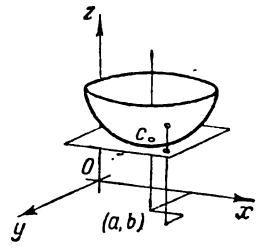
[1]) Всюду, где при производных не указаны значения аргументов, будем предполагать, что соответствующая производная взята в точке (a, b).

По предположению, $\frac{d^2f}{dt^2}$ ни при каком значении α не обращается в нуль. Но, как показывает равенство (5), $\frac{d^2f}{dt^2}$ есть непрерывная функция α. Так как α можно считать изменяющимся в замкнутом интервале $(0, 2\pi)$, то заключаем из сказанного, что существует такое положительное число μ, что $\frac{d^2f}{dt^2} > \mu$ для всех α, если $\frac{d^2f}{dt^2}$ сохраняет положительный знак, либо $\frac{d^2f}{dt^2} < -\mu$ для всех α, если $\frac{d^2f}{dt^2}$ сохраняет отрицательный знак. Выбирая ρ столь малым, чтобы при $|t| \leqslant \rho$ выполнялось неравенство $|\eta| < \mu$, получаем тогда из (6), что знак $\frac{df(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)}{dt}$ при $|t| < \rho$ и любых α совпадает со знаком t, если $\frac{d^2f}{dt^2}$ сохраняет положительный знак, либо противоположен знаку t, если $\frac{d^2f}{dt^2}$ сохраняет отрицательный знак.

Отсюда следует, что внутри круга, описанного около центра (a, b) радиусом ρ, по направлению любого диаметра от одного конца до



Черт. 24.



Черт. 25.

другого функция $f(x, y)$ переходит в центре (a, b), смотря по знаку второй производной её по t, или от возрастания к убыванию, или от убывания к возрастанию, т. е. полное приращение

$$\Delta z = f(a + \Delta x,\ b + \Delta y) - f(a,\ b)$$

сохраняет внутри круга (ρ) постоянный знак.

Геометрически это означает, что поверхность $z = f(x, y)$ вокруг точки (a, b, c) в достаточной от неё близости расположена по одну сторону касательной плоскости: под нею в случае максимума (черт. 24), над нею — в случае минимума (черт. 25).

Исследуем теперь вопрос, при каком же условии вторая производная

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\alpha \qquad (7)$$

сохраняет один и тот же знак, не обращаясь в нуль ни при каком значении угла α. Всякий трёхчлен вида

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2$$

(в котором $A \neq 0$) можно преобразовать следующим образом, умножив и разделив его на коэффициент при h^2 и дополняя первые два члена до полного квадрата:

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{A^2h^2+2ABhk+B^2k^2+ACk^2-B^2k^2}{A},$$

или

$$Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2}{A}.$$

Точно так же преобразовывается и трёхчлен (7):

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\sin\alpha\right)^2+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\sin^2\alpha}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}. \qquad (8)$$

Первое слагаемое числителя этого выражения, как квадрат, есть неотрицательное число. Поэтому знак второй производной $f(x, y)$ по t зависит от второго члена числителя и от знака знаменателя.

Условия максимума или минимума. Если при $x=a$ и $y=b$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0,$$

то вторая производная сохраняет отрицательный знак, не обращаясь в нуль ни при каком значении угла α, и, следовательно, $f(a, b)$ будет максимумом.

Если при $x=a$ и $y=b$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0,$$

то вторая производная $\frac{d^2f}{dt^2}$ сохраняет положительный знак и, следовательно, $f(a, b)$ будет минимумом.

Точки поверхности $z=f(x, y)$, для которых

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0,$$

называют *эллиптическими*; изгиб поверхности около такого типа точки — такого же вида (черт. 24, 25), как у эллипсоида (в частности у шара) или эллиптического параболоида.

Пример 1. Определить максимум или минимум функции

$$z=-x^2-y^2+4x+2y-2.$$

Решение. Находим частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x + 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Максимум или минимум функции возможен при тех значениях аргументов, при которых первые частные производные обращаются в нуль:

$$-2x + 4 = 0, \quad -2y + 2 = 0;$$

отсюда

$$x = 2, \quad y = 1.$$

Вычисляем значение функции при этих значениях аргументов:

$$z = f(2, 1) = -2^2 - 1^2 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 = 3.$$

Так как при всяких значениях независимых переменных, а стало быть и при $x = 2$ и $y = 1$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0 \text{ и } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 < 0,$$

то $z = 3$ будет максимумом рассматриваемой функции.

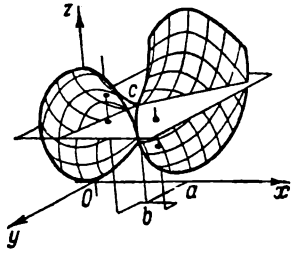
Задача. Определить вид поверхности, заданной уравнением

$$z = -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 2.$$

Условие, при котором нет ни максимума, ни минимума. Если при $x = a$, $y = b$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 < 0,$$

то трёхчлен (7) при двух значениях $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. в двух направлениях обращается в нуль; область около точки (a, b) этими направлениями разделяется на две пары вертикальных углов: в направлениях одной области вторая производная имеет отрицательный знак, и функция $f(x, y)$ переходит в точке (a, b) от возрастания к убыванию, в направлениях другой — положительный, и $f(x, y)$ переходит от убывания к возрастанию. Таким образом, есть пути, переводящие точку (x, y) через точку (a, b) из одного угла в смежный, по которым функция $f(x, y)$ всё время возрастает или всё время убывает. Следовательно, $f(a, b)$ не будет ни максимумом, ни минимумом. Поверхность $z = f(x, y)$ пересекает касательную плоскость в точке (a, b) по линии, две ветви которой выходят из точки прикосновения.



Черт. 26.

Точки поверхности, для которых

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 < 0,$$

называют *гиперболическими*. Изгиб поверхности около такой точки седлообразный (черт. 26), подобно изгибу однополостного гиперболоида или гиперболического параболоида [т. I. стр. 224, 226].

Пример 2. Выяснить, имеет ли максимум или минимум функция

$$z = x^2 - y^2 - 4x + 2y + 6.$$

Решение. Находим частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y + 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Находим те значения x и y, при которых возможен максимум или минимум:

$$2x - 4 = 0, \quad -2y + 2 = 0;$$

отсюда

$$x = 2 \text{ и } y = 1.$$

Значение функции

$$f(2, 1) = 2^2 - 1^2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 6 = 3$$

не будет ни максимумом, ни минимумом, так как при всяких значениях x и y, а стало быть и при $x = 2$ и $y = 1$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 2 \cdot (-2) - 0 = -4 < 0.$$

Задача. Определить вид поверхности, определяемой уравнением

$$z = x^2 - y^2 - 4x + 2y + 6.$$

Неопределённый случай. Если при $x = a$, $y = b$

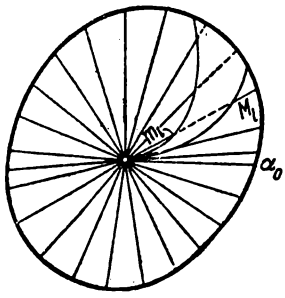
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0,$$

то вторая производная функции $f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)$ по t сохраняет один и тот же знак, одинаковый со знаком производной $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ $\left(\text{или, всё равно, } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$, но обращается в нуль при одном значении угла $\alpha = \alpha_0$. Эти данные недостаточны, чтобы сделать определённое заключение о том, будет ли $f(a, b)$ максимумом или минимумом функции $f(x, y)$, или ни тем, ни другим. Здесь возможен каждый из этих случаев.

Действительно, возможно, что вторая производная $\frac{d^2 f}{dt^2}$ обращается в нуль лишь при $t = 0$ и $\alpha = \alpha_0$, сохраняя вокруг точки (a, b) постоянный знак; в таком случае $f(a, b)$ обязательно будет максимумом или минимумом. Но возможно также, что в любой как угодно малой области около точки (a, b) имеются такие значения t и α, при которых $\frac{d^2 f}{dt^2}$ обращается в нуль, причём $f(a + t\cos\alpha, b + t\sin\alpha)$ испытывает перегиб. Тогда может случиться, что в непрерывном ряде направлений, выходящих из точки (a, b) и бесконечно приближающихся к направлению $\alpha = \alpha_0$, существуют непрерывно переходящие друг в друга максимумы или минимумы функции $f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)$.

От закона изменения этих максимумов и минимумов относительно величины $c = f(a, b)$ и зависит вопрос, будет ли $f(a, b)$ максимумом или минимумом функции двух независимых переменных, или ни тем, ни другим.

Особенно интересным представляется тот возможный при этих условиях случай, когда функция $f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)$ во всех направлениях, т. е. для всякого значения α имеет максимум (или минимум) при $t = 0$ и тем не менее $f(a, b)$ не будет максимумом (соотв. минимумом) функции двух независимых переменных $f(x, y)$. А именно, может случиться, что в направлениях, достаточно близких к направлению $\alpha = \alpha_0$, функция $f(a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)$, начиная от $t = 0$, сначала убывает, потом в некотором интервале (m_i, M_i) возрастает и потом снова убывает и т. д., а при приближении α к α_0 интервал (m_i, M_i) становится бесконечно малым, и обе точки m_i и M_i совпадают с точкою (a, b) при $\alpha = \alpha_0$ (черт. 27). Пусть x_i, y_i — координаты точки M_i. Если



Черт. 27.

$$f(x_i, y_i) > f(a, b),$$

то мы и будем иметь этот на первый взгляд парадоксальный случай. Таким образом, чтобы функция $f(x, y)$ имела максимум в точке (a, b), недостаточно, чтобы она во всех направлениях имела максимум в этой точке, т. е. чтобы функция $f\ (a + t\cos\alpha,\ b + t\sin\alpha)$ для всякого значения α при $t = 0$ имела максимум. Другими словами, выражаясь топографически, из того, что из данной точки A горной поверхности во всех азимутах идут тропинки вниз, не следует, что точка A — вершина горы; нужно добавить для этого, что этот начальный спуск вниз по всякой тропинке продолжается на некотором конечном протяжении, не стремящемся с переменой азимута к нулю, а не переходит через все меньшие промежутки в новый подъём.

Следующий пример иллюстрирует указанную возможность.

Пример 3. Имеет ли максимум или минимум функция

$$z = -(x^2 + y)(x^2 + 2y), \text{ или } z = -x^4 - 3x^2y - 2y^2? \qquad (\alpha)$$

Находим частные производные первого и второго порядков:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -4x^3 - 6xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 - 4y; \qquad (\beta)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -12x^2 - 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4. \qquad (\gamma)$$

При $x = 0$, $y = 0$ частные производные первого порядка (β) обращаются в нуль; соответствующее значение функции равно нулю: $f(0, 0) = 0$. Следовательно, плоскость xOy касается поверхности в начале координат.

Исследуем теперь вопрос, будет ли $f(0, 0) = 0$ максимумом или минимумом или ни тем и ни другим. Так как

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = 0\cdot(-4) - 0 = 0,$$

то рассматриваемый случай представляется сомнительным.

Исследуем изменение функции во всех направлениях, исходящих из начала координат, полагая $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$:

$$z = -t^4\cos^4\alpha - 3t^3\cos^2\alpha\sin\alpha - 2t^2\sin^2\alpha, \qquad (\text{б})$$

$$\frac{dz}{dt} = -4t^3\cos^4\alpha - 9t^2\cos^2\alpha\sin\alpha - 4t\sin^2\alpha, \qquad (\text{в})$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -12t^2\cos^4\alpha - 18t\cos^2\alpha\sin\alpha - 4\sin^2\alpha. \qquad (\text{г})$$

Так как

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{t=0} = -4\sin^2\alpha,$$

то при $\alpha \neq 0$ и π значение $f(0, 0) = 0$ будет максимумом переменной величины z как функции t. Для направления $\alpha = 0$ при переменном t имеем:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{\alpha=0} = -4t^3, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_{\substack{\alpha=0\\t<0}} > 0, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_{\substack{\alpha=0\\t>0}} < 0.$$

Следовательно, при $t = 0$ функция z в направлении $\alpha = 0$ переходит от возрастания к убыванию. Таким образом, во всех направлениях значение $z = 0$ будет максимумом функции

$$z = -t^4\cos^4\alpha - 3t^3\cos^2\alpha\sin\alpha - 2t^2\sin^2\alpha;$$

и тем не менее $z = 0$ не будет максимумом функции двух независимых переменных

$$z = -x^4 - 3x^2y - 2y^2.$$

Действительно, производная функции z по t для данного направления $\alpha \neq 0$ и π три раза обращается в нуль при следующих значениях t:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = -\frac{\sin\alpha}{8\cos^2\alpha}(9 - \sqrt{17}) \quad \text{и} \quad t_3 = -\frac{\sin\alpha}{8\cos^2\alpha}(9 + \sqrt{17}),$$

при этом

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{t=t_1} < 0, \quad \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{t=t_2} > 0, \quad \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_{t=t_3} < 0$$

$$\text{и} \quad t_3 - t_2 = -\frac{\sqrt{17}\sin\alpha}{4\cos^2\alpha}.$$

Следовательно, z, как функция t, в интервале (t_1, t_2) убывает, в интервале (t_2, t_3) возрастает, а далее снова убывает; но интервал $t_3 - t_2$ при α, стремящемся к нулю, стремится также к нулю. Кроме того,

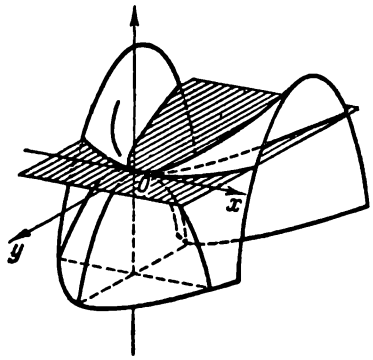
$$(z)_{t=t_3} = -\operatorname{tg}^4\alpha\left(\frac{9+\sqrt{17}}{8}\right)^2\left[\left(\frac{9+\sqrt{17}}{8}\right)^2 - 3\cdot\frac{9+\sqrt{17}}{8} + 2\right]$$

или

$$(z)_{t=t_3} = \operatorname{tg}^4\alpha\left(\frac{9+\sqrt{17}}{8}\right)^2\frac{6\sqrt{17}-10}{64} > 0.$$

При α, стремящемся к нулю, $(z)_{t=t_3}$, оставаясь положительным, т. е. большим $(z)_{t=0}$, стремится также к нулю и таким образом $z=0$ не является максимумом функции $z=-x^4-3x^2y-2y^2$, так как в сколь угодно малой области около точки (0, 0) имеются такие направления α, близкие к α_0, в которых

$$(z)_{t=t_3}>(z)_{t=0}.$$



Черт. 28.

Касательная плоскость $z=0$ поверхности, соответствующей рассматриваемой функции, пересекает эту поверхность по линии

$$(x^2+y)(x^2+2y)=0,$$

которая распадается на две параболы:

$$x^2+y=0 \text{ и } x^2+2y=0.$$

Эти параболы расположены одна внутри другой и касаются друг друга в их общей вершине. На черт. 28 можно видеть, в каких областях плоскости этих парабол функция z имеет положительные и в каких — отрицательные значения.

Давая независимому переменному x различные значения, мы будем получать сечения рассматриваемой поверхности, плоскостями, параллельными плоскости yOz, и так как уравнение этого сечения можно представить в виде

$$\left(y+\frac{3}{4}x^2\right)^2=-\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{8}x^4\right),$$

то поверхность является геометрическим местом парабол с общим параметром $\left(p=\frac{1}{4}\right)$, опирающихся в своём перемещении на параболы

$$x^2+y=0 \text{ и } x^2+2y=0.$$

Эти результаты исследования и приняты во внимание при изображении поверхности на черт. 28.

Точки поверхности $z=f(x, y)$, для которых

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2=0,$$

называют *параболическими*. Изгиб поверхности около таких точек может быть и седлообразным, и не седлообразным.

§ 3. Максимум и минимум функции многих переменных.

Задача нахождения максимума или минимума функции многих переменных

$$u=f(x, y, z, \ldots) \tag{9}$$

может быть решена так же, как и для функции двух переменных, путём исследования изменения её в различных направлениях. Полагая

$$x=a+t\cos\alpha,\ y=b+t\cos\beta,\ z=c+t\cos\gamma,\ \ldots, \tag{10}$$

где t — новое переменное, а a, b, c, ... и α, β, γ, ... — постоянные, мы из данной функции (9) многих переменных получим функцию одного независимого переменного t:

$$u = f(a + t\cos\alpha,\ b + t\cos\beta,\ c + t\cos\gamma, \ldots).$$

Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ..., связанные соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \ldots = 1, \tag{11}$$

определяют направление изменения точки $(x, y, z, \ldots)$.

Для того чтобы функция u при $t = 0$, иначе в точке $(a, b, c, \ldots)$, в данном направлении имела максимум или минимум, необходимо, чтобы $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$, и достаточно, чтобы

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{t=0} \neq 0. \tag{12}$$

Вычисляя эти производные, будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \ldots, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta + \ldots$$

$$\ldots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\cos\beta + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\cos\alpha\cos\gamma + \ldots \tag{14}$$

Если во всяком направлении функция u имеет максимум или минимум, необходимо, чтобы выражение (13) обращалось в нуль при всяких значениях $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ..., удовлетворяющих соотношению (11), а это возможно, лишь если одновременно будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \ldots \tag{15}$$

Таким образом для нахождения тех значений независимых переменных, при которых функция u может иметь максимум или минимум, мы имеем достаточное число уравнений (15). Пусть $(a, b, c, \ldots)$ — одно из решений этой системы уравнений. Если при этих значениях независимых переменных выражение (14) сохраняет постоянный знак, не обращаясь в нуль ни при каких значениях α, β, γ, ..., то $f(a, b, c, \ldots)$ будет максимумом при отрицательном знаке этого выражения и минимумом при положительном [1]).

[1]) Это утверждение верно при некоторых дополнительных предположениях относительно функции $f(x, y, z, \ldots)$. Достаточно, например, предположить, что её частные производные второго порядка непрерывны в точке $(a, b, c, \ldots)$.

Если выражение (14) принимает и положительные, и отрицательные значения, то $f(a, b, c, \ldots)$ не будет ни максимумом, ни минимумом, ибо есть пути изменения переменных $x, y, z, \ldots$, ведущие через точку $(a, b, c, \ldots)$, в которых функция или всё время возрастает, или всё время убывает.

Случай, когда выражение (14) сохраняет постоянный знак, достигая в некоторых направлениях нуля, является сомнительным, и вопрос о максимуме или минимуме функции $u = f(x, y, z, \ldots)$ в точке $(a, b, c, \ldots)$ остаётся нерешённым, требуя дополнительного исследования.

По умножении выражений (13) и (14) соответственно на dt и dt^2 получим первый и второй дифференциалы исследуемой функции:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \ldots, \tag{13'}$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \ldots, \tag{14'}$$

так как

$$\cos\alpha\, dt = \frac{dx}{dt} dt = dx, \quad \cos\beta\, dt = \frac{dy}{dt} dt = dy, \ldots$$

Таким образом, достаточные условия существования максимума или минимума функции многих переменных принимают такой же вид, как и для функции одного независимого переменного:

$$du = 0, \quad d^2u \neq 0, \tag{16}$$

причём эти условия должны иметь место при всяких значениях дифференциалов $dx, dy, dz, \ldots$, одновременно не равных нулю. В силу этого из равенства $du = 0$ мы получаем систему уравнений (15). Из этих уравнений определяются те значения аргументов, при которых исследуемая функция может иметь максимум или минимум, а исследование знака второго дифференциала d^2u при найденных значениях аргументов и любых значениях дифференциалов $dx, dy, \ldots$, одновременно не равных нулю, решает вопрос, какой случай в данной точке имеет место.

Примечание. В этом первоначальном исследовании задачи о максимуме и минимуме функции предполагается, что второй дифференциал не равен тождественно нулю, т. е. не все вторые частные производные при найденных значениях аргументов обращаются в нуль.

Пример 1. Способ наименьших квадратов. Рассмотрим в качестве примера отыскания максимума или минимума функции многих переменных так называемый способ наименьших квадратов, применяемый для решения эмпирически полученных уравнений, число которых превышает число неизвестных. Будем рассматривать этот способ в применении к определению трёх неизвестных x, y и z. Пусть подлежит непосредственному измерению некоторая функция l этих трёх величин, зависящая, кроме того, от некоторого параметра t:

$$l = F(x, y, z, t).$$

Каждому значению параметра t соответствует одно наблюдение, один результат измерения. Практическое значение параметра может быть различно: в астрономии, например, t обозначает время — каждое наблюдение имеет определённую дату. Для определения трёх неизвестных x, y, z нужно иметь три независимых уравнения; следовательно, трёх наблюдений было бы, вообще говоря, достаточно для этой цели. Соответственно трём различным значениям параметра мы получили бы три различных независимых уравнения:

$$l_1 = f_1(x, y, z), \quad \text{где } f_1(x, y, z) = F(x, y, z; t_1),$$
$$l_2 = f_2(x, y, z), \quad \text{где } f_2(x, y, z) = F(x, y, z; t_2),$$
$$l_3 = f_3(x, y, z), \quad \text{где } f_3(x, y, z) = F(x, y, z; t_3).$$

Если бы измерения были абсолютно точны, то всякое новое наблюдение давало бы уравнение, являющееся следствием этих трёх и потому было бы лишним. Но каждое наблюдение, каждое измерение в силу несовершенства приборов и наших чувств содержит ту или иную случайную погрешность. Чтобы возможно более избежать одностороннего влияния таких ошибок, нужно произвести измерения в возможно большем числе и использовать их наиболее выгодным образом.

Положим, сделано n измерений величины l соответственно n значениям параметра $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$. Полученные результаты измерений $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$ в силу случайных ошибок измерения не будут точными соответствующими значениями величины l. Пусть такими точными значениями будут: $l_1+\varepsilon_1, l_2+\varepsilon_2, l_3+\varepsilon_3, \ldots, l_n+\varepsilon_n$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$ и будут случайные неизвестные нам положительные или отрицательные погрешности измерения. Таким образом мы получим n уравнений, связывающих $n+3$ неизвестных x, y, z и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= l_1 + \varepsilon_1, \\ f_2(x, y, z) &= l_2 + \varepsilon_2, \\ f_3(x, y, z) &= l_3 + \varepsilon_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x, y, z) &= l_n + \varepsilon_n. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Но если бы мы пренебрегли неизвестными нам погрешностями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$, то имели бы, вообще говоря, n несовместимых уравнений с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= l_1, \\ f_2(x, y, z) &= l_2, \\ f_3(x, y, z) &= l_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x, y, z) &= l_n. \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Значения неизвестных x, y, z, полученные при решении каких-либо трёх из этих уравнений, вообще говоря, не удовлетворяют остальным. Точных значений отсюда и нельзя найти, а можно говорить лишь о том, каким способом всего выгоднее использовать эту начальную систему уравнений (β).

Будем считать x, y, z независимыми переменными. В таком случае величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$, определяемые системой уравнений (α):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= f_1(x, y, z) - l_1, \\ \varepsilon_2 &= f_2(x, y, z) - l_2, \\ \varepsilon_3 &= f_3(x, y, z) - l_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n &= f_n(x, y, z) - l_n. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha')$$

будут функциями x, y, z (переменными величинами). Раньше мы их считали неизвестными определёнными погрешностями измерения. Будем продолжать и теперь называть их «погрешности», хотя мы и изменили смысл их значения. По теории вероятностей вероятнейшими значениями x, y, z являются те, при которых сумма квадратов «погрешностей» принимает наименьшее значение:

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2+\ldots+\varepsilon_n^2=\text{минимум}$$

или

$$[f_1(x, y, z)-l_1]^2+[f_2(x, y, z)-l_2]^2+\ldots$$
$$\ldots+[f_n(x, y, z)-l_n]^2=\text{минимум}. \qquad (\gamma)$$

В этой гипотезе до известной степени выражена мысль, что при возможной тщательности измерения абсолютная величина истинной погрешности не может быть велика. Таким образом мы имеем теперь вполне определённую и разрешимую задачу: отыскать минимум функции (γ), которую назовём P.

Положим, что функции $f_i(x, y, z)$ $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ — линейные, т. е. первой степени относительно x, y, z, так что начальная система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z-l_1&=0,\\ a_2x+b_2y+c_2z-l_2&=0,\\ a_3x+b_3y+c_3z-l_3&=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ a_nx+b_ny+c_nz-l_n&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (\beta')$$

а функция P, т. е. сумма квадратов погрешностей, определяется таким выражением:

$$P(x, y, z)=\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_iy+c_iz-l_i)^2. \qquad (\gamma')$$

Для нахождения минимума функции P по предыдущему нужно приравнять нулю частные производные её:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}=0. \qquad (\delta)$$

Таким образом получаем так называемую нормальную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}2a_i(a_ix+b_iy+c_iz-l_i)&=0,\\ \sum_{i=1}^{n}2b_i(a_ix+b_iy+c_iz-l_i)&=0,\\ \sum_{i=1}^{n}2c_i(a_ix+b_iy+c_iz-l_i)&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (\delta')$$

которую после приведения можно, пользуясь обозначением Гаусса, представить в виде

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z-[al]&=0,\\ [ba]\,x+[bb]\,y+[bc]\,z-[bl]&=0,\\ [ca]\,x+[cb]\,y+[cc]\,z-[cl]&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (\delta'')$$

где

$$\left.\begin{aligned} [aa] &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2, \\ [ab] = [ba] &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n, \\ [ac] = [ca] &= a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + \ldots + a_nc_n, \\ [al] = [la] &= a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3 + \ldots + a_nl_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

Нормальная система состоит из трёх уравнений с тремя неизвестными, откуда и определяются вероятнейшие значения неизвестных x_0, y_0 и z_0.

При этих значениях x, y, z сумма квадратов погрешностей будет минимумом. Действительно, полагая $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\cos\beta$, $z = z_0 + t\cos\gamma$, где α, β, γ связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \qquad (\zeta)$$

найдём, что вторая производная функции P по t не зависит от t:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{\partial^2P}{\partial x^2}\cos^2\alpha + \frac{\partial^2P}{\partial y^2}\cos^2\beta + \frac{\partial^2P}{\partial z^2}\cos^2\gamma + \\ + 2\frac{\partial^2P}{\partial y\,\partial z}\cos\beta\cos\gamma + 2\frac{\partial^2P}{\partial z\,\partial x}\cos\gamma\cos\alpha + 2\frac{\partial^2P}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\cos\beta. \qquad (\eta)$$

Так как

$$\frac{\partial^2P}{\partial x^2} = [aa] = \sum a_i^2, \quad \frac{\partial^2P}{\partial y^2} = [bb] = \sum b_i^2, \quad \frac{\partial^2P}{\partial z^2} = [cc] = \sum c_i^2,$$

$$\frac{\partial^2P}{\partial y\,\partial z} = [bc] = \sum b_ic_i, \quad \frac{\partial^2P}{\partial z\,\partial x} = [ca] = \sum c_ib_i, \quad \frac{\partial^2P}{\partial x\,\partial y} = [ab] = \sum a_ib_i,$$

то выражение (η) можно представить в виде суммы квадратов:

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \sum(a_i\cos\alpha + b_i\cos\beta + c_i\cos\gamma)^2$$

и, следовательно, при всяких значениях α, β, γ, удовлетворяющих соотношению (ζ), т. е. во всех направлениях вторая производная сохраняет положительную величину, ни в одном направлении не обращаясь в нуль [1]).

Примечание. Если непосредственно измеряется величина x [2]) и получены результаты n измерений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, то по способу наименьших квадратов наивероятнейшее значение x будет то, при котором

$$z = (x - l_1)^2 + (x - l_2)^2 + \ldots + (x - l_n)^2 = \text{минимум}.$$

---

[1]) Если только среди троек (a_i, b_i, c_i) нет двух, например, $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$, от которых всякая другая линейно зависит, т. е. $a_i = \lambda_ia_1 + \mu_ia_2$, $b_i = \lambda_ib_1 + \mu_ib_2$, $c_i = \lambda_ic_1 + \mu_ic_2$ $(i = 3, 4, \ldots, n)$. Но и в этом случае существует минимум, как ясно из самой задачи: положительная функция $P(x, y, z)$, очевидно, неограниченно возрастающая при $|x| + |y| + |z| \to \infty$, должна достигать минимума в конечной части пространства (x, y, z).

[2]) Так что имеет место как раз случай, отмеченный в предыдущей сноске: здесь $a_i = 1$ и $b_i = c_i = 0$ для всех i. Поэтому $\frac{d^2P}{dt^2} = n\cos^2\alpha$, что при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ обращается в нуль.

Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{dz}{dx} = 2(x - l_1) + 2(x - l_2) + \ldots + 2(x - l_n) = 0,$$

или

$$nx = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n;$$

отсюда

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n}{n},$$

т. е. наивероятнейшим значением будет среднее арифметическое результатов непосредственных измерений.

Пример 2. Пусть x_1, y_1, z_1 — результаты непосредственных измерений трёх углов треугольника. Определить наивероятнейшие величины этих углов x, y, z.

Решение. Искомые величины связаны соотношением

$$x + y + z = 180^\circ \qquad (\alpha)$$

и потому неизвестными можно считать лишь две величины, например x и y. Таким образом результаты измерения дают систему погрешностей:

$$x - x_1 = \varepsilon_1,$$

$$y - y_1 = \varepsilon_2,$$

$$x + y - (180^\circ - z_1) = \varepsilon_3.$$

По способу наименьших квадратов сумма квадратов этих погрешностей при наивероятнейших значениях x и y имеет минимум:

$$P(x, y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + [x + y - (180^\circ - z_1)]^2 = \text{минимум}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2(x - x_1) + 2[x + y - (180^\circ - z_1)] = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(y - y_1) + 2[x + y - (180^\circ - z_1)] = 0,$$

или

$$2x + y = 180^\circ + x_1 - z_1,$$

$$x + 2y = 180^\circ + y_1 - z_1,$$

откуда

$$x = x_1 + \frac{180^\circ - (x_1 + y_1 + z_1)}{3},$$

$$y = y_1 + \frac{180^\circ - (x_1 + y_1 + z_1)}{3},$$

и в силу соотношения (α)

$$z = z_1 + \frac{180^\circ - (x_1 + y_1 + z_1)}{3}.$$

Таким образом каждый из результатов измерения должен быть увеличен или уменьшён на одну треть общего недостатка или избытка $180^\circ - (x_1 + y_1 + z_1)$.

Пусть, например, $x_1 = 62^\circ 10'$, $y_1 = 40^\circ 30'$ и $z_1 = 77^\circ 22'$. Общий избыток $x_1 + y_1 + z_1 - 180^\circ = 2'$. Следовательно, от x_1, y_1, z_1 нужно отнять по $40''$:

$$x = 62^\circ 9' 20'', \quad y = 40^\circ 29' 20'', \quad z = 77^\circ 21' 20''.$$

§ 4. Относительный максимум или минимум.

Максимум или минимум функции нескольких аргументов, связанных какими-либо соотношениями, называют *относительным*, в отличие от *абсолютного* максимума или минимума, который может иметь та же функция при свободном изменении её аргументов. Так, аппликата полусферы

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \tag{17}$$

с центром в начале координат и радиусом, равным R, при свободном изменении аргументов x и y имеет абсолютный максимум $z = R$ соответственно высшей точке шара. Но если изменения аргументов x и y стеснены уравнением

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \quad p < R, \tag{18}$$

то точка полусферы (17) будет перемещаться по линии её пересечения с вертикальной плоскостью (18), отстоящей от центра на расстояние, равное p, т. е. по вертикальному полукругу радиуса $\sqrt{R^2-p^2}$. Следовательно, относительным максимумом функции (17) при условии (18) будет аппликата высшей точки этого полукруга, т. е. $\sqrt{R^2-p^2}$. Если $p = 0$, то относительный максимум рассматриваемой функции (17) совпадает с абсолютным.

Пусть разыскивается максимум или минимум функции $m+n$ переменных

$$u = f(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m), \tag{19}$$

причём аргументы $x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m$ связаны m соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m) &= 0, \\ \varphi_2(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \varphi_m(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Таким образом из аргументов $x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m$ независимыми будут, вообще говоря, только n переменных, например $x, y, \ldots$, а m аргументов $u_1, u_2, \ldots, u_m$ можно рассматривать как неявные функции, определённые системой уравнений (20). Если бы систему уравнений (20) мы могли решить относительно аргументов $u_1, u_2, \ldots, u_m$, то, вставляя в равенство (19) вместо $u_1, u_2, \ldots, u_m$ найденные выражения, мы свели бы задачу отыскания относительного максимума или минимума функции (19) $m+n$ переменных к отысканию абсолютного максимума или минимума функции n переменных.

Но можно, не решая предварительно системы уравнений (20), а рассматривая данную функцию (19) как сложную, составить все те уравнения, которые необходимы для решения поставленной задачи.

Те значения независимых переменных, при которых данная функция может иметь максимум или минимум, должны обращать в нуль частные производные функции u по независимым переменным $x, y, \ldots$, которые входят и явно и через посредство переменных $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Следовательно, искомые значения переменных $x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m$ должны удовлетворять системе уравнений (20) и уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial y}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Входящие в систему уравнений (21) частные производные функций u_1, $u_2, \ldots, u_m$ (предполагаемые существующими) могут быть найдены как производные неявных функций из уравнений (20):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial y}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где i принимает значения $1, 2, \ldots, m$.

Таким образом задача отыскания относительного максимума или минимума функции (19) приводит к решению системы $m+n+mn$ уравнений (20), (21) и (22) относительно $m+n+mn$ неизвестных

$$x,\ y,\ \ldots,\ u_i,\ \frac{\partial u_i}{\partial x},\ \frac{\partial u_i}{\partial y},\ \ldots \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

из которых mn величин

$$\frac{\partial u_i}{\partial x},\ \frac{\partial u_i}{\partial y},\ \ldots \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

подлежит исключению.

Можно комбинировать уравнения (21) и (22) так, чтобы посторонних, исключаемых величин было меньше, именно, вместо mn только m. Действительно, по умножении уравнений системы (21) соответственно на $dx, dy, \ldots$ и сложении получим полный дифференциал данной функции, приравненный нулю:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial f}{\partial u_2}du_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial u_m}du_m=0. \tag{23}$$

Точно так же из уравнений (22) будем иметь:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}du_2+\ldots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m}du_m=0 \tag{24}$$

$$(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m).$$

Из $m+1$ уравнений (23) и (24), вообще говоря, можно исключить m величин, именно m дифференциалов $du_1, du_2, \ldots, du_m$. Получим таким образом уравнение, содержащее только дифференциалы независимых переменных:

$$A\,dx + B\,dy + \ldots = 0, \tag{25}$$

где A, B, ... являются определёнными функциями переменных $x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m$. Так как $dx, dy, \ldots$, как дифференциалы независимых переменных, можно рассматривать как произвольные величины [1]), то из соотношения (25) следует

$$A = 0, \quad B = 0, \ldots \tag{25'}$$

Система n уравнений (25′) вместе с системой m уравнений (20) и даёт те значения $m+n$ переменных $x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m$, при которых функция u может иметь максимум или минимум.

Пример. Функция

$$u = x^2 + y^2 + u_1^2,$$

где переменные x, y, u_1 связаны соотношением

$$x + y + u_1 - p = 0, \tag{α}$$

сохраняет положительное значение, не обращаясь в нуль; следовательно, она имеет минимум. Определить этот минимум.

Полный дифференциал данной функции u и полный дифференциал левой части соотношения (α) приравниваем нулю:

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2u_1\,du_1 = 0,$$
$$dx + dy + du_1 = 0.$$

По исключении du_1 получим:

$$(x - u_1)\,dx + (y - u_1)\,dy = 0,$$

откуда

$$x - u_1 = 0, \; y - u_1 = 0. \tag{β}$$

Из уравнений (α) и (β) находим те значения x, y, u_1, при которых функция u имеет минимум:

$$u_1 = \frac{p}{3}, \quad x = \frac{p}{3}, \quad y = \frac{p}{3}, \quad \text{минимум } u = \frac{p^2}{3}.$$

§ 5. Метод Лагранжа для решения вопроса об относительном максимуме или минимуме.

Задачу определения относительного максимума или минимума можно свести к задаче отыскания абсолютного максимума или минимума по методу Лагранжа путём введения неопределённых множителей. Составим функцию

$$U(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m, \tag{26}$$

[1]) Если $dx, dy, \ldots$ — произвольные величины, то они могут принимать системы значений 1, 0, 0, ..., или 0, 1, 0, ..., или 0, 0, 1, 0, ... и т. д., которые и приводят уравнение (25) к системе уравнений (25′).

где f — исследуемая функция (19), φ_1, φ_2, ..., φ_m — левые части уравнений (20), связывающих аргументы x, y, ..., u_1, u_2, ..., u_m, а λ_1, λ_2, ..., λ_m — неопределённые пока постоянные множители; φ_1, φ_2, ..., φ_m мы пока не считаем равными нулю.

Отыскание абсолютного максимума или минимума функции U при свободном изменении переменных x, y, ..., u_1, u_2, ..., u_m требует решения уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\frac{\partial f}{\partial u_i}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_i}+\lambda_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial u_i}+\ldots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m}{\partial u_i}=0\\ &(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

и исследования при найденных значениях аргументов знака второго дифференциала

$$d^2U=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\ldots+\frac{\partial}{\partial u_1}du_1+\frac{\partial}{\partial u_2}du_2+\ldots+\frac{\partial}{\partial u_m}du_m\right)^2U,$$

или

$$d^2U=d^2f+\lambda_1d^2\varphi_1+\lambda_2d^2\varphi_2+\ldots+\lambda_md^2\varphi_m, \qquad (28)$$

где вторые дифференциалы d^2f, $d^2\varphi_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ взяты в предположении свободного изменения аргументов x, y, ..., u_1, u_2, ..., u_m, т. е. не принимая во внимание уравнений (20) § 4.

Значения аргументов, получаемые при решении уравнений (27), зависят от постоянных λ_1, λ_2, ..., λ_m; обозначим эти значения через x^*, y^*, ..., u_1^*, u_2^*, ..., u_m^*:

$$\left.\begin{aligned} x^*&=x^*(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m),\\ y^*&=y^*(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ u_i^*&=u_i^*(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m)\\ &(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Выберем теперь значения постоянных множителей λ_1, λ_2, ..., λ_m так, чтобы найденные значения аргументов (29) удовлетворяли соотношениям (20):

$$\varphi_i(x^*,\ y^*,\ \ldots,\ u_1^*,\ u_2^*,\ \ldots,\ u_m^*)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (30)$$

Из этих m уравнений, где x^*, y^*, ..., u_1^*, u_2^*, ..., u_m^* представляют выражения (29), найдём требуемые значения m постоянных множителей λ_1, λ_2, ..., λ_m.

Если при найденных значениях множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и аргументов $x^*, y^*, \ldots, u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$ второй дифференциал d^2U при свободном изменении дифференциалов $dx, dy, \ldots, du_1, du_2, \ldots$ $\ldots, du_m$, одновременно не равных нулю, сохраняет постоянный знак, то величина $U(x^*, y^*, \ldots, u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*)$ будет абсолютным максимумом или минимумом функции U.

Но та же величина будет и относительным максимумом или минимумом функции $u=f$. Действительно, прежде всего в силу условий (30) имеем:

$$U(x^*, y^*, \ldots, u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*) = f(x^*, y^*, \ldots, u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*). \quad (31)$$

Далее, величины $x^*, y^*, \ldots, u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$ принадлежат к тем значениям аргументов $x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m$, которые удовлетворяют уравнениям (20) и которые, следовательно, обращают в нуль полные дифференциалы функций φ:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m}du_m = 0 \quad (32)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

а удовлетворяя в то же время уравнениям (27), они тем самым обращают в нуль и полный дифференциал функции $u=f$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}du_m = 0 \quad (33)$$

($du_1, du_2, \ldots, du_m$ — дифференциалы неявных функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$, определяемых уравнениями (20)). Таким образом величины $x^*, y^*, \ldots$ $\ldots, u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$, удовлетворяя уравнениям (32) и (33), будут теми значениями аргументов, при которых может иметь максимум или минимум функция $u = f(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m)$.

Наконец, для окончательного решения вопроса о максимуме или минимуме функции $u = f(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ надо исследовать знак второго дифференциала d^2u, взятого в предположении, что u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ суть функции независимых переменных $x, y, \ldots$:

$$d^2[u] =$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial}{\partial u_2}du_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial u_m}du_m\right)^2 f +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial u_1}d^2u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}d^2u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}d^2u_m$$

или, короче,

$$d^2[f] = d^2f + \frac{\partial f}{\partial u_1}d^2u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}d^2u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}d^2u_m, \quad (34)$$

где символом $d^2[f]$ мы отмечаем второй дифференциал функции f,

взятый в предположении, что $u_1, u_2, \ldots, u_m$ зависят от $x, y, \ldots$, а символом d^2f — второй дифференциал без такой зависимости. Кроме того, должны иметь место получаемые дифференцированием уравнений (20) условия

$$d^2[\varphi_i] = d^2\varphi_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_1} d^2u_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_2} d^2u_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_m} d^2u_m = 0 \quad (35)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Из равенств (34) и (35), если принять во внимание равенства (27), следует:

$$d^2[f] = d^2f + \lambda_1 d^2\varphi_1 + \lambda_2 d^2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m d^2\varphi_m. \quad (36)$$

Правая часть этого выражения второго дифференциала $d^2[f]$ не зависит от вторых дифференциалов d^2u_1, d^2u_2, $\ldots$, d^2u_m и имеет такое же строение, как и второй дифференциал d^2U, с тем только отличием, что дифференциалы du_1, du_2, $\ldots$, du_m в выражении (36) зависят от дифференциалов dx, dy, $\ldots$, а в выражении (28) не зависят.

Таким образом, если при $x^*, y^*, \ldots, u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$ и свободном изменении дифференциалов $dx, dy, \ldots, du_1, du_2, \ldots, du_m$ второй дифференциал d^2U сохраняет постоянный знак, не обращаясь в нуль, то и второй дифференциал $d^2[f]$ сохраняет тот же знак, т. е. абсолютный максимум или минимум функции U будет в то же время и относительным максимумом или минимумом функции $u = f(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Но обратное заключение было бы неверно. Если d^2U при свободном изменении дифференциалов $dx, dy, \ldots, du_1, du_2, \ldots, du_m$ не сохраняет постоянного знака, то нельзя заключить, что и $d^2[f]$ не сохраняет постоянного знака: при стеснённых равенствами (32) изменениях дифференциалов $dx, dy, \ldots, du_1, du_2, \ldots, du_m$ выражение (36) может сохранять постоянный знак и функция $f(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m)$ может иметь максимум или минимум, хотя бы функция U и не имела его.

Таким образом задача об относительном максимуме или минимуме функции $u = f(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m)$, аргументы которой связаны соотношениями (20), может быть сведена к задаче об абсолютном максимуме или минимуме функции $U = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$, причём соотношениями (20) приходится пользоваться для определения множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и при дополнительном исследовании знака второго дифференциала $d^2[f]$ в том случае, если функция U при найденных значениях аргументов $x^*, y^*, \ldots, u_1^*, u_2^*, \ldots, u_m^*$ и свободном изменении переменных не имеет ни максимума, ни минимума.

Вместо определения множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ из уравнений (20) лучше во многих случаях исключить их, пользуясь уравнениями (27) и (20). В таком случае приходится исследовать знак второго дифференциала $d^2[f]$ в первоначальном виде (34), не зависящем от множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Пример 1. Найти максимум произведения $u = x_1 x_2 \dots x_n$, если среднее арифметическое множителей $x_1, x_2, \dots, x_n$ сохраняет постоянную величину s:

$$u = x_1 x_2 x_3 \dots x_n, \tag{\alpha}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - ns = 0. \tag{\beta}$$

Решение. Отыскание относительного максимума функции u при данном условии (β) по правилу Лагранжа сводится к отысканию абсолютного максимума функции

$$U = x_1 x_2 x_3 \dots x_n + \lambda (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n - ns). \tag{\gamma}$$

Полагаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= x_2 x_3 \dots x_n + \lambda = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= x_1 x_3 \dots x_n + \lambda = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial U}{\partial x_n} &= x_1 x_2 \dots x_{n-1} + \lambda = 0, \end{aligned}\right\} \tag{\delta}$$

откуда получаем:

$$-x_1 x_2 x_3 \dots x_n = \lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda x_3 = \dots = \lambda x_n, \tag{\varepsilon}$$

т. е. произведение u может иметь максимум или минимум, когда множители равны между собой и стало быть каждый из них равен s:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = s.$$

Из равенств (δ) следует тогда, что $\lambda = -s^{n-1}$.

Вопрос, будет ли при этих значениях множителей произведение $x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ максимумом или минимумом, зависит от знака второго дифференциала $d^2[u]$. Обозначая левую часть равенства (β) через φ, согласно равенству (3б) будем иметь:

$$d^2[u] = d^2 u + \lambda d^2 \varphi, \quad \text{или} \quad d^2[u] = d^2 u,$$

так как φ — первой степени относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$, и $d^2\varphi = 0$.

Таким образом нужно исследовать знак второго дифференциала d^2u при всех возможных значениях дифференциалов $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$, одновременно не равных нулю и удовлетворяющих вытекающему из условия (β) уравнению

$$dx_1 + dx_2 + \dots + dx_n = 0. \tag{\zeta}$$

Но непосредственным дифференцированием убеждаемся в том, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = x_3 x_4 \dots x_n, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} = x_2 x_4 \dots x_n, \dots,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n} = x_1 x_2 \dots x_{n-2}.$$

Следовательно, при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = s$ будем иметь:

$$(d^2 u)_s = 2s^{n-2} [dx_1 dx_2 + dx_1 dx_3 + \dots + dx_{n-1} dx_n]. \tag{\eta}$$

Если бы вопрос заключался в том, имеет ли функция u абсолютный максимум или минимум или нет, то ответ был бы отрицательный, ибо квадратичная форма (η) не при всяких значениях дифференциалов $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ сохраняет один и тот же знак. Но наша задача — в отыскании относительного максимума функции u при условии (β). Это условие стесняет изменение дифференциалов равенством (ζ), из которого получаем:

$$(dx_1 + dx_2 + \ldots + dx_n)^2 = 0$$

и

$$2(dx_1dx_2 + dx_1dx_3 + \ldots + dx_{n-1}dx_n) = -(dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2).$$

Следовательно, при данном условии второй дифференциал $d^2[u]$ сохраняет постоянно отрицательный знак:

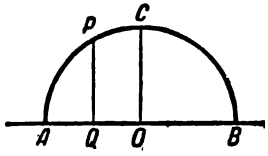
$$d^2[u]_s = -s^{n-2}(dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2)$$

и потому произведение $x_1x_2x_3 \ldots x_n$ при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = s$ имеет максимум:

$$s^n \geqslant x_1x_2x_3 \ldots x_n. \qquad (\theta)$$

Обобщённое среднее геометрическое. Решённая здесь задача может служить основанием доказательства предложения о среднем арифметическом положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и их обобщённом среднем геометрическом $\sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$. Известно, что среднее арифметическое двух положительных чисел больше среднего геометрического их и лишь при равенстве этих чисел оба средних равны между собой. Предложение это для двух чисел x_1 и x_2 вытекает из очевидного неравенства $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geqslant 0$ или $x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1x_2} \geqslant 0$, откуда и получаем

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2}.$$



Черт. 29.

Если рассматривать x_1, x_2 как отрезки, то предложение очевидно и геометрически. Пусть $AQ = x_1$, $QB = x_2$ (черт. 29). Построив на отрезке $AB = AQ + QB$ как на диаметре окружность и восставив из центра её O и точки Q перпендикуляры OC и QP до пересечения с окружностью, будем иметь:

$$OC = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad QP = \sqrt{x_1x_2};$$

но

$$OC \geqslant QP, \quad \text{или} \quad \frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2}.$$

Это предложение можно обобщить на сколько угодно положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Действительно, из равенства (θ) следует:

$$s \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n} \quad \text{или} \quad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}.$$

Знак равенства имеет место, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Пример 2. Точка A (черт. 30) с координатами (x, y) перемещается по окружности с центром на оси ординат на расстоянии b от начала и радиусом, равным r. При каком положении точки A площадь прямоугольника, сторонами которого служат координаты этой точки, будет наибольшей?

Решение. По условию задачи требуется найти максимум функции

$$z = xy, \tag{α}$$

аргументы которой удовлетворяют уравнению окружности

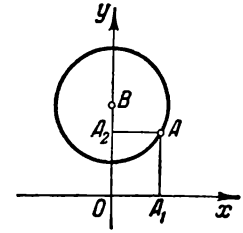
$$x^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0. \tag{β}$$

По способу Лагранжа нужно найти абсолютный максимум функции

$$z = xy + \lambda[x^2 + (y - b)^2 - r^2]. \tag{γ}$$

Обращая частные производные этой функции в нуль, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= y + 2\lambda x = 0, \quad \text{или} \quad y = -2\lambda x, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= x + 2\lambda(y - b) = 0, \quad \text{или} \quad x = -2\lambda(y - b). \end{aligned}\right\} \tag{δ}$$



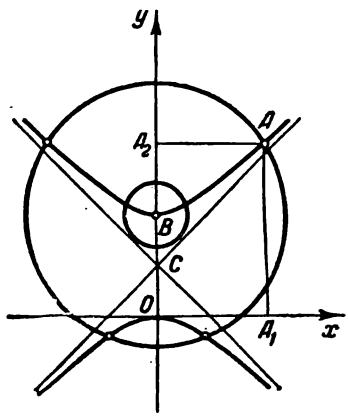
Черт. 30.

Из этих уравнений почленным делением исключаем λ:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y - b}, \text{ или } x^2 - y^2 + by = 0. \tag{ε}$$

Таким образом те значения аргументов, при которых функция $z = xy$ может иметь относительный максимум или минимум, определяются уравнениями (β) и (ε):

$$x^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0,$$
$$x^2 - y^2 + by = 0.$$



Черт. 31.

Четыре решения этих уравнений второй степени могут быть найдены последовательным решением квадратных уравнений. Так, исключая почленным вычитанием x, находим:

$$2y^2 - 3by + b^2 - r^2 = 0. \tag{ζ}$$

Корни y_1 и y_2 уравнения (ζ) могут быть построены с помощью циркуля и линейки, и две прямые, отстоящие от оси абсцисс на расстояния, равные y_1 и y_2, пересекают данную окружность в искомых точках.

Ещё лучше можно представить положение искомых точек, рассматривая их как точки пересечения данной окружности (β) и кривой (ε) (черт. 31). Эта последняя — равносторонняя гипербола, т. е. гипербола с взаимно перпендикулярными асимптотами. Центр её (x_0, y_0) и направления асимптот определяются по правилам, изложенным в гл. V аналитической геометрии (т. I, стр. 128 и сл.):

$$x_0 = 0, \; y_0 = \frac{b}{2}; \quad 1 - k^2 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1.$$

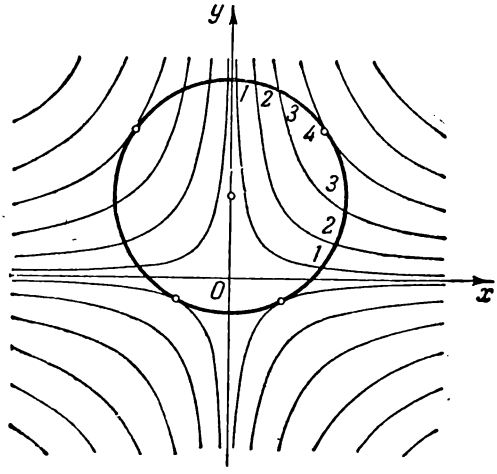
В уравнение равносторонней гиперболы (ε) не входит радиус данной окружности. Таким образом, каков бы ни был радиус данной окружности при одном и том же положении её центра, положение искомых точек на этой окружности определяется пересечением её с тою же гиперболой (ε).

Будет ли найденным точкам соответствовать максимум или минимум функции $z = xy$, этот вопрос очень просто решается следующей геометрической интерпретацией. Будем считать z параметром. Определённому значению z_1 этого параметра соответствует равносторонняя гипербола

$$z_1 = xy,$$

асимптотами которой являются оси координат. При движении точки по такой гиперболе площадь xy остаётся **постоянной**. Различным значениям z соответствует ряд таких гипербол с общими асимптотами (черт. 32):

$$z_1 = xy,\ z_2 = xy,\ z_3 = xy, \ldots$$



Черт. 32.

Через каждую точку окружности проходит одна из гипербол этого ряда, и если гипербола **пересекает** в этой точке данную окружность, то точка пересечения не может соответствовать ни максимуму, ни минимуму площади xy, ибо при перемещении точки по окружности в одну сторону мы встретим гиперболы, соответствующие бо́льшим площадям, а в обратную сторону — меньшим. Но если гипербола **касается** данной окружности, то точка прикосновения и будет искомою.

Ясно геометрически, что если точка прикосновения лежит в первой или третьей четверти, на которые делится плоскость осями координат, то xy для этих точек будет максимумом, а точке прикосновения во второй или четвёртой соответствует минимум (xy отрицательно).

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

Функция нескольких переменных. Частные производные. Частные и полные дифференциалы. 1. Что такое частная производная, частный и полный дифференциал и какое геометрическое значение они имеют в случае двух независимых переменных? 2. Что такое сложная функция и в чём заключается правило дифференцирования её? 3. В каком случае приходится различать частную и полную производные функции по одному и тому же переменному? 4. Что такое неявная функция и как находятся производные её? 5. При каких условиях результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования? 6. В каких случаях при составлении полных дифференциалов высших порядков дифференциалы аргументов рассматриваются как постоянные и в каких — как функции независимых переменных? 7. Что такое однородная функция и в чём заключается теорема Эйлера об однородных функциях?

Максимум и минимум. 1. В чём заключаются условия существования максимума или минимума функции нескольких переменных? 2. Как находятся те значения независимых переменных, при которых исследуемая функция может иметь максимум или минимум? 3. При каких условиях при найденных значениях аргументов функция будет иметь: а) максимум, б) минимум или

в) не будет иметь ни максимума, ни минимума? 4. Что такое относительный максимум или минимум функции? 5. Какими методами может быть решён вопрос об относительном максимуме или минимуме и в чём эти методы состоят?

УПРАЖНЕНИЯ.

I. Абсолютные максимумы и минимумы.

1. Найти максимум или минимум функции $z = x^3 + y^3 - axy + b$.
Отв. $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = b$ — ни максимум, ни минимум;

$$x_2 = \frac{a}{3}, \quad y_2 = \frac{a}{3}, \quad z_2 = b = \frac{a^3}{27} \text{ — минимум.}$$

2. Найти минимум или максимум функции $z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$, где $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, и определить вид поверхности, соответствующей этому уравнению.

Отв. а) При $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ $z_0 = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}$, где x_0, y_0 — координаты центра кривой пересечения поверхности с плоскостью xOy, будет максимумом, если $a_{11} < 0$, и минимумом, если $a_{11} > 0$ (эллиптический параболоид).

б) Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то нет ни максимума, ни минимума (гиперболический параболоид).

3. В плоскости треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ найти точку $M(x, y)$, сумма расстояний которой от вершин, т. е. сумма $MA + MB + MC$, была бы наименьшей.

Отв. $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$.

4. В плоскости треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ найти такую точку $N(x, y)$, чтобы сумма квадратов расстояний её от вершин, т. е. сумма $AN^2 + BN^2 + CN^2$, была наименьшей.

$$\text{Отв. } x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

5. Какой формы должен быть прямоугольный параллелепипед, объём которого дан ($V = a^3$), чтобы поверхность его была наименьшей?
Отв. Куб.

II. Относительные максимумы и минимумы.

1. Какой из прямоугольных параллелепипедов, вписанных в шар радиуса r, имеет наибольший объём?
Отв. Куб.

2. Какой из равновеликих круглых цилиндров имеет наименьшую полную поверхность?
Отв. Цилиндр, вписанный в куб.

3. Требуется построить водовместилище на данное число вёдер в форме открытого прямого круглого цилиндра. При каком отношении глубины его к диаметру дна устройство будет наиболее дешёвым, а) если стоимость работы и материала за квадратную единицу боковой поверхности и дна одна и та же? б) если квадратная единица боковой поверхности стоит b руб., а квадратная единица дна d руб.?
Отв. а) Высота вдвое меньше диаметра. б) Отношение глубины к диаметру дна равно $d : 2b$.

4. Даны окружность с центром в точке $C(a, b)$ и радиусом, равным r, и, кроме того, две точки $A(a_1, b_1)$ и $B(a_2, b_2)$. Точка $P(x, y)$ перемещается

по данной окружности. Показать, что если сумма $\overline{PA}+\overline{PB}$ имеет наименьшее или наибольшее значение, то радиус окружности $\overline{CP}$ делит пополам угол APB.

Указание. Если α_1, α_2 — углы наклона к положительному направлению оси абсцисс двух сторон угла, и α — угол наклона к той же оси биссектрисы этого угла, то будем иметь:

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2=k\cos\alpha,\quad \sin\alpha_1+\sin\alpha_2=k\sin\alpha, \tag{а}$$

где k — коэффициент пропорциональности. Это свойство биссектрисы вытекает из рассмотрения проекций на оси координат ломаной, состоящей из двух звеньев, одинаково наклонённых к замыкающей.

Из данных условий задачи по методу Лагранжа приходим к соотношениям (а). Можно применить для решения той же задачи геометрические соображения, рассматривая ряд эллипсов с общими фокусами в точках A и B.

ГЛАВА VI.

ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

§ 1. Нахождение первообразной функции по данной частной производной.

По данной частной производной найти первообразную функцию, как следует из самого способа составления частной производной функции, не представляет для нас новой задачи. Только произвольное постоянное интегрирования мы теперь должны считать произвольной функцией тех независимых переменных, которые считаются постоянными при нахождении рассматриваемой частной производной. Положим, что z есть неизвестная нам функция двух независимых переменных x и y, а частная производная её по x известна:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,\ y).$$

В таком случае

$$z = \int f(x,\ y)\,dx + C(y),$$

где $C(y)$ — произвольная функция y, а y под знаком интеграла при интегрировании рассматривается как постоянное. В самом деле, при поверке дифференцированием мы получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x,\ y),\ \text{ибо}\ \frac{\partial C(y)}{\partial x} = 0.$$

Нахождение первообразной функции по данной частной производной высшего порядка приводит к многократному интегрированию, но каждая ступень такого интегрирования по тем же основаниям не представляет новой задачи и лишь произвольные постоянные интегрирования заменяются произвольными функциями соответствующих независимых переменных.

Так, если

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x,\ y),$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int f(x, y)\,dx + C(y)$$

и

$$z = \int dy \int f(x, y)\,dx + \int C(y)\,dy + C_1(x).$$

Не указывая порядка двукратного интегрирования и обозначая произвольную функцию $\int C(y)\,dy$ [1]) через $C_2(y)$, можно написать полученное решение в следующем виде:

$$z = \int\int f(x, y)\,dx\,dy + C_1(x) + C_2(y),$$

где $C_1(x)$, $C_2(y)$ — произвольные (дифференцируемые) функции.

Таково общее решение поставленной задачи, соответствующее понятию неопределенного интеграла.

Таким образом, при каждом частном интегрировании по одному из переменных произвольное постоянное заменяется произвольной функцией остальных переменных.

Пример 1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2xy + y^2 + 2$. Чему равно z?

Решение. $z = x^3 - x^2y + y^2x + 2x + C(y)$, где $C(y)$ — произвольная функция y.

Пример 2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - 3y + 5$. Определить z.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 3yx + 5x + C(y)$; $z = x^2y - \frac{3}{2}y^2x + 5xy + C_1(y) + C_2(x)$, где $C_1(y)$ — произвольная дифференцируемая функция переменного y, а $C_2(x)$ — произвольная дифференцируемая функция переменного x.

§ 2. Интеграл функции, зависящей от параметра.

Если данная функция $f(x, y)$ находится среди частных производных простых или сложных функций, составленных из функций элементарных, производные коих нам известны, то на символы

$$\int f(x, y)\,dx, \quad \int\left(\int f(x, y)\,dx\right)dy, \ldots$$

можно смотреть как на решения, хотя и невыполненные, поставленной задачи. Но если указанное обстоятельство остается неизвестным и вопрос рассматривается при одном предположении, что $f(x, y)$ — функция непрерывная относительно x и y в рассматриваемой области, то те же символы выражают лишь постановку задачи: по данной частной производной найти первообразную функцию.

---

[1]) Так как $C(y)$ — произвольная функция y, то и $\int C(y)\,dy$ — произвольная функция y, и потому нет нужды выполнять это интегрирование.

Интегрирование как процесс суммирования и здесь, так же, как в случае функций одного независимого переменного, является основанием для установления понятия первообразной функции. Считая одно из переменных, например, y, постоянным и обозначая через a и b два каких-либо определённых значения переменного x, будем иметь по определению

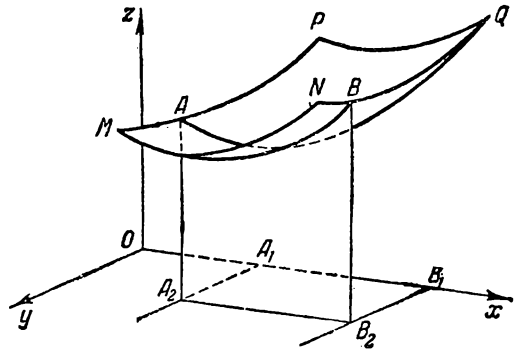
$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y)\,\Delta x, \qquad (1)$$

где

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ и } x_0 = a,\ x_n = b.$$

Будем рассматривать y как параметр. С изменением этого параметра величина определённого интеграла будет меняться, будет функцией параметра:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx. \qquad (2)$$



Черт. 33.

При постоянном значении y график функции $z = f(x, y)$ является линией пересечения соответствующей поверхности $MNQP$ (черт. 33) с плоскостью A_2B_2BA, параллельной плоскости xOz, а определённый интеграл (2) означает геометрически площадь криволинейной трапеции A_2B_2BA, ограниченной этой линией, плоскостью xOy и соответствующими аппликатами A_2A, B_2B. С изменением y эта площадь изменяется, перемещаясь параллельно плоскости xOz.

Пределы интеграла (1), постоянные относительно x, могут зависеть от параметра y. В таком случае интеграл (1) будет представлять уже иную функцию y:

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (3)$$

Точки A_2, B_2 фигуры A_2B_2BA при изменении y будут в этом случае перемещаться не по прямым A_1A_2 и B_1B_2, параллельным оси Oy, а по некоторым кривым (черт. 35, стр. 213), уравнение которых в общем случае

$$x = a(y),\ x = b(y). \qquad (4)$$

Определённые интегралы, рассматриваемые в этом параграфе, суть обыкновенные определённые интегралы (не обобщённые): как было оговорено выше, $f(x, y)$ — непрерывная функция в рассматриваемой области, а пределы a, b или $a(y)$, $b(y)$ конечны.

§ 3. Дифференцирование под знаком интеграла. Правило Лейбница.

Рассмотрим определённый интеграл, зависящий от параметра, который обозначим теперь через α:

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx. \tag{5}$$

Этот интеграл, как мы видели, является функцией параметра α. Возникает вопрос, как составить производную этой функции по переменному α. Общие правила дифференцирования, установленные раньше [т. I, стр. 311], здесь неприменимы непосредственно, ибо самый состав этой функции не принадлежит к тем, к которым относятся эти правила.

Непрерывность функции $\varphi(\alpha)$. Будем предполагать, как и раньше, функцию $f(x, \alpha)$ непрерывной в прямоугольной области $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$.

Рассмотрим два значения параметра α и $\alpha + \Delta\alpha$. Соответствующие значения функции $\varphi(\alpha)$ будут

$$\varphi(\alpha + \Delta\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx$$

и

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

Их разность составит соответственное приращение функции $\varphi(\alpha)$:

$$\varphi(\alpha + \Delta\alpha) - \varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\, dx - \int_a^b f(x, \alpha)\, dx,$$

или

$$\varphi(\alpha + \Delta\alpha) - \varphi(\alpha) = \int_a^b [f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx.$$

Но по условию функция двух независимых переменных $f(x, \alpha)$ — непрерывная, и так как область $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$ — замкнутая и ограниченная, то по свойству равномерной непрерывности (стр. 136)

можно подобрать достаточно малое значение η такое, чтобы при $|\Delta\alpha| < \eta$ во всей этой области имело место неравенство

$$|f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

где ε — наперёд данное сколь угодно малое положительное число. В таком случае

$$|\varphi(\alpha+\Delta\alpha) - \varphi(\alpha)| \leqslant \int_a^b |f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)|\, dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon.$$

Таким образом, разность $\varphi(\alpha+\Delta\alpha) - \varphi(\alpha)$ есть величина бесконечно малая и, следовательно, функция $\varphi(\alpha)$ в рассматриваемом интервале непрерывна.

Дифференцирование функции $\varphi(\alpha)$. Будем теперь предполагать, что функция $f(x, \alpha)$ в рассматриваемой области имеет частную производную по α и что эта производная также непрерывна. По определению имеем:

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha+\Delta\alpha) - \varphi(\alpha)}{\Delta\alpha}.$$

Но

$$\varphi(\alpha+\Delta\alpha) - \varphi(\alpha) = \int_a^b [f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx.$$

По теореме о конечном приращении мы должны иметь

$$f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha) = \Delta\alpha f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha),$$

и, следовательно,

$$\frac{\Delta\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha)\, dx,$$

где

$$f'_\alpha(x, \alpha) = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha} \text{ и } 0 < \theta < 1,$$

причём θ зависит от x. Так как частная производная $f'_\alpha(x, \alpha)$, по условию, — функция непрерывная (а, значит, и равномерно непрерывная в рассматриваемой области), то

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0} f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha) = f'_\alpha(x, \alpha) \text{ или } f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha) = f'_\alpha(x, \alpha) + \delta,$$

где δ — величина, которая остаётся по абсолютной величине меньше любого положительного числа, например $\frac{\varepsilon}{b-a}$, при достаточно малом значении $\Delta\alpha$, например, меньшем числа η:

$$|\delta| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ при } |\Delta\alpha| < \eta.$$

В таком случае мы будем иметь, предполагая a и b постоянными,

$$\frac{\Delta\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha + \theta\Delta\alpha)\,dx = \int_a^b [f'_\alpha(x, \alpha) + \delta]\,dx,$$

или

$$\frac{\Delta\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx + \int_a^b \delta\,dx.$$

Во второй части этого равенства только δ зависит от $\Delta\alpha$ и потому

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx + \lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^b \delta\,dx.$$

Но

$$\left|\int_a^b \delta\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\varphi(\alpha+\Delta\alpha)-\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx.$$

Таким образом дифференцирование функции $\varphi(\alpha)$ сводится к дифференцированию под знаком интеграла:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,dx. \tag{6}$$

В этом и заключается правило Лейбница.

Мы предполагали пределы a и b рассматриваемого определённого интеграла постоянными, не зависящими от параметра α. Положим теперь, что a и b зависят от α:

$$a = a(\alpha), \quad b = b(\alpha).$$

Интеграл

$$\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\,dx$$

будет сложной функцией α: он зависит от α 1) в прежнем смысле, т. е. при посредстве подинтегральной функции $f(x, \alpha)$, и 2) при посредстве верхнего и нижнего пределов:

$$\varphi(\alpha, a, b) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha)\,dx.$$

Дифференцируем функцию $\varphi(\alpha, a, b)$ как сложную функцию (стр. 146):

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}=\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{da}{d\alpha}+\frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{d\alpha},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=-f(a, \alpha),\ \frac{\partial\varphi}{\partial b}=f(b, \alpha).$$

Следовательно,

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}=\int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}\frac{\partial f}{\partial\alpha}dx+f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha}. \tag{7}$$

Предполагается при этом, что функции $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$ имеют производные в рассматриваемом интервале для α.

Дифференцирование под знаком интеграла может служить иногда средством вычисления сложных определённых интегралов.

Пример 1. Полагая $\alpha>0$, будем иметь

$$\int_0^x\frac{dx}{x^2+\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\alpha}}. \tag{a}$$

Подинтегральная функция $(x^2+\alpha)^{-1}$ в области $x\geqslant 0, \alpha>0$ непрерывна относительно x, α и имеет непрерывную производную по α. Следовательно, применимо правило Лейбница:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^x\frac{dx}{x^2+\alpha}=\int_0^x\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{x^2+\alpha}dx.$$

Выполняя это дифференцирование, получим:

$$\int_0^x\frac{dx}{(x^2+\alpha)^2}=\frac{1}{2\alpha\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{2\alpha}\frac{x}{x^2+\alpha}.$$

Дифференцируя равенство (а) $n-1$ раз, получим:

$$\int_0^x\frac{dx}{(x^2+\alpha)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Эти интегралы можно было бы вычислить, предварительно определяя неопределённый интеграл указанным в гл. I, § 3, способом.

Правило Лейбница в случае бесконечных пределов интеграла. Правило Лейбница выведено нами для обыкновенных (не обобщённых) интегралов. Но если подинтегральная функция в пределах интегрирования неограничена или пределы интегрирования бесконечно велики, то необходимы особые условия, при которых это правило остаётся справедливым. Рассмотрим только случай, когда верхний предел бесконечно велик.

Пусть дан интеграл

$$\varphi(\alpha)=\int_a^{\infty} f(x,\alpha)\,dx, \tag{8}$$

где a — постоянное, а функция $f(x, \alpha)$ и её производная по α, т. е. $f'_\alpha(x, \alpha)$, непрерывны в интервале (a, ∞).

Предположим, кроме того, что интеграл $\int_a^{\infty} f'_\alpha(x, \alpha)\,dx$ существует для всех значений параметра α из некоторого интервала (α', α''), причём сходится равномерно относительно α. Под этим мы будем понимать, что для всякого $\varepsilon>0$ существует N такое, что

$$\left|\int_l^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx\right|<\varepsilon \quad \text{при} \quad l>N,$$

каково бы ни было α в интервале (α', α''). Покажем, что при этом дополнительном предположении правило Лейбница остается в силе.

Действительно, разбивая промежуток интеграции (a, ∞) произвольной точкой l на две части, мы можем написать:

$$\frac{\Delta\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha}-\int_a^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx=$$

$$=\int_a^{l}\left[\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}-f'_\alpha(x,\alpha)\right]dx+$$

$$+\int_l^{\infty}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx-\int_l^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx,$$

откуда

$$\left|\frac{\Delta\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha}-\int_a^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_a^{l}\left[\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}-f'_\alpha(x,\alpha)\right]dx\right|+$$

$$+\left|\int_l^{\infty}\frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx\right|+\left|\int_l^{\infty} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx\right|. \tag{9}$$

В силу предположенной равномерной сходимости интеграла $\int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует N' такое, что при $l > N'$ для всех рассматриваемых значений α выполняется неравенство

$$\left| \int_l^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Выберем теперь для l какое-либо фиксированное значение, большее чем N'. Положив

$$\psi(x, \alpha) = \int_l^L f(x, \alpha)\,dx,$$

будем иметь

$$\int_l^L \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx = \frac{\psi(x, \alpha+\Delta\alpha) - \psi(x, \alpha)}{\Delta\alpha} = \psi'_\alpha(x, \alpha_L),$$

где α_L заключено между α и $\alpha+\Delta\alpha$ и не зависит от x. Тогда в силу уже установленного правила Лейбница для интегралов с конечными пределами

$$\int_l^L \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx = \int_l^L f'_\alpha(x, \alpha_L)\,dx =$$

$$= \int_l^\infty f'_\alpha(x, \alpha_L)\,dx - \int_L^\infty f'_\alpha(x, \alpha_L)\,dx.$$

Принимая во внимание (10), получаем отсюда, что

$$\left| \int_l^L \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_l^\infty f'_\alpha(x, \alpha_L)\,dx \right| + \left| \int_L^\infty f'_\alpha(x, \alpha_L)\,dx \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_L^\infty f'_\alpha(x, \alpha_L)\,dx \right|.$$

Так как

$$\int_l^\infty \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx = \lim_{L\to\infty} \int_l^L \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx$$

и, вследствие равномерной сходимости интеграла $\int_l^\infty f'_\alpha(x, \alpha)dx$,

$$\lim_{l\to\infty}\int_L^\infty f'_\alpha(x, \alpha_L)\,dx = 0,$$

то заключаем, что

$$\left|\int_l^\infty \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10'}$$

Наконец, снова в силу правила Лейбница для интегралов с конечными пределами,

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\int_a^l \frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\,dx = \int_a^l f'_\alpha(x, \alpha)dx$$

и потому

$$\left|\int_a^l\left[\frac{f(x, \alpha+\Delta\alpha)-f(x, \alpha)}{\Delta\alpha} - f'_\alpha(x, \alpha)\right]dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{11}$$

для всех $\Delta\alpha$, по абсолютной величине меньших некоторого $\delta > 0$. Сопоставляя неравенства (9), (10), (10') и (11), заключаем, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left|\frac{\Delta\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha} - \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon \text{ при } |\Delta\alpha| < \delta.$$

Следовательно,

$$\lim_{\Delta\alpha\to 0}\left[\frac{\Delta\varphi(\alpha)}{\Delta\alpha} - \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx\right] = 0,$$

или

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha} = \int_a^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx,$$

т. е. правило Лейбница остаётся в силе:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial\alpha}\,dx.$$

Пример 2. Исходя из интеграла Пуассона

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

вычислить интегралы

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx, \quad \int_0^\infty x^4e^{-x^2}\,dx, \ldots, \quad \int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx.$$

Заменяя в интеграле Пуассона x через $x\sqrt{a}$, где $a>0$, получим

$$\sqrt{a}\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \text{ или } \int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по параметру a. Применяя к первой части правило Лейбница, будем иметь

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a\sqrt{a}}.$$

Дифференцируя снова по a, получим

$$\int_0^\infty x^4e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3}{2^2a^2\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \ldots,$$

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^na^n\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Отсюда при $a=1$ будем иметь

$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^\infty x^4e^{-x^2}\,dx = \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \ldots,$$

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-x^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Применение правила Лейбница к рассматриваемым интегралам вполне законно, пока $a\neq 0$, ибо интегралы, полученные после дифференцирования, — равномерно сходящиеся для интервала $a_0\leqslant a<\infty$, где a_0 — любое положительное число, например, равное 1. Действительно,

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \int_0^l x^{2n}e^{-ax^2}\,dx + \int_l^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx.$$

Второй интеграл независимо от величины a при конечном достаточно большом значении l можно сделать сколь угодно малым, ибо [стр. 125]

$$e^{ax^2} > \frac{a^{2n+1}x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \text{ или } e^{-ax^2} < \frac{(2n+1)!}{a^{2n+1}x^{4n+2}},$$

откуда

$$e^{-ax^2}x^{2n} < \frac{(2n+1)!}{a^{2n+1}x^{2n+2}}$$

и

$$\int_l^\infty e^{-ax^2}x^{2n}\,dx < (2n+1)! \int_l^\infty \frac{dx}{a^{2n+1}x^{2n+2}}.$$

Заменяя во втором интеграле ax через y, получим:

$$\int_l^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx < (2n+1)! \int_{al}^\infty \frac{dy}{y^{2n+2}} = (2n)!\,\frac{1}{a^{2n+1}l^{2n+1}},$$

или, так как $a \geqslant a_0$,

$$\int_l^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx < \frac{(2n)!}{a_0^{2n+1}}\,\frac{1}{l^{2n+1}}.$$

Для l можно выбрать настолько большое конечное значение L, что правая часть последнего равенства, не зависящего от параметра a, будет меньше любого, сколь угодно малого положительного числа ε и потому

$$\int_l^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx < \varepsilon \text{ для } 0 < a_0 \leqslant a \text{ и } l \geqslant L.$$

Рассматриваемые интегралы можно было бы свести к интегралу Пуассона интегрированием по частям.

§ 4. Интегрирование по параметру.

Определённый интеграл

$$\varphi(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\,dx,$$

если $f(x, \alpha)$ — непрерывная функция двух независимых переменных x и α, а a и b конечны, является, как мы видели, непрерывной функцией параметра α. Интегрирование этой функции в пределах от α_0 до α приводит нас к двойному интегралу

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \varphi(\alpha)\,d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\,dx. \tag{12}$$

Порядок этих двух интегрирований может быть изменён, иначе говоря, интегрирование по параметру может быть выполнено под знаком интеграла, т. е.

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Действительно, будем рассматривать α в верхнем пределе как переменное. Обозначая $\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha$ через $F(x, \alpha)$, двойной интеграл в левой части через $\Phi(\alpha)$, а двойной интеграл в правой — через $\Phi_1(\alpha)$, будем иметь:

$$\Phi(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx, \quad F(x, \alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha,$$

$$\Phi_1(\alpha) = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha = \int_a^b F(x, \alpha)\, dx,$$

причём

$$\Phi(\alpha_0) = \int_{\alpha_0}^{\alpha_0} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = 0 \quad \text{и} \quad \Phi_1(\alpha_0) = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha_0} f(x, \alpha)\, d\alpha = 0.$$

Но

$$\Phi'(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha = f(x, \alpha),$$

а по правилу Лейбница

$$\Phi_1'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial \alpha}\, dx = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

Следовательно, функции $\Phi(\alpha)$ и $\Phi_1(\alpha)$, имея одинаковые производные и одинаковые значения при $\alpha = \alpha_0$, тождественны:

$$\Phi(\alpha) = \Phi_1(\alpha), \text{ или } \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \int_a^b dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Для обобщённых интегралов — будем рассматривать случай, когда интеграл распространён на бесконечный интервал,—правило остаётся

в силе, если данный интеграл равномерно сходится в конечном интервале (α_0, α_1), ибо правила отыскания $\Phi'(\alpha)$ и $\Phi_1'(\alpha)$ остаются в этом случае законными (§ 3):

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, dx = \int_a^{\infty} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Полученный таким образом интеграл $\int_a^{\infty} F(x, \alpha)\, d\alpha$ будет так же, как и данный, равномерно сходящимся. Действительно, по условию

$$\left| \int_a^{\infty} f(x, \alpha)\, dx - \int_a^{l} f(x, \alpha)\, dx \right| < \varepsilon \text{ при } l \geqslant L,$$

где L не зависит от α, а ε — любое сколь угодно малое положительное число. После интегрирования по параметру α под знаком интеграла будем иметь:

$$\left| \int_a^{\infty} F(x, \alpha)\, dx - \int_a^{l} F(x, \alpha) dx \right| < \varepsilon\, |\alpha - \alpha_0| \leqslant \varepsilon' \text{ при } l \geqslant L,$$

где ε' — положительное число, определяемое равенством

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{|\alpha_1 - \alpha_0|},$$

т. е. интеграл $\int_a^{\infty} F(x, \alpha)\, dx$ — равномерно сходящийся.

Таким образом, интегрирование под знаком интеграла можно повторить сколько угодно раз.

Интегрирование под знаком интеграла так же, как и дифференцирование, может служить средством вычисления определённых интегралов и средством часто удобным, когда общие способы не приводят к цели.

Пример. Вычислить значение интегрального синуса при $x = \infty$, т. е.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Прежде всего имеем (стр. 118)

$$\int_0^{l} e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \left[\frac{e^{-\alpha x} (-\alpha \sin x - \cos x)}{1 + \alpha^2} \right]_0^{l} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha l} (-\alpha \sin l - \cos l)}{1 + \alpha^2} + \frac{1}{1 + \alpha^2}. \qquad (13)$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \lim_{l\to\infty}\int_0^l e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}. \tag{14}$$

Если $\alpha_0 < \alpha < \infty$, где α_0 — сколь угодно малое положительное число, то

$$\left|\int_l^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right| < \int_l^\infty e^{-\alpha_0 x}\,|\sin x|\,dx.$$

Интеграл правой части этого неравенства не зависит от параметра α и при $l \geqslant L$, где L — достаточно большое число, будет меньше любого заданного положительного числа ε. Поэтому интеграл $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx$ равномерно сходится при $\alpha > \alpha_0$.

Интегрируя по α в пределах от α_0 до α, будем иметь

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{1+\alpha^2},$$

или, по правилу интегрирования под знаком интеграла,

$$\int_0^\infty (e^{-\alpha_0 x} - e^{-\alpha x})\frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\alpha - \operatorname{arctg}\alpha_0,$$

или

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_0 x}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\alpha - \operatorname{arctg}\alpha_0. \tag{15}$$

Но легко видеть, что второй интеграл в левой части стремится к нулю при $\alpha \to \infty$. Действительно, так как в рассматриваемой области изменения α и x, $e^{-\alpha x} \leqslant 1$ и $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$, то, выбирая произвольно малое положительное δ, имеем:

$$\left|\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \left|\int_0^\delta e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|\int_\delta^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\delta dx + \int_\delta^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \delta + \frac{e^{-\alpha\delta}}{\alpha},$$

откуда

$$\left|\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| < 2\delta$$

для всех $\alpha > \frac{1}{\delta}$. Поэтому, переходя в (15) к пределу по $\alpha \to \infty$, получаем:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha_0 x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \alpha_0. \tag{16}$$

Покажем теперь, что интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ существует и равен пределу интеграла $\int_0^\infty e^{-\alpha_0 x} \frac{\sin x}{x}\, dx$ при $\alpha_0 \to 0$, т. е. $\frac{\pi}{2}$. Прежде всего, из (13) и (14) имеем:

$$\int_l^\infty e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \frac{e^{-\alpha l}(\alpha \sin l + \cos l)}{1+\alpha^2}.$$

Интегрируя по α от α_0 до α и применяя правило интегрирования под знаком интеграла, получаем:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_l^\infty e^{-\alpha x} \sin x\, dx = \int_l^\infty (e^{-\alpha_0 x} - e^{-\alpha x}) \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{e^{-\alpha l}(\alpha \sin l + \cos l)}{1+\alpha^2}\, d\alpha. \tag{17}$$

Но

$$1 + \alpha^2 - (\alpha \sin l + \cos l)^2 = \sin^2 l - 2\alpha \sin l \cos l + \alpha^2 \cos^2 l = (\sin l - \alpha \cos l)^2 \geqslant 0,$$

откуда

$$(\alpha \sin l + \cos l)^2 \leqslant 1 + \alpha^2 \text{ или } |\alpha \sin l + \cos l| \leqslant \sqrt{1+\alpha^2} < 1 + \alpha^2.$$

Следовательно, из (17) получаем:

$$\left| \int_l^\infty (e^{-\alpha_0 x} - e^{-\alpha x}) \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leqslant \int_{\alpha_0}^{\alpha} e^{-\alpha l}\, d\alpha = \frac{e^{-\alpha_0 l} - e^{-\alpha l}}{l} < \frac{1}{l}.$$

Беря в левой части $\alpha \to \infty$, приходим к оценке

$$\left| \int_l^\infty e^{-\alpha_0 x} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leqslant \frac{1}{l}.$$

Теперь мы у цели. Действительно,

$$\int_0^l \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^\infty e^{-\alpha_0 x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^l (1 - e^{-\alpha_0 x}) \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_l^\infty e^{-\alpha_0 x} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

откуда, в силу полученной оценки,

$$\left| \int_0^l \frac{\sin x}{x}\, dx - \int_0^\infty e^{-\alpha_0 x} \frac{\sin x}{x}\, dx \right| \leqslant \left| \int_0^l (1 - e^{-\alpha_0 x}) \frac{\sin x}{x}\, dx \right| + \frac{1}{l}.$$

Перейдём в обеих частях неравенства к пределу по $\alpha_0 \to 0$. Принимая во внимание соотношение (16), а также непрерывность интеграла в правой части неравенства как функции от параметра α_0, получим в пределе:

$$\left| \int_0^l \frac{\sin x}{x}\, dx - \frac{\pi}{2} \right| \leqslant \frac{1}{l}.$$

Отсюда, при $l \to \infty$, и следует существование интеграла $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ и равенство

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Вычислим теперь интеграл той же функции в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Так как

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_\infty^0 \frac{\sin(-x)}{(-x)}\, d(-x) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

то

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi, \text{ или } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = 1.$$

Заменяя под интегралом x' через αx, мы получим ту же величину интеграла, если $\alpha \neq 0$; при этом, если $\alpha > 0$, то пределы интеграла остаются $-\infty$ и $+\infty$, а если $\alpha < 0$, то пределы переставляются. Следовательно,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \begin{cases} 1 \text{ при } \alpha > 0 \\ 0 \quad » \quad \alpha = 0 \\ -1 \quad » \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Левая часть этого равенства представляет таким образом пример разрывной функции параметра α.

§ 5. Геометрическое значение двойного интеграла.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена или рассматривается в некоторой прямоугольной области $R (a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d)$. Определённый интеграл по одному из переменных, например по x, взятый в пределах a, b, будет функцией другого переменного, рассматриваемого как параметр:

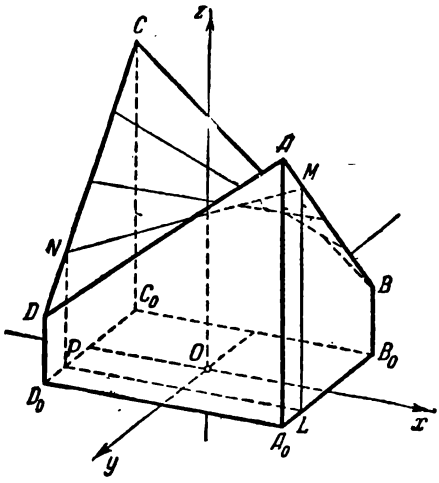
$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Мы видели (§ 2), что этот интеграл представляет площадь параллельного плоскости xOz сечения призматического тела, имеющего основанием R и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

Будем предполагать в этой области $z=f(x,y)$ положительным; тогда $\varphi(y)$ будет также положительно. Интеграл

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

представляет объём рассматриваемого тела [ч. I, гл. VII, § 10]. Таким образом, объём такого рода призматического тела, ограниченного в основании прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат, и покрытого поверхностью $z=f(x,y)$, может быть вычислен в результате двойного интегрирования в постоянных пределах для каждого интегрирования. Согласно правилу интегрирования под знаком интеграла, порядок интегрирования при этом вычислении безразличен.



Черт. 34.

Пример 1. На прямоугольном основании с центром в начале координат и сторонами, параллельными осям координат, построено призматическое тело, ограниченное сверху поверхностью равностороннего гиперболического параболоида, уравнение которого дано в виде

$$z = z_0 + mxy,$$

где z_0 — аппликата вершины параболоида (черт. 34). Определить объём V этого тела.

Пусть a, b — координаты одной вершины прямоугольника. Площадь параллельного плоскости xOz сечения тела (трапеции $LMNP$) вычисляется как определённый интеграл и будет функцией y, в данном случае постоянной:

$$\varphi(y) = \int_{-a}^{a} (z_0 + mxy)\,dx = \left[z_0 x + my\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{+a} = 2z_0 a.$$

Следовательно,

$$V = \int_{-b}^{b} dy \int_{-a}^{a} (z_0 + mxy)\,dx = \int_{-b}^{b} 2z_0 a\,dy = 4abz_0.$$

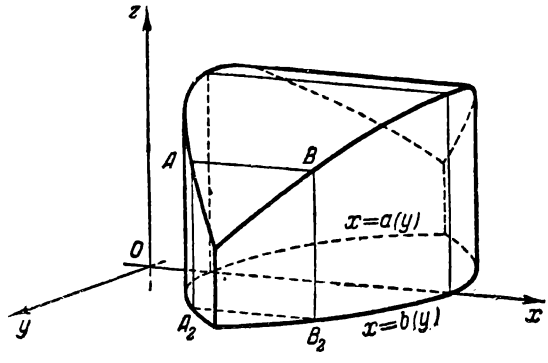
Таким образом данное тело равновелико призме с тем же основанием и высотою z_0. Нетрудно усмотреть и основание для такого результата в симметрии расположения поверхности параболоида относительно указанного призматического тела.

Интеграл, если пределы его a и b не постоянны, а зависят от параметра y, означает (§ 2) площадь сечения не призматического тела, а тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями $x=a(y)$

и $x = b(y)$. Интегрирование этого определённого интеграла по второму переменному в постоянных пределах от c до d даёт объём в общем случае цилиндрического тела, в основании которого лежит площадь, ограниченная кривыми $x = a(y)$, $x = b(y)$ и прямыми $y = c$, $y = d$, причём прямолинейные части ограничивающего контура могут обратиться в точки, в которых кривые $x = a(y)$, $x = b(y)$ смыкаются в одну замкнутую кривую:

$$V = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx.$$

Но в этом случае двойного интеграла перемена порядка интегрирования не сводится к простому интегрированию в тех же пределах (c, d) под знаком интеграла: пределы того и другого интегрирования изменяются. Вопрос этот будет рассмотрен в следующей главе о многократных интегралах, где двойной интеграл будет определён аналогично простому интегралу, как предел двукратной суммы.



Черт. 35.

Пример 2. Определить объём тела, ограниченного плоскостью xOy и тремя параболическими цилиндрами: $y^2 = x - x_0$, $-y^2 = x - x_1$ с боков и $z = z_0 - y^2$ сверху (черт. 35).

Площадь сечения этого тела плоскостью, параллельной плоскости xOz (прямоугольник AA_2B_2B), вычисляется как интеграл по x функции $z = z_0 - y^2$ в пределах от $a(y) = x_0 + y^2$ до $b(y) = x_1 - y^2$:

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} (z_0 - y^2)\, dx = (z_0 - y^2)(x_1 - x_0 - 2y^2).$$

Параболы $y^2 = x - x_0$ и $-y^2 = x - x_1$ пересекаются в точках

$$\left(\frac{1}{2}(x_0 + x_1),\ -\frac{1}{2}\sqrt{2(x_1 - x_0)}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{2}(x_0 + x_1),\ \frac{1}{2}\sqrt{2(x_1 - x_0)}\right).$$

Следовательно, искомый объём определяется как интеграл функции $\varphi(y)$ в пределах от $-c = -\frac{1}{2}\sqrt{2(x_1 - x_0)}$ до $c = \frac{1}{2}\sqrt{2(x_1 - x_0)}$:

$$V = \int_{-c}^{c} (z_0 - y^2)(x_1 - x_0 - 2y^2)\, dy = z_0 (x_1 - x_0)\sqrt{2(x_1 - x_0)} -$$

$$- \frac{1}{6}(x_1 - x_0 + 2z_0)(x_1 - x_0)\sqrt{2(x_1 - x_0)} + \frac{1}{10}(x_1 - x_0)^2 \sqrt{2(x_1 - x_0)}.$$

§ 6. Криволинейный интеграл.

Пусть $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции двух переменных x и y, связанных взаимно однозначной зависимостью $y=\varphi(x)$ или $x=\varphi_1(y)$, где φ_1 — функция, обратная функции φ[1]). Уравнением $y=\varphi(x)$ [или $x=\varphi_1(y)$] определяется на плоскости xOy некоторая кривая C. Пусть $L(a, A)$ и $M(b, B)$ — две точки этой кривой.

Определённые интегралы сложных функций $P(x, \varphi(x))$ по x в пределах от a до b и $Q(\varphi_1(y), y)$ по y в соответствующих пределах A, B

$$\int_a^b P(x, \varphi(x))\,dx, \quad \int_A^B Q(\varphi_1(y), y)\,dy$$

можно обозначить следующими символами:

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b P(x, \varphi(x))\,dx &= \int_C P(x, y)\,dx, \\ \int_A^B Q(\varphi_1(y), y)\,dy &= \int_C Q(x, y)\,dy. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Указатель C, под которым мы разумеем дугу кривой LM, заменяет и замещение y функцией $\varphi(x)$ или x функцией $\varphi_1(y)$, и указание пределов интегрирования.

Эти интегралы и их сумму

$$\int_C P(x, y)\,dx, \quad \int_C Q(x, y)\,dy, \quad \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{19}$$

называют *криволинейными*, взятыми вдоль линии C. Согласно равенствам (18) и определению обыкновенного интеграла имеем:

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\,\Delta x = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\,(x_{i+1} - x_i), \end{aligned} \tag{20}$$

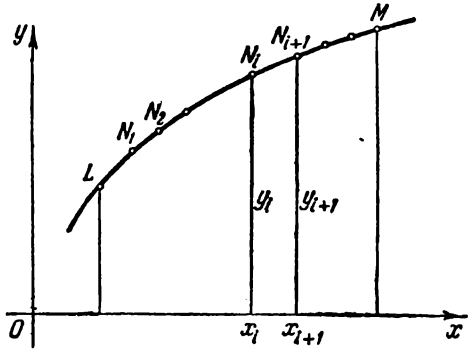
где $y_i=\varphi(x_i)$ и $x_{i+1} - x_i = \Delta x$. Таким образом криволинейный интеграл можно определить следующим образом: на дуге кривой LM (черт. 36) берётся ряд точек $N_0 \equiv L$, N_1, N_2, ..., N_i, ..., $N_n \equiv M$; значение функции $P(x_i, y_i)$ в точке N_i множится на соответствующее

---

[1]) Например, если $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, то $\varphi_1(y) = \operatorname{arctg} y$, где символом arctg мы отмечаем одну — главную — ветвь арктангенса.

приращение переменного $x_{i+1} - x_i$; предел суммы таких произведений, когда n безгранично увеличивается, и составляет криволинейный интеграл. Подобным же образом определяется и второй.

При тех условиях, которые были приняты нами относительно кривой LM, или иначе — относительно функций $\varphi(x)$ и $\varphi_1(y)$, определение криволинейного интеграла, как следует из равенства (18), совпадает с определением обыкновенного интеграла: переменное интегрирования x или y меняется монотонно. Но если абсцисса и ордината точки кривой C при перемещении от L до M меняются не монотонно, то определение криволинейного интеграла равенством (20) приобретает более общее и самостоятельное значение. Если будем допускать, что кривая C может быть разбита на конечное число таких частей, на которых x и y меняются монотонно, например, LU_1, U_1U_2, U_2U_3, U_3U_4, U_4M (черт. 37), то криволинейный интеграл будет равен сумме интегралов обыкновенных, ибо

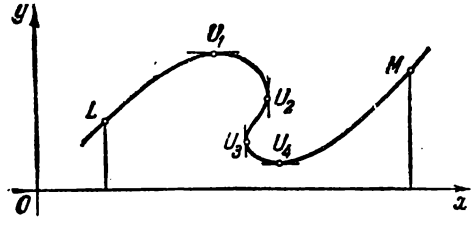


Черт. 36.

$$\int_C P(x, y)\,dx = \int_{LU_1} P\,dx + \int_{U_1U_2} P\,dx + \int_{U_2U_3} P\,dx + \int_{U_3U_4} P\,dx + \int_{U_4M} P\,dx,$$

а на дугах LU_1, U_1U_2, U_2U_3, U_3U_4, U_4M x и y меняются монотонно.

Этим самым доказывается при этих условиях относительно C и существование предела в правой части равенства (20), иначе говоря, устанавливается, что криволинейный интеграл для кривой, которая с прямыми, параллельными оси Ox или Oy, пересекается в нескольких точках, имеет смысл.



Черт. 37.

При параметрическом представлении кривой интегрирования, когда координаты точек её даны как функции параметра t

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (21)$$

вычисление криволинейного интеграла можно свести к вычислению обыкновенного определённого интеграла, взятого по параметру t. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ и их производные непрерывны. Если при

изменении t от t_0 до T точка (x, y) описывает путь интегрирования LM, то интегралы $\int\limits_C P(x, y)\,dx$ и $\int\limits_C Q(x, y)\,dy$ существуют и

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_C P(x, y)\,dx &= \int\limits_{t_0}^{T} P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt,\\ \int\limits_C Q(x, y)\,dy &= \int\limits_{t_0}^{T} Q(\varphi(t), \psi(t))\,\psi'(t)\,dt,\\ \int\limits_C P\,dx + Q\,dy &= \int\limits_{t_0}^{T} (Px' + Qy')\,dt,\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

где под знаком последнего интеграла x, y, x', y' должны быть заменены соответствующими функциями параметра t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad x' = \varphi'(t), \quad y' = \psi'(t).$$

Докажем, например, первую из формул (22). Пусть $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n \equiv T$—значения параметра t, соответствующие точкам $N_0 \equiv L$, $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots, N_n \equiv M$. Согласно определяющей формуле (20)

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(x_i, y_i)\,(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(\varphi(t_i), \psi(t_i))\,[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)].$$

Но по теореме о конечном приращении

$$\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i,$$

где τ_i заключено между t_i и t_{i+1}. Поэтому мы можем написать:

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(\varphi(t_i), \psi(t_i))\,[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} P(\varphi(t_i), \psi(t_i))\,\varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} P(\varphi(t_i), \psi(t_i))\,\varphi'(t_i)\,\Delta t_i + \sum_{i=0}^{n-1} P(\varphi(t_1), \psi(t_i))\,[\varphi'(\tau_i) - \varphi'(t_i)]\,\Delta t_i.$$

Первая из сумм в правой части, по определению, стремится к $\int\limits_{t_0}^{T} P(\varphi(t), \psi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. Остаётся показать, что вторая сумма стремится к нулю. Но, действительно, $\varphi'(t)$, будучи по предположению непрерывной, равномерно непрерывна на отрезке (t_0, T), и так

как $|\tau_i - t_i| \leqslant |\Delta t_i|$, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\varphi'(\tau_i) - \varphi'(t_i)| < \frac{\varepsilon}{2\int_{t_0}^{T} |P(\varphi(t), \psi(t))|\,dt} \text{ при } |\Delta t_i| < \delta \ (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Тогда

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} P(\varphi(t_i), \psi(t_i))[\varphi'(\tau_i) - \varphi'(t_i)]\Delta t_i\right| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sum_{i=0}^{n-1} |P(\varphi(t_i), \psi(t_i))|\,\Delta t_i}{\int_{t_0}^{T} |P(\varphi(t), \psi(t))|\,dt}.$$

Так как второе отношение в правой части стремится к 1, то для достаточно малого δ имеем

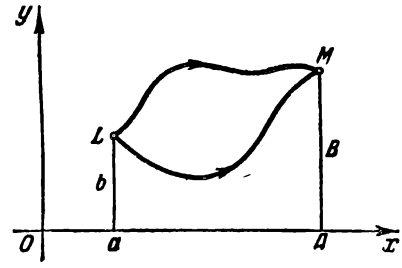
$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} P(\varphi(t_i), \psi(t_i))[\varphi'(\tau_i) - \varphi'(t_i)]\Delta t_i\right| < \varepsilon \text{ при } |\Delta t_i| < \delta$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(\varphi(t_i), \psi(t_i))[\varphi'(\tau_i) - \varphi'(t_i)]\Delta t_i = 0.$$

Тем самым первая из формул (22) доказана. Совершенно так же доказывается вторая, а третья есть следствие первых двух.

Формулы (22) сохраняют смысл и тогда, когда производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ испытывают разрыв в ограниченном числе точек, оставаясь конечными, т. е. когда линия интегрирования имеет угловые точки.



Черт. 38.

Величина криволинейного интеграла — будем рассматривать наиболее важный и общий вид

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

— зависит от пути интегрирования: если C и C' — две различные кривые, соединяющие те же точки L и M (черт. 38), то в общем случае

$$\int_C P\,dx + Q\,dy \neq \int_{C'} P\,dx + Q\,dy. \tag{23}$$

Отметим ещё следующее свойство криволинейного интеграла, вытекающее из его определения (20): интегралы от того же

дифференциального выражения и взятые по той же линии C, но в противоположных направлениях, отличаются только знаком:

$$\int_{LM} P\,dx+Q\,dy=-\int_{ML} P\,dx+Q\,dy. \tag{24}$$

§ 7. Криволинейные интегралы, зависящие лишь от концов пути интегрирования.

В общем случае, величина криволинейного интеграла

$$\int_{C} P\,dx+Q\,dy,$$

как было отмечено в § 6, зависит от пути интегрирования, соединяющего две данные точки плоскости.

Но возможен случай, и очень важный как в математическом анализе, так и в его приложениях в механике и физике, когда интеграл зависит только от начала и конца пути интегрирования. Для такого криволинейного интеграла нет нужды отмечать путь интегрирования; достаточно указать лишь начальную и конечную точки этого пути $L(a, b)$ и $M(A, B)$, координаты которых играют роль пределов интеграла:

$$\int_{a,\,b}^{A,\,B} P\,dx+Q\,dy. \tag{25}$$

Пусть D — некоторая область плоскости xOy, в которой функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные непрерывны, и пусть пути интегрирования рассматриваются лишь в этой области и не пересекают её границ. Эти пути будем предполагать разложимыми на конечное число дуг, на которых x и y меняются монотонно. Другие возможные пути, для которых криволинейный интеграл имеет смысл, можно аппроксимировать с достаточной точностью кривыми рассматриваемого типа, и таким образом для любого в этом смысле пути в области D интеграл (25) предполагается имеющим смысл.

Следующие две теоремы выясняют, при каких условиях криволинейный интеграл зависит лишь от начальной и конечной точек пути интегрирования.

Теорема 1. *Если $P\,dx+Q\,dy$ — полный дифференциал некоторой функции $f(x, y)$ в области D, то интеграл выражения $P\,dx+Q\,dy$ зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования.*

Доказательство. По условию

$$P=\frac{\partial f}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial f}{\partial y}\quad\text{и}\quad df=P\,dx+Q\,dy,$$

Пусть какой-нибудь путь интегрирования C дан параметрически:

$$x = x(t),\ y = y(t), \tag{26}$$

причём

$$a = x(t_0),\ b = y(t_0) \text{ и } X = x(T),\ Y = y(T), \tag{27}$$

где (a, b) — начальная, а (X, Y) — конечная точка пути. Так как

$$P\,dx + Q\,dy = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt = \frac{df}{dt}\,dt,$$

то в таком случае

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{t_0}^{T} \frac{df}{dt}\,dt = f(X, Y) - f(a, b),$$

т. е. интеграл полного дифференциала, каковы бы ни были функции (26), равен разности значений функции $f(x, y)$ в конечной и начальной точках пути, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если интеграл дифференциального выражения $P\,dx + Q\,dy$ в области D зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования, то $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $f(x, y)$.*

Доказательство. По условию интеграл выражения $P\,dx + Q\,dy$ зависит только от начальной точки пути (a, b) и конечной (x, y), которую будем считать подвижной. С изменением этой конечной точки величина интеграла будет меняться, будет функцией переменных координат x, y верхнего предела. Обозначим эту функцию через $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \int_{a, b}^{x, y} P\,dx + Q\,dy.$$

Покажем теперь, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q.$$

Пусть x получает приращение Δx, а y остаётся неизменным. К прежнему пути, соединяющему точки (a, b) и (x, y), присоединяется ещё путь от (x, y) к $(x + \Delta x, y)$. Этот последний может быть каким угодно, а стало быть и прямолинейным, при котором y остаётся постоянным. Следовательно, приращение функции $f(x, y)$

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = \int_{a, b}^{x+\Delta x, y} P\,dx + Q\,dy - \int_{a, b}^{x, y} P\,dx + Q\,dy$$

можно представить в виде

$$\Delta_x f(x, y) = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)\,dx,$$

ибо на рассматриваемом прибавочном пути y постоянно и $dy = 0$. По свойству обыкновенного определённого интеграла (т. I, стр. 350) будем иметь

$$\Delta_x f(x, y) = \Delta x\, P(x + \theta \Delta x, y),$$

а потому

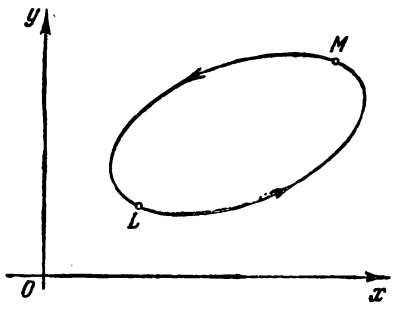
$$\frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta \Delta x, y) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y).$$

Точно так же найдём, что $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ и, следовательно,

$$P\,dx + Q\,dy = df(x, y),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, для того чтобы интеграл дифференциального выражения $P\,dx + Q\,dy$ зависел только от начальной и конечной точек пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы $P\,dx + Q\,dy$ было полным дифференциалом в соответствующей области.



Черт. 39.

Следствие. *Интеграл полного дифференциала $P\,dx + Q\,dy$ по замкнутому контуру, если в области, заключающей этот контур, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции переменных x и y, равен нулю.*

Действительно, любые две точки L и M этого контура (черт. 39) могут быть приняты за начальную и конечную точки двух различных путей интегрирования, причём один из этих путей имеет обратное направление.

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int_C \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \qquad (*)$$

взятый по окружности C с центром в начале координат.

Подинтегральное выражение является полным дифференциалом функции $\frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}.$$

По предыдущему отсюда следует, что интеграл (*) должен равняться нулю. И действительно, путь интегрирования (окружность) задаётся уравнением

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

откуда

$$x\,dx+y\,dy=\frac{1}{2}d(x^2+y^2)=0,$$

ибо R постоянно.

Пример 2. Рассмотрим теперь интеграл

$$\int_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}, \qquad (**)$$

взятый по окружности C с центром в начале координат.

Подинтегральное выражение является полным дифференциалом функции $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{-y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

И, однако, интеграл (**) отличен от нуля.

Действительно, путь интегрирования (окружность) в параметрическом представлении даётся уравнениями

$$x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi.$$

Следовательно,

$$x^2+y^2=R^2 \text{ и } x\,dy-y\,dx=R^2\,d\varphi.$$

Таким образом,

$$\int_C \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi} d\varphi=2\pi.$$

Понятно, почему этот интеграл не равен нулю. Функция $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ имеет неустранимый разрыв (и, значит, перестаёт быть первообразной подинтегрального выражения) в точках пересечения окружности C с осью Oy. Действительно, если, например, $y>0$, то $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ стремится к $+\frac{\pi}{2}$, когда x стремится к нулю справа, и к $-\frac{\pi}{2}$, когд x стремится к нулю слева. Правда, в качестве первообразной дифференциала, стоящего под знаком интеграла (**), можно было бы взять не $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, а какую-либо другую однозначную ветвь функции $\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}$ (например, $f(x, y)=\varphi$); однако легко видеть, что каждая такая ветвь будет имсть разрыв в какой-либо точке пути, окружающего начало координат.

Теоремы этого параграфа имеют место и для многих переменных. Так, для трёх переменных, если дифференциальное выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ является полным дифференциалом и в области D функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны, то криволинейный интеграл внутри этой области зависит только от началь-

ной и конечной точек пути интегрирования, и обратно. Координаты начальной и конечной точек пути интегрирования являются пределами интеграла:

$$\int_{a,\,b,\,c}^{x,\,y,\,z} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Область D ограничена теперь поверхностями.

§ 8. Интегрирование полного дифференциала.

Если дифференциальное выражение

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \tag{28}$$

есть полный дифференциал некоторой функции z, то функции P и Q, как следует из определения полного дифференциала (гл. IV, § 4), должны быть частными производными этой неизвестной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y). \tag{29}$$

Эти равенства связывают функции P и Q. Действительно,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x};$$

отсюда следует, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{30}$$

в предположении непрерывности одной из этих производных (стр. 158).

Равенство (30) является, таким образом, необходимым условием того, чтобы дифференциальное выражение (28) было полным дифференциалом в области D, другими словами — если функции P и Q этому условию не удовлетворяют, то выражение (28) не будет полным дифференциалом.

То же условие (30) при некотором ограничении на область D будет и достаточным, т. е. при выполнении его можно найти такую функцию z, которая будет иметь данное выражение полным дифференциалом во всей области D.

Действительно, пусть D — прямоугольник со сторонами, параллельными осям Ox и Oy [1]). Искомая функция z должна удовлетво-

[1]) Достаточность условия (30) можно доказать вообще для случая любой односвязной области D, т. е. области, которая вместе с каждым содержащимся в ней замкнутым контуром содержит и всю ограничиваемую им часть плоскости. Для неодносвязной области (например, плоскости, из которой удалено начало координат) условие (30), вообще говоря, недостаточно для того, чтобы выражение (28) было полным дифференциалом во всей области (см. пример 2 на стр. 221).

рять по определению полного дифференциала двум уравнениям (29):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y).$$

Если существует хотя бы одна такая функция, то существует бесчисленное множество таких функций, отличающихся одна от другой на постоянное, так как при дифференцировании как по x, так и по y все эти функции будут давать соответственно одинаковые частные производные. Будем искать такую функцию z, которая бы в какой-либо данной наперёд точке, например (x_0, y_0), прямоугольника D равнялась нулю. Из первого из равенств (29) имеем:

$$z = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \varphi(y), \tag{31}$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция от y, обращающаяся по условию в нуль при $y = y_0$. Нужно подобрать $\varphi(y)$ так, чтобы производная z по y равнялась данной функции $Q(x, y)$. Но

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \frac{d\varphi(y)}{dy},$$

или, по правилу Лейбница,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx + \frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Таким образом, принимая во внимание сверх того условие (30), будем иметь:

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

и

$$Q(x, y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Итак, функция $\varphi(y)$, обращаясь при $y = y_0$ в нуль, должна удовлетворять сверх того равенству

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = Q(x_0, y); \tag{32}$$

отсюда

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy. \tag{33}$$

Подставляя это выражение для $\varphi(y)$ в формулу (31), мы и получим искомую функцию z, обращающуюся в точке (x_0, y_0) в нуль:

$$z = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy, \tag{34}$$

а прибавляя произвольное постоянное, будем иметь общее решение:

$$z = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C. \tag{34'}$$

Действительно, дифференцируя по x и по y, применяя правило Лейбница и принимая во внимание условие (30), будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy = P(x, y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy, \text{ или } \frac{\partial z}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + Q(x_0, y),$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y) - Q(x_0, y) + Q(x_0, y) = Q(x, y).$$

Заметим, между прочим, что на решение (34) можно смотреть как на результат вычисления криволинейного интеграла

$$\int_C P\,dx + Q\,dy,$$

путь интегрирования которого состоит из двух частей: из прямой, параллельной оси Oy, от точки (x_0, y_0) до точки (x_0, y), где $dx = 0$, и потом от точки (x_0, y) до точки (x, y), где $dy = 0$:

$$z = \int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx.$$

Можно было бы выбрать путь иной — сначала от точки (x_0, y_0) до точки (x, y_0) и потом от точки (x, y_0) до точки (x, y); мы получили бы то же решение в ином виде:

$$x = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy. \tag{34''}$$

Пример 1. Выражение

$$(2x+y)\,dx+(2y+x)\,dy$$

есть полный дифференциал, так как выполняется условие (30):

$$\frac{\partial(2x+y)}{\partial y}=\frac{\partial(2y+x)}{\partial x}=1.$$

Полагая $x_0=0$, $y_0=0$[1]), будем по формуле (34′) иметь:

$$z=\int_0^x(2x+y)\,dx+\int_0^y(2y+0)\,dy+C,$$

откуда

$$z=x^2+xy+y^2+C.$$

По формуле (34″), прибавляя произвольное постоянное, получили бы то же самое:

$$z=\int_0^x(2x+0)\,dx+\int_0^y(2y+x)\,dy+C,$$

откуда

$$z=x^2+y^2+xy+C.$$

По формуле (34) искомая функция z определяется с помощью определённых интегралов; но можно было бы для той же цели применить и неопределённое интегрирование, предполагая, что оно выполнимо по основным таблицам интегрального исчисления. В самом деле, из равенства

$$\frac{\partial z}{\partial x}=P(x,\,y)$$

имеем после частного интегрирования по x:

$$z=\int P(x,\,y)\,dx+\varphi(y), \tag{35}$$

где $\varphi(y)$ — произвольная функция y, которая должна быть определена так, чтобы выполнялись остальные условия задачи. Дифференцируя по y, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,\,y)\,dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Но частная производная z по y по условию должна равняться $Q(x,\,y)$; следовательно,

$$Q(x,\,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,\,y)\,dx+\frac{d\varphi(y)}{dy},$$

откуда

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=Q(x,\,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,\,y)\,dx. \tag{36}$$

[1]) При отыскании общего решения величины x_0, y_0 особой роли не играют.

Таким образом, производная функции $\varphi(y)$, функции одного переменного y, вполне определена, если только правая часть окажется независящей от x, а для этого необходимо и достаточно, чтобы производная правой части равенства (36) по x равнялась нулю; находим эту производную:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right]=\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\int P(x, y)\,dx=$$

$$=\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P(x, y)\,dx\right]=\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}.$$

Предполагая, что условие (30) для рассматриваемого дифференциального выражения (28) выполняется, мы действительно имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right]=\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x, y)}{\partial y}=0,$$

т. е. правая часть равенства (36) не зависит от x. Выполнив в этой части указанное интегрирование и дифференцирование и интегрируя после того по y, мы определим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y)=\int\left[Q(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right]dy. \tag{37}$$

Следовательно,

$$z=\int P(x, y)\,dx+\int\left[Q(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx\right]dy. \tag{38}$$

Следует заметить, что в подинтегральном выражении

$$Q(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx$$

указанные действия должны быть выполнены до интегрирования [1]).

---

[1]) Выражение $Q(x, y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx$ по выполнении указанных действий зависит только от y, между тем отдельные члены его $Q(x, y)$ и $\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)\,dx$ могут зависеть и от x. Интегрирование целого выражения есть интегрирование некоторой функции одного независимого переменного, и по самой постановке задачи другое переменное сюда и не может войти. Между тем всякий иной порядок выполнения действий при этом интегрировании заменяет интегрирование функции одного независимого переменного частным интегрированием функций двух независимых переменных и может привести к результату, отличающемуся от предыдущего на какую-либо функцию x, что противоречит постановке задачи.

Пример 2. Применим этот способ к рассмотренному уже выше примеру $(2x+y)\,dx+(2y+x)\,dy$. Имеем:

$$z=\int (2x+y)\,dx+\int\left[(2y+x)-\frac{\partial}{\partial y}\int (2x+y)\,dx\right]dy=$$

$$=x^2+xy+\int\left[2y+x-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+xy)\right]dy=$$

$$=x^2+xy+\int (2y+x-x)\,dy=x^2+xy+\int 2y\,dy,$$

или

$$z=x^2+xy+y^2+C.$$

Если бы мы не хотели применять готовую формулу (38), то пришлось бы вычислять постепенно, как в общем случае. Из равенства

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y$$

следует

$$z=\int (2x+y)\,dx+\varphi(y)=x^2+xy+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+\frac{d\varphi(y)}{dy};\ \text{но}\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y+x;$$

следовательно,

$$2y+x=x+\frac{d\varphi(y)}{dy},\quad \frac{d\varphi(y)}{dy}=2y,\quad \varphi(y)=y^2+C;$$

$$z=x^2+xy+y^2+C.$$

Сопоставляя содержание §§ 7 и 8, мы можем теперь сказать, что равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

является необходимым и достаточным условием того, чтобы величина криволинейного интеграла

$$\int_C P\,dx+Q\,dy$$

зависела только от начальной и конечной точек пути интегрирования, предполагая область D, в которой рассматривается этот интеграл, прямоугольной [1]).

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Какое геометрическое значение имеет определённый интеграл функции, зависящей от параметра?
2. В чём состоит правило (Лейбница) дифференцирования интеграла по параметру? Какие случаи при этом нужно различать?

[1]) Или, более общо, односвязной (см. предыдущую сноску).

3. В чём заключается правило интегрирования интеграла по параметру и в каком случае оно применимо?

4. Что такое криволинейный интеграл?

5. При каком условии величина криволинейного интеграла не зависит от пути интегрирования?

6. Как найти интеграл полного дифференциала?

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Из интеграла

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

получить

$$\text{а)}\ \int_0^\infty xe^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^2};\quad \text{б)}\ \int_0^\infty x^2e^{-ax}\,dx = \frac{1\cdot 2}{a^3};\ \ldots;$$

$$\text{в)}\ \int_0^\infty x^ne^{-ax}\,dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ n}{a^{n+1}},$$

в частности $\int_0^\infty x^ne^{-x}\,dx = 1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ n$. Показать законность применения при этом вычислении правила Лейбница.

2. Исходя из интеграла

$$\int_a^b x^y\,dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x},$$

показать путём интегрирования под знаком интеграла, что

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\frac{1+b}{1+a}.$$

Примечание. Функция $\frac{x^b - x^a}{\ln x}$ определена в замкнутом интервале (0, 1) вполне, если за значения функции в концах этого интервала принять пределы, к которым стремится эта функция:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0;\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a.$$

Последнее равенство можно получить следующим образом. Полагая $x^{b-a} - 1 = \frac{1}{n}$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{a}{b-a}}(b-a)}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = b - a.$$

3. Вычислить криволинейный интеграл $\frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx$, взятый по периметру эллипса, данного параметрически:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

и показать геометрическое значение этого интеграла (т. I, стр. 447).

4. Показать, что дифференциальное выражение

$$(20x^3 - 21x^2y + 2y)\,dx + (-7x^3 + 2x + 3)\,dy$$

есть полный дифференциал, и найти соответствующую функцию.

Отв. $u = 5x^4 - 7x^3y + 2xy + 3y + C$.

ГЛАВА VII.

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

§ 1. Двойной интеграл.

Двойным интегралом мы раньше (гл. VI, §§ 4, 5) назвали результат интегрирования определённого интеграла по параметру; именно, если

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx,$$

то

$$\int_c^d \varphi(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx \qquad (1)$$

было названо двойным интегралом. Переменные интегрирования x и y удовлетворяют неравенствам

$$a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d. \qquad (2)$$

Пределы первого интегрирования a и b будут или постоянными, или зависеть от параметра y. В первом случае областью изменения переменных интегрирования x и y будет прямоугольник со сторонами, соответственно параллельными осям координат, во втором эта область будет ограничена иначе.

Геометрически двойной интеграл означает объём призматического или цилиндрического тела, опирающегося на область изменения x и y, как на основание, и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

Теперь мы определим двойной интеграл как предел двукратной суммы. Докажем предварительно следующую лемму.

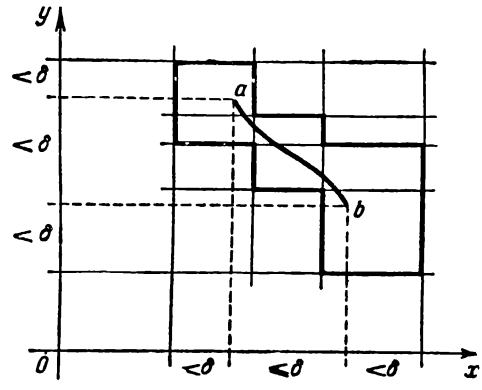
Лемма. *Если двумя сериями прямых, соответственно параллельных осям координат, разделим плоскость на прямоугольники и, прибавляя к этим сериям всё новые и новые прямые, будем неограниченно уменьшать стороны прямоугольников, то сумма площадей тех из них, которые пересекаются некоторой данной линией конечной длины, в пределе равна нулю.*

Доказательство. Пусть ab — какая-нибудь дуга рассматриваемой линии, имеющая длину δ. Рассмотрим произвольное разбиение

плоскости на прямоугольники, стороны которых ξ_i, параллельные оси Ox, и η_j, параллельные оси Oy, меньше δ:

$$\xi_i < \delta, \quad \eta_j < \delta. \tag{3}$$

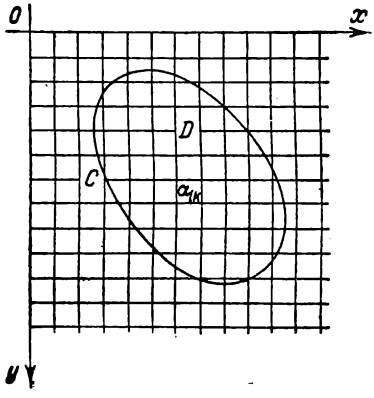
Так как проекции дуги ab на оси Ox и Oy не превосходят δ, то у тех прямоугольников разбиения, которые содержат внутри точки дуги ab, как сумма оснований ξ_i, так и сумма высот η_j будет во всяком случае меньше 3δ (черт. 40). Поэтому площадь этих прямоугольников будет меньше $3\delta \cdot 3\delta = 9\delta^2$. Разобьём теперь данную линию, имеющую длину L, на n дуг равной длины $\frac{L}{n}$. Тогда во всех разбиениях плоскости, удовлетворяющих условию (3) с $\delta = \frac{L}{n}$, каждая частичная дуга кривой будет содержаться в прямоугольниках, общая площадь которых меньше $\frac{9L^2}{n^2}$, и значит, вся кривая будет целиком покрыта прямоугольниками, общая площадь которых не превышает



Черт. 40.

$$\frac{9L^2}{n^2} \cdot n = \frac{9L^2}{n}; \tag{4}$$

взяв n достаточно большим, мы можем сделать выражение (4) произвольно малым, что и доказывает лемму.



Черт. 41.

Двукратный интеграл. Пусть теперь нам дана непрерывная функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$, определённая для каждой точки внутри замкнутого контура C, имеющего конечную длину, и на самом контуре. Будем предполагать пока, что для рассматриваемой области $f(x, y) > 0$. Пусть, далее, плоскость разделена прямыми, соответственно параллельными осям координат, на прямоугольники α_{ik}, причём индексы i и k указывают, каким по счёту от оси Oy (i) и от оси Ox (k) является рассматриваемый прямоугольник. Часть прямоугольников α_{ik} попадает в область D, ограниченную контуром C, из них пограничные пересекаются этим контуром (черт. 41). Пусть M_{ik} и m_{ik} — наибольшее и наименьшее значения

функции $f(x, y)$ в прямоугольнике α_{ik}. Произведения

$$M_{ik}\alpha_{ik} \quad \text{и} \quad m_{ik}\alpha_{ik}$$

означают геометрически объёмы параллелепипедов с основанием α_{ik} и высотами M_{ik} и m_{ik} (черт. 42).

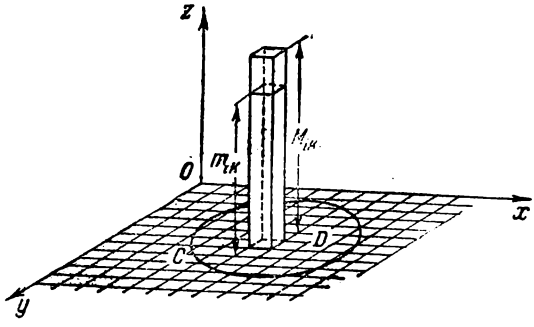
Обозначим через $\sum'\sum' M_{ik}\alpha_{ik}$ сумму произведений $M_{ik}\alpha_{ik}$, распространённую на область, ограниченную контуром C, и область выходящих частей пограничных прямоугольников, а через $\sum\sum M_{ik}\alpha_{ik}$ и $\sum\sum m_{ik}\alpha_{ik}$ — соответствующие суммы только для внутренних прямоугольников. Если сверх того обозначим через $\sum' M_{ik}\alpha_{ik}$ сумму произведений $M_{ik}\alpha_{ik}$, распространённую на область пограничных прямоугольников, то будем иметь следующее тождество:

$$\sum'\sum' M_{ik}\alpha_{ik} = \sum\sum M_{ik}\alpha_{ik} + \sum' M_{ik}\alpha_{ik}. \qquad (5)$$

Ясно, кроме того, что

$$\sum'\sum' M_{ik}\alpha_{ik} > \sum\sum m_{ik}\alpha_{ik}. \qquad (6)$$

Будем теперь проведением новых прямых, соответственно параллельных осям координат, раздроблять прямоугольники α_{ik} так, чтобы стороны новых прямоугольников, безгранично уменьшаясь, стремились к нулю. Наибольшее значение функции, т. е. M_{ik}, для каждого из последующих в этом безграничном процессе прямоугольников будет или сохранять ту же величину, как и для соответствующего предыдущего, или уменьшаться, а наименьшее значение m_{ik} будет или сохраняться, или увеличиваться. Каждое слагаемое суммы $\sum'\sum' M_{ik}\alpha_{ik}$ заменяется в этом процессе меньшей, или, во всяком случае, не большей величиной и, кроме того, некоторые части, входящие в состав суммы $\sum' M_{ik}\alpha_{ik}$, совершенно отпадают, когда соответствующие прямоугольники делаются внешними. Поэтому сумма $\sum'\sum' M_{ik}\alpha_{ik}$ уменьшается (во всяком случае не увеличивается). С другой стороны, каждое слагаемое суммы $\sum\sum m_{ik}\alpha_{ik}$ в этом процессе заменяется большей величиной, или, по крайней мере, не меньшей, и кроме того, к этой же сумме присоединяются новые положительные слагаемые, так как некоторые последующие прямоугольники из пограничной области переходят во внутреннюю. Поэтому рассматриваемая сумма увеличивается (во всяком случае не уменьшается).



Черт. 42.

Таким образом мы приходим к следующему заключению: первая сумма $\sum'\sum' M_{ik}\alpha_{ik}$, уменьшаясь, но оставаясь в силу неравенства (6) большей некоторой конечной величины, стремится к некоторому определённому пределу, к определённому пределу стремится и вторая сумма, так как в указанном процессе она увеличивается, оставаясь меньшей некоторой конечной величины. Пределы, к которым стремятся та и другая суммы, одинаковы, ибо разность этих сумм может быть сделана сколь угодно малой. Действительно,

$$\sum'\sum' M_{ik}\alpha_{ik} - \sum\sum m_{ik}\alpha_{ik} = \sum\sum (M_{ik} - m_{ik})\, a_{ik} + \sum' M_{ik}\alpha_{ik};$$

для всех прямоугольников α_{ik} колебание функции, т. е. $M_{ik} - m_{ik}$, в силу равномерной непрерывности её может быть сделано меньше любого данного наперёд положительного числа ε, откуда

$$\sum\sum (M_{ik} - m_{ik})\,\alpha_{ik} < \varepsilon \sum\sum \alpha_{ik},$$

и так как $\sum\sum \alpha_{ik}$ — ограниченная величина, то

$$\lim \sum\sum (M_{ik} - m_{ik})\,\alpha_{ik} = 0;$$

далее, из неравенства

$$\sum' M_{ik}\alpha_{ik} < M \sum' \alpha_{ik},$$

где M — наибольшее значение функции $f(x, y)$ во всей рассматриваемой области пограничных прямоугольников, следует

$$\lim \sum' M_{ik}\alpha_{ik} = 0,$$

ибо по доказанной лемме

$$\lim \sum' \alpha_{ik} = 0.$$

Обозначив общий предел рассматриваемых двукратных сумм через V, будем иметь

$$V = \lim \sum'\sum' M_{ik}\alpha_{ik} = \lim \sum\sum M_{ik}\alpha_{ik} = \lim \sum\sum m_{ik}\alpha_{ik}. \quad (7)$$

Так как для каждого прямоугольника α_{ik} имеют место неравенства

$$M_{ik} \geqslant f(x_i, y_k) \geqslant m_{ik},$$

где x_i, y_k — координаты какой-либо внутренней или граничной точки этого прямоугольника, то к тому же пределу V стремится и двукратная сумма

$$\sum\sum f(x_i, y_k)\,\alpha_{ik}.$$

Рассматривая, наконец, равномерное разбиение плоскости двумя сериями параллельных осям координат прямых, при котором все площади α_{ik} одинаковы, можно положить

$$\alpha_{ik} = \Delta x\, \Delta y,$$

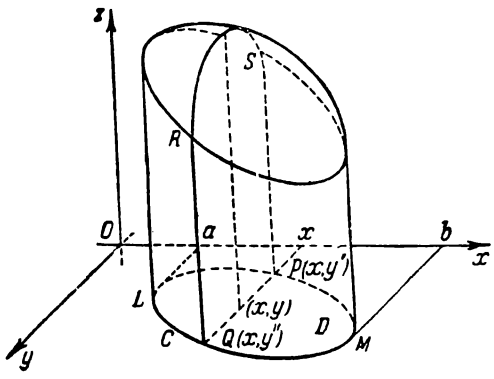
и, следовательно,

$$V = \lim \sum\sum f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y. \qquad (7')$$

Этот предел двукратной суммы, в виде ли (7′) или (7), и называют *двойным интегралом*. Область изменения указателей i и k при этом суммировании, как было отмечено выше, определяется формою и положением контура C. По той же логике обозначения, какой мы руководствовались при установлении обозначения простого определённого интеграла (т. I, стр. 342—343), мы можем обозначить двойной интеграл следующим образом:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y. \qquad (8)$$

Буква D указывает ту область, на которую он распространяется. Согласно геометрическому значению произведений $M_{ik}\alpha_{ik}$ и $m_{ik}\alpha_{ik}$, а также $f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y$, двойной интеграл (при $f(x, y) > 0$) геометрически означает объём тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью xOy и с боков цилиндрической или призматической поверхностью, опирающейся на контур C области D, как основание (черт. 43). На произведение $dx\,dy$ мы можем смотреть как на элемент площади, на которую распространяется двойной интеграл, а произведение $f(x, y)\,dx\,dy$ является объёмом бесконечно тонкого параллелепипеда, составляющим элемент измеряемого объёма V.



Черт. 43.

Двойной интеграл является пределом указанной двукратной суммы независимо от способа образования безгранично уменьшающихся элементарных прямоугольников α_{ik}. В указанном процессе предыдущая система прямоугольников разбивалась проведением прямых, соответственно параллельных осям координат, на части, давая последующую систему, и т. д. Но можно было бы вообразить процесс, где каждая система элементарных прямоугольников составлялась бы независимо от предшествующей, причём должно соблюдаться лишь одно условие, чтобы стороны прямоугольников в этом процессе стремились к нулю. И при таком процессе рассматриваемые двукратные суммы стремятся к тому же пределу. Доказательство этого положения аналогично соответствующему доказательству для простого интеграла [т. I, стр. 356 — 357].

Мы предположили выше, что для рассматриваемой области интегрирования $f(x, y) > 0$. Однако предыдущие рассуждения фактически не зависели от этого ограничительного условия и опирались лишь на условие непрерывности функции $f(x, y)$. В том случае, когда во всей области $f(x, y) < 0$, двойной интеграл представляет отрицательную величину. Если поверхность $z = f(x, y)$ пересекает плоскость xOy в области интегрирования, то двойной интеграл представит алгебраическую сумму положительных и отрицательных частей, геометрически — алгебраическую сумму объёмов, расположенных над плоскостью xOy, и объёмов, расположенных под этой плоскостью.

§ 2. Теорема о среднем значении.

Пусть область интегрирования — *связная*, т. е. любые две её точки можно соединить ломаной, целиком содержащейся в данной области (так что эта область не распадается на разрозненные куски), и, кроме того, замкнутая. Если подинтегральная функция представляет произведение двух непрерывных функций:

$$f(x, y) = \varphi(x, y)\,\psi(x, y),$$

из которых $\varphi(x, y)$ не изменяет знака в области интегрирования, например $\varphi(x, y) \geqslant 0$, то существуют среднее значения аргументов ξ и η, при которых имеет место равенство

$$\iint_D \varphi(x, y)\,\psi(x, y)\,dx\,dy = \psi(\xi, \eta) \iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Действительно, по условию $\varphi(x, y) \geqslant 0$; кроме того, $\psi(x, y)$ как непрерывная функция в замкнутой области имеет в ней некоторое наименьшее значение m и наибольшее значение M, так что

$$m \leqslant \psi(x, y) \leqslant M.$$

Следовательно,

$$m\varphi(x, y) \leqslant \varphi(x, y)\,\psi(x, y) \leqslant M\varphi(x, y),$$

а тогда, как непосредственно следует из определения двойного интеграла,

$$m \iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint_D \varphi(x, y)\,\psi(x, y)\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant M \iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

или

$$\iint_D \varphi(x, y)\,\psi(x, y)\,dx\,dy = \mu \iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy, \tag{9}$$

где

$$m \leqslant \mu \leqslant M.$$

Но в рассматриваемой области существуют такие точки (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2), что $\psi(\xi_1, \eta_1) = m$ и $\psi(\xi_2, \eta_2) = M$. Далее, по условию существует ломаная, соединяющая эти точки и целиком содержащаяся в рассматриваемой области. На этой ломаной $\psi(x, y)$ есть непрерывная функция одного переменного, за которое можно принять, например, расстояние вдоль ломаной от её конца (ξ_1, η_1). Поэтому $\psi(x, y)$ принимает на ломаной всякое значение из отрезка (m, M), в частности значение μ, т. е. в рассматриваемой области существуют такие значения x и y, — обозначим их через ξ и η, — что

$$\psi(\xi, \eta) = \mu.$$

Таким образом из равенства (9) и получаем требуемую формулу:

$$\iint_D \varphi(x, y)\psi(x, y)\,dx\,dy = \psi(\xi, \eta)\iint_D \varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

§ 3. Вычисление двойного интеграла.

Вычисление двойного интеграла может быть сведено к последовательному вычислению двух простых интегралов. Предположим, что контур C, ограничивающий ту область, на которую распространяется двойной интеграл, с любою прямой, параллельной оси Oy, имеет не более двух общих точек. Если бы таким свойством этот контур не обладал, но число точек пересечения контура C с любой указанной прямою было ограниченным, то соответствующими разрезами мы могли бы данную область интегрирования разбить на части, из которых каждая была бы желаемого вида, и могли бы рассматривать двойной интеграл для каждой части отдельно, а после вычисления результаты сложить.

Итак, пусть контур C с любой прямой, параллельной оси Oy, имеет не более двух общих точек. Две касательные к этому контуру, параллельные оси Oy, из которых одна (ближайшая) отстоит от оси Oy, положим, на расстояние a (черт. 43), а другая (дальнейшая) — на расстояние b, точками прикосновения L и M разделяют контур C на две части LPM и LQM. Каждому значению x, заключённому между a и b, соответствует на той и другой дуге по одной точке, из которых одна имеет ординату y', а другая y''. С изменением x в указанных пределах:

$$a \leqslant x \leqslant b$$

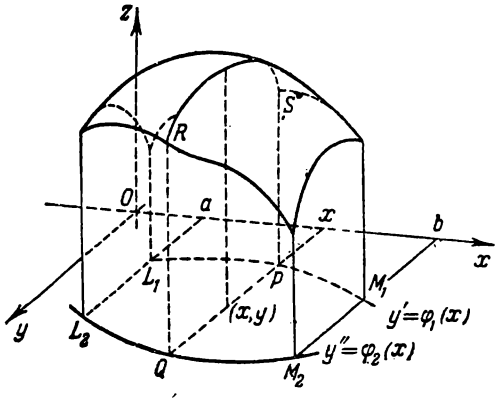
y' и y'' будут также меняться, т. е. будут функциями x. Пусть, например,

$$y' = \varphi_1(x),\ y'' = \varphi_2(x);$$

этими функциями и можно считать аналитически заданным контур C.

В более общем случае замкнутый контур C задаётся двумя однозначными функциями $y' = \varphi_1(x)$ и $y'' = \varphi_2(x)$ и уравнениями $x = a$

и $x = b$ двух прямых, параллельных оси Oy: область D ограничена таким образом дугами L_1PM_1, L_2QM_2 и прямыми L_1L_2, M_1M_2 (черт. 44). Если контур C дан в виде овала, например, в виде эллипса, то функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ находятся решением уравнения его относительно y, причём прямые L_1L_2 и M_1M_2 обращаются в касательные овала, а a и b находятся как абсциссы тех точек овала, для которых $y' = y''$.



Черт. 44.

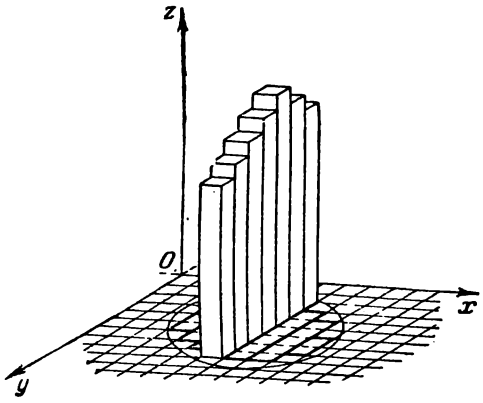
Возвратимся теперь к рассмотрению двукратной суммы

$$\sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y.$$

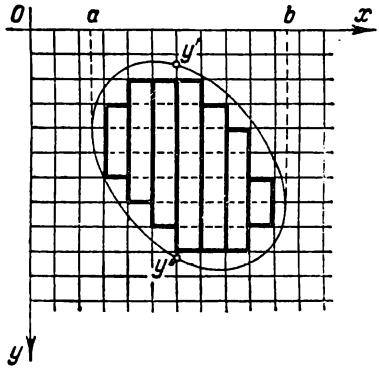
Порядок суммирования её слагаемых может быть установлен следующий. Сначала для данного значения x_i мы складываем элементарные параллелепипеды $f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y$ в направлении оси Oy; по вынесении Δx за знак суммы получим выражение

$$\Delta x \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta y, \qquad (10)$$

представляющее объём некоторой пластинки (черт. 45). Толщина её равна Δx, а площадь боковой стенки, параллельной плоскости yOz,



Черт. 45.



Черт. 46.

равна $\sum f(x_i, y_k)\,\Delta y$, где суммирование совершается по индексу k. Для различных значений x_i получим ряд таких пластинок, приложенных одна к другой и заполняющих приближённо объём рассматри-

ваемого тела:

$$\sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y = \sum_i \Delta x \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta y.$$

На черт. 46 представлен ряд оснований этих пластинок. Будем сначала уменьшать безгранично Δy при постоянном Δx. В таком случае будем иметь

$$\lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y = \sum_i \Delta x \lim_{\Delta y \to 0} \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta y = \sum_i \Delta x\, \Phi(x_i),$$

где

$$\Phi(x_i) = \int_{y'}^{y''} f(x_i, y)\,dy \quad [y' = \varphi_1(x_i),\ y'' = \varphi_2(x_i)]$$

и представляет площадь сечения рассматриваемого тела плоскостью $x = x_i$: $PQRS$ на черт. 43 и 44. Теперь будем уменьшать безгранично Δx, причём x_i будет меняться в границах $a \leqslant x_i \leqslant b$. В пределе получим:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i \Phi(x_i)\,\Delta x = \int_a^b \Phi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y'}^{y''} f(x, y)\,dy.$$

Но, как установлено в § 1,

$$\left| \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y - \iint_D f(x, y)\,dx\,dy \right| < \varepsilon$$

при всех достаточно малых Δx и Δy. Следовательно,

$$\left| \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y - \iint_D f(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant \varepsilon$$

или, по только что доказанному,

$$\left| \int_a^b dx \int_{y'}^{y''} f(x, y)\,dy - \iint_D f(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant \varepsilon.$$

Так как ε здесь можно взять сколь угодно малым, а левая часть не зависит от ε, то заключаем, что

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y'}^{y''} f(x, y)\,dy,$$

где

$$y' = \varphi_1(x), \quad y'' = \varphi_2(x).$$

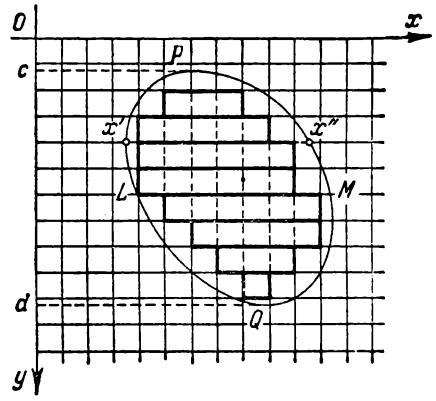
Таким образом вычисление двойного интеграла сводится к двукратному простому интегрированию: сначала берётся определённый интеграл

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

где величина x, рассматриваемая как параметр, входит, вообще говоря, и в пределы интеграла; в результате получим некоторую функцию $\Phi(x)$, представляющую величину площади сечения тела плоскостью, параллельной плоскости yOz и отстоящей от последней на расстояние x (черт. 43 и 44); потом берём определённый интеграл этой функции в постоянных пределах a и b:

$$\int_a^b \Phi(x)\,dx,$$

который и даст величину рассматриваемого двойного интеграла.



Черт. 47.

Можно установить и другой порядок вычисления двойного интеграла.

Положим, что контур C и с любой прямой, параллельной оси Ox, имеет не более двух общих точек (черт. 47). Две касательные к нему, параллельные оси Ox, точками прикосновения P и Q разделяют его на две дуги PLQ и PMQ. Пусть c и d — ординаты точек P и Q. Каждому значению y, заключённому между c и d, соответствуют две точки, из которых одна лежит на дуге PLQ, а другая — на дуге PMQ. С изменением y в границах $c < y < d$ абсциссы этих точек x' и x'' будут меняться, будучи функциями y:

$$x' = \psi_1(y),\quad x'' = \psi_2(y).$$

Представим теперь рассматриваемую двукратную сумму в следующем виде:

$$\sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x\,\Delta y = \sum_k \Delta y \sum_i f(x_i, y_k)\,\Delta x.$$

Выражение $\Delta y \sum f(x_i, y_k)\,\Delta x$ представляет объём пластинки, расположенной параллельно плоскости xOz. На черт. 47 представлен ряд оснований таких пластинок. Как и выше, переходим в два приёма к пределу, полагая, однако, сначала стремящимся к нулю Δx, а потом Δy. В результате получаем представление рассматриваемого двойного интеграла в виде двух последовательно взятых простых

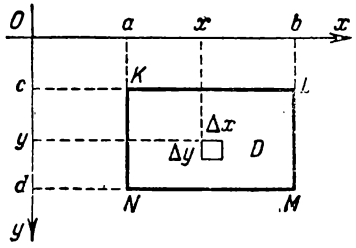
интегралов, из которых первый имеет пределами $x' = \psi_1(y)$, $x'' = \psi_2(y)$, а второй c и d:

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x'}^{x''} f(x, y)\,dx, \quad \text{где } x' = \psi_1(y),\ x'' = \psi_2(y).$$

Таким образом, при перемене порядка интегрирования в двойном интеграле пределы каждого интегрирования соответственно форме и положению контура C изменяются:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_c^d dx \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

Если контур C имеет форму прямоугольника $KLMN$ (черт. 48), стороны которого соответственно параллельны осям координат, то пределы как первого, так и последнего интегрирования постоянны, ибо для всякого значения x, заключённого между a и b, переменное первого интегрирования y меняется в неизменных границах $c < y < d$, и обратно, при другом порядке вычисления, для всякого значения y, заключённого между c и d, x меняется в неизменных границах $a < x < b$.



Черт. 48.

Таким образом перемена порядка интегрирования в двойном интеграле, распространённом на прямоугольник, стороны которого соответственно параллельны осям координат, не меняет пределов этих интегрирований:

$$\iint_{KLMN} f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Пример 1. (Задача Вивиани.) Круглая цилиндрическая поверхность прорезывает шар радиуса R, касаясь этого шара и проходя через его центр. Определить объём той части шара, которая лежит внутри цилиндрической поверхности (черт. 49).

Пусть центр шара находится в начале прямоугольной системы координат. В таком случае уравнение шара имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad (a)$$

откуда для аппликаты шара имеем:

$$z = \sqrt{R^2 - y^2 - x^2}.$$

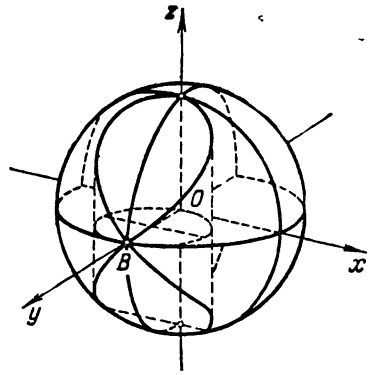
Цилиндрическая поверхность, положим, проходит через ось Oz и касается шара в точке B на оси Oy. Плоскость xOy пересекает этот цилиндр по окружности C, для которой радиус шара OB является диаметром. Уравнение окружности C легко составить, если принять во внимание, что её ра-

диус равен половине радиуса шара, а центр лежит на оси Oy в точке, ордината которой $\frac{R}{2}$:

$$x^2+\left(y-\frac{R}{2}\right)^2=\frac{R^2}{4},\quad \text{или}\quad x^2+y^2-Ry=0. \qquad (\beta)$$

Вычислим сначала половину искомого объёма, именно объём той части рассматриваемого тела, которая лежит над плоскостью xOy. Величина этого объёма определяется двойным интегралом от функции $z=\sqrt{R^2-y^2-x^2}$, распространённым на область D, ограниченную круговым сечением C цилиндра:

$$\frac{V}{2}=\iint_D \sqrt{R^2-y^2-x^2}\,dx\,dy.$$



Черт. 49.

Установим следующий порядок интегрирования: сначала будем интегрировать при постоянном y в направлении оси Ox, потом в направлении Oy. Пределы первого интегрирования x' и x'' должны удовлетворять уравнению (β) окружности C и являются, таким образом, функциями y. Из уравнения (β) имеем

$$x=\pm\sqrt{Ry-y^2}$$

и потому

$$x'=-\sqrt{Ry-y^2}\quad\text{и}\quad x''=+\sqrt{Ry-y^2}.$$

Первое из этих уравнений представляет левую часть окружности C, а второе — правую. Пределы последнего интегрирования постоянны, именно 0 и R. Итак, имеем:

$$\frac{V}{2}=\iint_D \sqrt{R^2-y^2-x^2}\,dx\,dy=\int_0^R dy\int_{x'}^{x''}\sqrt{R^2-y^2-x^2}\,dx,$$

где x' и x'' имеют указанные выше значения. Так как

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\ ^{1}),$$

то, полагая $a=\sqrt{R^2-y^2}$, будем иметь:

$$\int_{x'}^{x''}\sqrt{R^2-y^2-x^2}\,dx=$$

$$=\left[\frac{x\sqrt{R^2-y^2-x^2}}{2}+\frac{R^2-y^2}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{R^2-y^2}}\right]_{x=x'}^{x=x''}=$$

$$=\sqrt{Ry-y^2}\,\sqrt{R^2-y^2-Ry+y^2}+(R^2-y^2)\arcsin\frac{\sqrt{Ry-y^2}}{\sqrt{R^2-y^2}}=$$

$$=\sqrt{R}\,\sqrt{y}\,(R-y)+(R^2-y^2)\arcsin\sqrt{\frac{y}{R+y}}.$$

[1]) Ср. стр. 106, задача 9.

Следовательно,

$$\frac{V}{2}=\int_0^R\left[\sqrt{R}\sqrt{y}\,(R-y)+(R^2-y^2)\arcsin\sqrt{\frac{y}{R+y}}\right]dy=$$

$$=R\sqrt{R}\int_0^R y^{\frac{1}{2}}\,dy-\sqrt{R}\int_0^R y^{\frac{3}{2}}\,dy+\int_0^R(R^2-y^2)\arcsin\sqrt{\frac{y}{R+y}}\,dy=$$

$$=\frac{4R^3}{15}+\int_0^R(R^2-y^2)\arcsin\sqrt{\frac{y}{R+y}}\,dy.$$

Последний интеграл, содержащий трансцендентный множитель, можно свести к интегралу от алгебраической функции, подводя рациональный множитель под знак дифференциала и интегрируя по частям:

$$\int_0^R(R^2-y^2)\arcsin\sqrt{\frac{y}{R+y}}\,dy=\int_0^R\arcsin\sqrt{\frac{y}{R+y}}\,d\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)=$$

$$=\left[\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)\arcsin\sqrt{\frac{y}{R+y}}\right]_0^R-\int_0^R\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)d\arcsin\sqrt{\frac{y}{R+y}}=$$

$$=\frac{2R^3}{3}\frac{\pi}{4}-\sqrt{R}\int_0^R\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)\frac{dy}{2\sqrt{y}(R+y)}.$$

Полагая $y=Rt^2$ и, следовательно, $dy=2Rt\,dt$, будем иметь

$$\int_0^R(R^2-y^2)\arcsin\sqrt{\frac{y}{R+y}}\,dy=\frac{R^3\pi}{6}+\frac{R^3}{3}\int_0^1\frac{t^6-3t^2}{1+t^2}\,dt.$$

Но, вычисляя последний интеграл, найдём:

$$\int_0^1\frac{t^6-3t^2}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\left(t^4-t^2-2+\frac{2}{1+t^2}\right)dt=-\frac{32}{15}+\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{V}{2}=\frac{4R^3}{15}+\frac{R^3\pi}{6}+\frac{R^3}{3}\left(-\frac{32}{15}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right),$$

$$V=\frac{2R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

Если этот объём отнять от объёма той полусферы, которая лежит в положительную сторону от плоскости xOz, то оставшаяся часть полу-

сферы будет иметь объём W, выражающийся рационально через радиус сферы:

$$W = \frac{2}{3}\pi R^3 - V = \frac{8}{9}R^3.$$

Этот результат и является решением задачи Вивиани (1692) о рациональных частях шара, задачи, на которую можно смотреть как на обобщение задачи Гиппократа (гиппократовы луночки).

Пример 2. Два круглых цилиндра с равными перпендикулярными сечениями прорезывают друг друга так, что оси их пересекаются под прямым углом. Определить объём тела, ограниченного этими поверхностями.

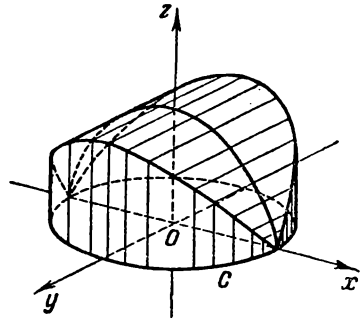
1. Пусть ось одного цилиндра направлена по оси Oz (черт. 50), а другого — по оси Oy. Эти два цилиндра пересекаются по двум эллипсам, симметрично расположенным относительно плоскостей xOz и xOy и пересекающимся на оси Ox. Уравнение цилиндра, ось которого направлена по оси Oy, имеет вид

$$x^2 + z^2 = a^2, \qquad (\gamma)$$

а уравнение второго

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad (\delta)$$

где a — радиус перпендикулярного сечения каждого из них.



Черт. 50.

Будем определять половину искомого объёма, именно объём той части рассматриваемого тела, которая расположена над плоскостью xOy. Уравнение (δ) является в то же время и уравнением кругового основания этого тела. Этот объём определяется двойным интегралом от функции z, определяемой уравнением (γ), т. е. от функции $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, распространённым на область D внутри окружности C, являющейся основанием второго цилиндра (δ):

$$\frac{V}{2} = \iint\limits_D \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy.$$

Двойной интеграл, распространённый не на весь круг основания, а лишь на часть его внутри первого квадранта, даст восьмую часть искомого объёма

$$\frac{V}{8} = \iint\limits_{\left(\frac{D}{4}\right)} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy.$$

Этот двойной интеграл проще вычислить, так как нижний предел первого интегрирования — постоянное число, равное нулю. Порядок интегрирования установим такой: сначала будем интегрировать в направлении оси Oy, а потом в направлении оси Ox. Пределы первого интегрирования $y' = 0$,

$y'' = \sqrt{a^2 - x^2}$, а пределы второго постоянны, именно 0 и a. Имеем:

$$\frac{V}{8} = \iint\limits_{\left(\frac{D}{4}\right)} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{y''} \sqrt{a^2 - x^2}\, dy =$$

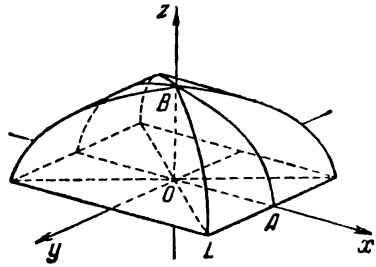
$$= \int\limits_0^a dx\, \sqrt{a^2 - x^2} \int\limits_0^{y''} dy; \quad \int\limits_0^{y''} dy = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\frac{V}{8} = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int\limits_0^a (a^2 - x^2)\, dx =$$

$$= a^2 \int\limits_0^a dx - \int\limits_0^a x^2\, dx = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2}{3} a^3,$$

$$V = \frac{16}{3} a^3.$$

2. Расположив цилиндры по осям Ox и Oy (черт. 51), мы получили бы поверхность, ограничивающую рассматриваемое тело над плоскостью xOy, в виде сомкнутого свода с квадратным основанием. Часть этого тела $AOLB$



Черт. 51.

с основанием OAL имеет объём, равный одной шестнадцатой доле искомого объёма, и выражается двойным интегралом от функции $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, распространённым на область внутри треугольника OAL:

$$\frac{V}{16} = \iint\limits_{OAL} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\, dy =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_{y'=0}^{y''=x} \sqrt{a^2 - x^2}\, dy = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \int\limits_0^x dy; \quad \int\limits_0^x dy = x;$$

$$\frac{V}{16} = \int\limits_0^a x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, d(a^2 - x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{2(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^a = \frac{a^3}{3} \quad \text{и} \quad V = \frac{16}{3} a^3.$$

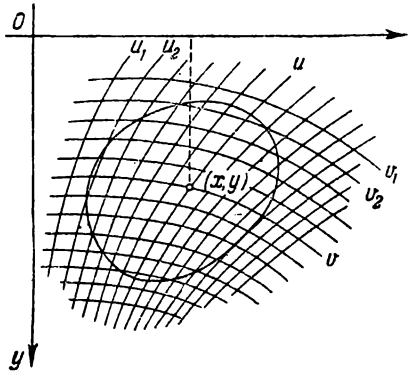
§ 4. Замена переменных в двойном интеграле.

Пусть прямоугольные координаты x, y являются функциями параметров u и v:

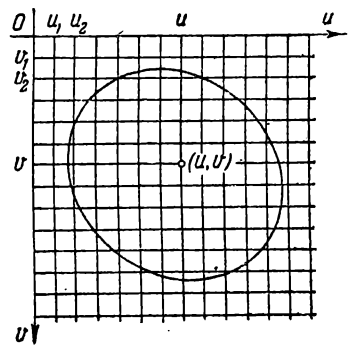
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{11}$$

Пусть эти функции однозначны, непрерывны и имеют непрерывные частные производные по u и v в некоторой области переменных u, v. При постоянном значении одного из параметров u и переменном v точка (x, y) описывает некоторую, вообще говоря кривую, линию. Различным значениям u соответствует серия линий, которые мы будем называть кривыми (u). Точно так же различным значениям v при переменном u соответствует серия линий (v). Таким образом каждой паре значений u, v соответствует точка (x, y), как точка пересечения соответствующих линий (u) и (v).

Рассмотрим в плоскости (x, y) такую область D, внутри которой каждая кривая (u) если пересекается с какой-либо кривой (v), то не более как в одной точке, причём через всякую точку области проходят кривая (u) и кривая (v) (черт. 52а). Для такой области соответствие пар значений (x, y), с одной стороны, и (u, v), с другой, будет взаимно однозначным. Параметры u и v



Черт. 52а.



Черт. 52б.

можно рассматривать как криволинейные координаты той же точки (x, y) [ср. т. I, стр. 160]. Если же u и v рассматривать как прямоугольные координаты в некоторой другой плоскости, то в этой плоскости (u, v) области D соответствует некоторая область D' (черт. 52б), причём каждой точке (u, v) области D' соответствует одна точка (x, y) в области D, и обратно.

Пусть теперь переменные x и y в двойном интеграле

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \tag{12}$$

заменяются новыми переменными u и v по формулам (11). Покажем, что при этом двойной интеграл (12) преобразуется в некоторый двойной интеграл, распространённый на соответствующую область D' плоскости (u, v). Это преобразование можно свести к последовательной замене переменного в простых интегралах, если наложить на область D (а значит, и D') некоторые дополнительные ограничения. А именно, мы будем предполагать, что:

1) контур C, ограничивающий область D, пересекается с каждой прямой, проходящей через любую внутреннюю точку области D параллельно оси Ox или Oy, равно как и с каждой из проходящих через такую точку кривых (u) и (v), в двух точках;

2) так называемый *функциональный определитель* или *якобиан* (определитель Якоби)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

сохраняет в области D' постоянный знак;

3) по крайней мере одна из четырёх частных производных, образующих этот определитель, например $\frac{\partial x}{\partial v}$, сохраняет в области D' постоянный знак.

При таких условиях относительно области интегрирования по правилу вычисления двойного интеграла имеем:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{13}$$

При первом интегрировании по y другой аргумент x считается постоянным. Тогда первое из уравнений (11) в силу условия $\frac{\partial x}{\partial v} \neq 0$ определяет v как функцию от u, причём

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}}.$$

Отсюда

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv = \left(\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v}}\right) du$$

или

$$dy = \frac{J}{-\frac{\partial x}{\partial v}}\, du.$$

Так как $\dfrac{J}{-\dfrac{\partial x}{\partial v}}$ в силу наших предположений сохраняет знак, то эта формула показывает, что y есть монотонная функция от u и обратно. Заменяя переменное y на u, получаем:

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, y)\,J\,\frac{du}{-\dfrac{\partial x}{\partial v}}$$

и формула (13) переходит в

$$\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, y)\,J\,\frac{du}{-\dfrac{\partial x}{\partial v}}, \qquad (14)$$

где y и v в правой части рассматриваются как функции от u.

Если $\dfrac{J}{-\dfrac{\partial x}{\partial v}} > 0$, то u есть возрастающая функция от y, следовательно, $u_1(x) < u_2(x)$, и правую часть формулы (14) можно представить в виде

$$\int\int_{D''} f(x, y)\,|J|\,\frac{dx\,du}{\left|\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|}, \qquad (15)$$

где D'' — область изменения переменных x, u, соответствующая заданной нам области D. Если же $\dfrac{J}{-\dfrac{\partial x}{\partial v}} < 0$, то u — убывающая функция от y и, следовательно, $u_1(x) > u_2(x)$. Переставляя в этом случае пределы интегрирования $u_1(x)$ и $u_2(x)$ и одновременно заменяя $\dfrac{J}{-\dfrac{\partial x}{\partial v}}$ на $\dfrac{J}{\dfrac{\partial x}{\partial v}}$, мы снова представим правую часть формулы (14) в виде (15). Итак, в обоих случаях получаем:

$$\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\int_{D''} f(x, y)\,|J|\,\frac{dx\,du}{\left|\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|} \qquad (14')$$

(где y, J и $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ предполагаются выраженными через x и u).

Так как, по предположению, каждая из кривых (u) пересекает контур C области D в двух точках, то область D'' ограничена снизу

и сверху некоторыми линиями $x = x_1(u)$ и $x = x_2(u)$.

Применяя снова правило вычисления двойного интеграла, будем иметь:

$$\iint\limits_{D''} f(x, y)\,|J|\,\frac{dx\,du}{\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|} = \int\limits_c^d du \int\limits_{x_1(u)}^{x_2(u)} f(x, y)\,|J|\,\frac{dx}{\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|}. \qquad (14'')$$

При интегрировании по x переменное u считается постоянным. Заменяя x через v из первого равенства (11) при $u = \text{const}$, имеем:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v}\,dv.$$

Так как $\frac{\partial x}{\partial v}$, по предположению, сохраняет знак, то эта формула показывает, что при постоянном u x есть монотонная функция от v и обратно. Заменяя переменное x на v, получаем:

$$\int\limits_{x_1(u)}^{x_2(u)} f(x, y)\,|J|\,\frac{dx}{\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|} = \int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(x, y)\,|J|\,\frac{\frac{\partial x}{\partial v}\,dv}{\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|},$$

и формула (14″) переходит в

$$\iint\limits_{D''} f(x, y)\,|J|\,\frac{dx\,du}{\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|} = \pm \int\limits_c^d du \int\limits_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(x, y)\,|J|\,dv, \qquad (15)$$

где знак плюс надо взять, если $\frac{\partial x}{\partial v} > 0$, а знак минус — если $\frac{\partial x}{\partial v} < 0$. Но если $\frac{\partial x}{\partial v} > 0$, то v есть возрастающая функция от x, следовательно, $v_1(u) < v_2(u)$, и правую часть формулы (15) можно представить в виде

$$\iint\limits_{D'} f(x, y)\,|J|\,du\,dv. \qquad (16)$$

Если же $\frac{\partial x}{\partial v} < 0$, то v — убывающая функция от x и, следовательно, $v_1(u) > v_2(u)$. Переставляя в этом случае пределы интегрирования $v_1(u)$ и $v_2(u)$ и одновременно заменяя знак минус перед интегралом на плюс, мы снова представим правую часть формулы (15) в виде (16). Итак, в обоих случаях имеем:

$$\iint\limits_{D''} f(x, y)\,\frac{dx\,du}{\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|} = \iint\limits_{D'} f(x, y)\,|J|\,du\,dv. \qquad (17)$$

Сопоставив равенства (14′) и (17), мы и получим окончательную формулу преобразования двойного интеграла:

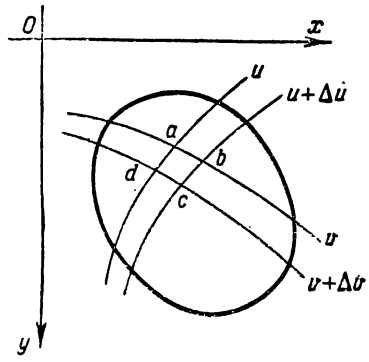
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x, y)\,|J|\,du\,dv. \tag{18}$$

Если область интегрирования не обладает принятыми выше свойствами, то, разбивая её на части, где эти свойства имеют место, — предполагая, конечно, такое разбиение возможным, мы можем заключить, что формула (18), справедливая для каждой части, будет справедлива и для всей области.

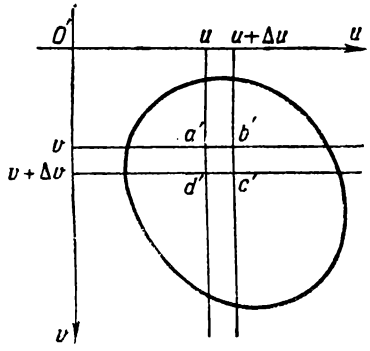
Таким образом при преобразовании двойного интеграла переменные x, y заменяются функциями новых переменных $x(u, v)$, $y(u, v)$, а элемент площади $dx\,dy$ области D — другим элементом — произведением модуля функционального определителя J на элемент площади $du\,dv$ новой области интегрирования D'.

§ 5. Элемент площади в криволинейных координатах.

Пусть область D' плоскости (u, v) разбита на прямоугольники прямыми, параллельными осям координат $O'u$, $O'v$ этой плоскости. Площадь какого-либо из этих прямоугольников $a'b'c'd'$ (черт. 53б),



Черт. 53а.



Черт. 53б.

обобщая понятие приращения переменного, обозначим через $\Delta(u, v)$ и будем считать её всегда положительной:

$$\Delta(u, v) = \Delta u\,\Delta v = \iint_{\Delta(u, v)} du\,dv > 0. \tag{19}$$

В плоскости (x, y) этому прямоугольнику соответствует криволинейный четырёхугольник $abcd$, ограниченный линиями (u), $(u+\Delta u)$, (v) и $(v+\Delta v)$ (черт. 53а). Обозначим эту площадь через $\Delta(x, y)$ и будем считать её положительной или отрицательной, смотря по

тому, будет ли функциональный определитель J положительным или отрицательным. Соответствие, устанавливаемое формулами

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

будем называть прямым, если $J > 0$, и обратным, если $J < 0$. По формуле преобразования двойного интеграла имеем

$$\iint\limits_{\Delta(x, y)} dx\, dy = \iint\limits_{\Delta(u, v)} |J|\, du\, dv,$$

и следовательно,

$$\Delta(x, y) = \iint\limits_{\Delta(u, v)} J\, du\, dv. \tag{20}$$

По теореме о среднем значении из равенства (20) следует

$$\Delta(x, y) = J(u_0, v_0) \iint\limits_{\Delta(u, v)} du\, dv = J(u_0, v_0)\, \Delta(u, v), \tag{20'}$$

где (u_0, v_0) — некоторая точка внутри области $\Delta(u, v)$, откуда

$$\frac{\Delta(x, y)}{\Delta(u, v)} = J(u_0, v_0).$$

Пусть теперь область $\Delta(u, v)$ по какому-либо закону стягивается в точку (u, v). Точка (u_0, v_0), оставаясь всегда внутри области $\Delta(u, v)$, стремится к точке (u, v) как своему предельному положению. Площадь $\Delta(x, y)$ в силу непрерывности соответствия также безгранично уменьшается, и в пределе мы будем иметь:

$$\lim \frac{\Delta(x, y)}{\Delta(u, v)} = J(u, v),$$

или, распространяя не только символы приращения, но и символ производной на область двух переменных,

$$\frac{d(x, y)}{d(u, v)} = J(u, v).$$

Таким образом функциональный определитель является обобщением понятия производной: функция одного переменного $y = f(x)$ устанавливает соответствие точек оси Ox и точек оси Oy; формулами $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ устанавливается соответствие двух плоскостей (u, v) и (x, y); производная $\frac{dy}{dx}$ является коэффициентом растяжения или сжатия для оси Oy, а функциональный определитель $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ — коэффициентом растяжения или сжатия для плоскости (x, y) в этом соответствии. Для элемента площади плоскости (x, y) в криволинейных координатах имеем

$$d(x, y) = J(u, v)\, d(u, v), \quad \text{или} \quad d(x, y) = J\, du\, dv.$$

Бесконечно малую площадь $d(x, y)$ можно рассматривать как площадь параллелограмма, составляющую главную часть бесконечно малой площади криволинейного четырехугольника $\Delta(x, y)$. Действительно, вершины A, B, C, D четырёхугольника $\Delta(x, y)$ имеют следующие координаты:

$$A(x, y),\ B\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\varepsilon'\rho,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\eta'\rho\right),$$

$$C\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v+\varepsilon\rho,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v+\eta\rho\right),$$

$$D\left(x+\frac{\partial x}{\partial v}\Delta v+\varepsilon''\rho,\ y+\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v+\eta''\rho\right),$$

где $\varepsilon, \eta, \varepsilon', \eta', \varepsilon'', \eta''$ — величины бесконечно малые вместе с $\rho=|\Delta u|+|\Delta v|$ (ср. гл. IV, § 4). Если отбросить в этих координатах бесконечно малые высших порядков, то получим четыре точки A, B', C', D':

$$A(x, y),\quad B'\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}du,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}du\right),$$

$$C'\left(x+\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\ y+\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right),$$

$$D'\left(x+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\ y+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right),$$

которые служат вершинами параллелограмма.

Примем точку A за новое начало координат тех же направлений. Остальные вершины будут иметь координаты

$$B'\left(\frac{\partial x}{\partial u}du,\ \frac{\partial y}{\partial u}du\right),$$

$$C'\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,\ \frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right),$$

$$D'\left(\frac{\partial x}{\partial v}dv,\ \frac{\partial y}{\partial v}dv\right).$$

Определяя площадь параллелограмма $AB'C'D'$, мы и получим утверждаемое [т. I, стр. 40]:

$$\text{пл. } AB'C'D' = 2\ \text{пл. } AB'C' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial u}du \\ \frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial v}dv \end{vmatrix}$$

или

$$\text{пл. } AB'C'D' = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv = J\,du\,dv.$$

Преобразованный двойной интеграл при замене переменных можно считать отнесённым к прежней области интегрирования D, но выраженным в криволинейных координатах: элементарные параллелепипеды

$f(x, y)\,dx\,dy$ данного интеграла заменяются элементарными параллелепипедами $f(x, y)\,|J|\,du\,dv$ преобразованного, в основании которых лежат элементарные «параллелограммы», образованные в пересечении бесконечно сближающихся пар кривых линий (u), $(u+du)$ и (v), $(v+dv)$.

§ 6. Свойства функционального определителя.

Аналогия между производной и функциональным определителем, отмеченная выше (§ 5), идёт и дальше. Так, если $y=f(u)$ и $u=\varphi(\xi)$, то

$$\frac{dy}{d\xi}=\frac{dy}{du}\,\frac{du}{d\xi}.$$

Точно так же для функционального определителя, если

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v)\quad\text{и}\quad u=u(\xi, \eta),\quad v=v(\xi, \eta),$$

то

$$\frac{d(x, y)}{d(\xi, \eta)}=\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\cdot\frac{d(u, v)}{d(\xi, \eta)}.$$

Это равенство, представляющее обобщение формулы дифференцирования функции от функции, является следствием очевидного тождества

$$\frac{\Delta(x, y)}{\Delta(\xi, \eta)}=\frac{\Delta(x, y)}{\Delta(u, v)}\cdot\frac{\Delta(u, v)}{\Delta(\xi, \eta)},$$

где $\Delta(x, y)$, $\Delta(u, v)$, $\Delta(\xi, \eta)$ означают соответственные площадки в плоскостях (x, y), (u, v) и (ξ, η), или также следствием формулы перемножения определителей; действительно,

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial\eta}\\ \frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\xi} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\eta}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\eta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial\xi} & \frac{\partial u}{\partial\eta}\\ \frac{\partial v}{\partial\xi} & \frac{\partial v}{\partial\eta}\end{vmatrix}.$$

§ 7. Переход от декартовых координат к полярным. Примеры применения замены переменных в двукратном интеграле.

Как наиболее часто применяемое, рассмотрим преобразование декартовых координат в полярные:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

где r и φ — переменные. Вычисляя функциональный определитель, получим

$$J(r, \varphi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=r,\qquad(21)$$

ибо

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi.$$

Следовательно,

$$d(x, y) = r\,dr\,d\varphi \tag{22}$$

и

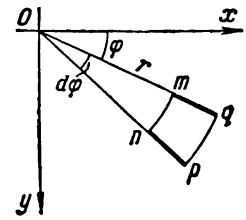
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \tag{23}$$

Выражение (22) для криволинейного элемента площади $d(x, y)$ можно вычислить и непосредственно из геометрических соображений. Действительно, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, можно принять криволинейный четырёхугольник $mnpq$ (черт. 54) за прямоугольник, у которого

$$mn = r\,d\varphi \text{ и } mq = dr,$$

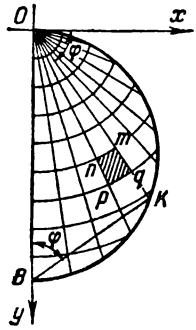
и, следовательно,

$$\text{пл. } mnpq = d(x, y) = r\,dr\,d\varphi.$$



Черт. 54.

Во многих случаях формулы преобразования можно подобрать так, что вычисление преобразованного интеграла будет проще. Упростить вычисление двойного интеграла и составляет одну из целей замены переменных в нём.



Черт. 55.

Пример 1. (Задача Вивиани.) Определить объём общей части шара и круглого цилиндра, касающегося этого шара и проходящего через его центр (ср. прим. 1 § 3).

Решение. Мы уже видели (стр. 241), что

$$\frac{V}{4} = \iint_{D'} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

где D' — половина окружности D (черт. 55). Вычисление этого интеграла мы произведём помощью замены декартовых координат на плоскости xOy полярными, т. е. полагая

$$x = r\cos\varphi \text{ и } y = r\sin\varphi,$$

где r и φ — полярные координаты точки $M(x, y)$.

Элемент площади в полярных координатах, как мы видели, определяется формулой

$$d(x, y) = r\,dr\,d\varphi.$$

Следовательно,

$$\frac{V}{4} = \iint_{D'} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \iint_{D'} \sqrt{R^2 - r^2}\,r\,dr\,d\varphi.$$

Первое интегрирование будем совершать по r при постоянном φ, а второе — по φ. Пределы первого будут 0 и $R\sin\varphi$ (черт. 55), а пределы второго постоянны, именно 0 и $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\sin\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr,$$

$$\int_0^{R\sin\varphi} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr = -\frac{1}{2}\left[\frac{2(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{R\sin\varphi} = \frac{R^3}{3}(1 - \cos^3\varphi),$$

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3}{3}(1 - \cos^3\varphi)\, d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi)\, d\sin\varphi =$$

$$= \frac{R^3}{3}\frac{\pi}{2} - \frac{R^3}{3}\left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^3}{6} - \frac{2R^3}{9} = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right);$$

$$V = \frac{4R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Если в двойном интеграле при постоянных пределах подинтегральная функция является произведением двух функций, из которых каждая зависит только от одного переменного, т. е. если

$$f(x, y) = F(x)\,\Phi(y),$$

то двойной интеграл равен произведению двух простых интегралов. Действительно,

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b\int_c^d F(x)\,\Phi(y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_c^d \Phi(y)\left[\int_a^b F(x)\, dx\right] dy.$$

Но интеграл с постоянными пределами

$$\int_a^b F(x)\, dx$$

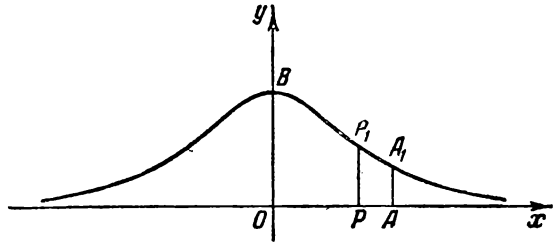
не зависит от y, и потому его можно вывести за знак последнего интеграла, откуда

$$\int_a^b\int_c^d F(x)\,\Phi(y)\, dx\, dy = \int_a^b F(x)\, dx \int_c^d \Phi(y)\, dy. \qquad (24)$$

Это частное свойство двойного интеграла в соединении с заменой переменных иногда можно, как это видно из следующего примера, применить к вычислению простого определённого интеграла, когда обычные способы помощью неопределённого интегрирования неприменимы.

Пример 2. Вычислить интеграл Пуассона (ср. стр. 123—124)

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx. \qquad (\alpha)$$



Черт. 56.

Геометрически величина этого интеграла представляет площадь, ограниченную осью абсцисс и кривою $y = e^{-x^2}$ (черт. 56), простирающеюся по обе стороны в бесконечность. Вычисление помощью неопределённого интегрирования здесь неприменимо, ибо соответствующий неопределённый интеграл не выражается с помощью элементарных функций в конечном виде. По определению несобственного (с бесконечными пределами) интеграла имеем

$$V = \lim_{R\to\infty} V_1, \quad \text{где} \quad V_1 = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx. \qquad (\beta)$$

Так как величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменного интегрирования, то можем написать также

$$V_1 = \int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy.$$

Следовательно,

$$V_1^2 = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,dy. \qquad (\gamma)$$

Применяя в обратном порядке формулу (24), получим

$$V_1^2 = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy. \qquad (\gamma')$$

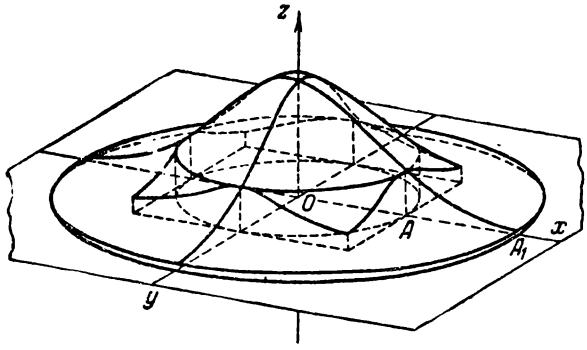
Этот двойной интеграл, распространённый на квадратную область

$$[-R \leqslant x \leqslant R,\ -R \leqslant y \leqslant R],$$

представляет геометрически объём тела, ограниченного сверху колоколообразной поверхностью, которая получается вращением линии $y = e^{-x^2}$ около оси Oz (черт. 57, $OA = R$). Область $K(R)$, для которой

$$x^2 + y^2 \leqslant R^2,$$

представляет круг и составляет часть нашего квадрата, а если радиус



Черт. 57.

круга взять больше половины диагонали квадрата (на черт. 57, $OA_1 > R\sqrt{2}$), то квадрат составит часть круга; поэтому

$$\iint\limits_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < \int\limits_{-R}^{R}\int\limits_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy <$$

$$< \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy. \qquad (\delta)$$

Но первый и последний интегралы могут быть вычислены с помощью замены декартовых координат полярными. Действительно, полагая для первого интеграла

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

будем иметь:

$$x^2 + y^2 = r^2,\ d(x, y) = r\,d\varphi\,dr;$$

при этом r меняется при интегрировании от 0 до R, а φ — от нуля до 2π, и таким образом рассматриваемый интеграл преобразовывается в интеграл с постоянными пределами:

$$\iint\limits_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int\limits_{r=0}^{r=R} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} e^{-r^2}\,r\,dr.$$

Интегрируя сначала по φ, получим:

$$\iint\limits_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = 2\pi\int\limits_{0}^{R} e^{-r^2}\,r\,dr. \qquad (\varepsilon)$$

Полученный интеграл можно истолковать геометрически следующим образом. Величина $2\pi r\,dr$ представляет (с точностью до бесконечно малых

высшего порядка) площадь кругового кольца, у которого радиус внутренней окружности равен r, а внешней $r+dr$. Эта площадь служит основанием цилиндрического кольца с высотой e^{-r^2}, а объём его $2\pi e^{-r^2} r\,dr$—элементом определяемого объёма.

Интеграл (ε) легко вычисляется:

$$2\pi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr = \pi \int_0^R e^{-r^2}\,d(r^2) = \pi\left[-e^{-r^2}\right]_0^R,$$

откуда

$$2\pi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr = \pi(1-e^{-R^2}) \text{ или } \int\limits_{K(R)}\int e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi(1-e^{-R^2}). \qquad (\varepsilon')$$

Теперь можно вычислить и последний член неравенств (δ):

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{K(R)}\int e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \pi(1-e^{-R^2}) = \pi.$$

Таким образом неравенства (δ) можно представить в следующем виде:

$$\pi(1-e^{-R^2}) < \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < \pi. \qquad (\delta')$$

Но согласно равенствам (γ) и (γ′)

$$\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx\right]^2,$$

и из неравенств (δ′) получаем

$$\sqrt{\pi(1-e^{-R^2})} < \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx < \sqrt{\pi}. \qquad (\xi)$$

Увеличивая безгранично R, мы и найдём из неравенства (ξ) величину интеграла Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

§ 8. Вычисление площади поверхности.

Что́ разумеется под площадью части кривой поверхности, ограниченной замкнутым контуром, конечно, должно быть определено. При этом если поверхность обращается в плоскость, то это определение должно привести к обычному определению площади плоской фигуры. Определение должно быть таково, чтобы площадь кривой поверхности зависела только от формы поверхности и ограничивающего контура, а не от положения её или каких-либо иных привходящих данных. Прежде чем дать такое определение, рассмотрим предварительно предложение о проекции площади плоской фигуры.

Лемма. *Проекция площади треугольника на какую-либо плоскость равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла её наклона к плоскости проекций.*

Доказательство. Предложение очевидно справедливо, если одна из сторон, например AB, проектируемого треугольника ABC параллельна плоскости проекций. Действительно, при таком положении сторона AB будет параллельна и равна своей проекции A_1B_1, а высота CH треугольника ABC (черт. 58) проектируется высотой C_1H_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Поэтому

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CH, \qquad \text{пл. } A_1B_1C_1 = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot C_1H_1.$$

Но

$$A_1B_1 = AB \text{ и } C_1H_1 = CH \cdot \cos\alpha,$$

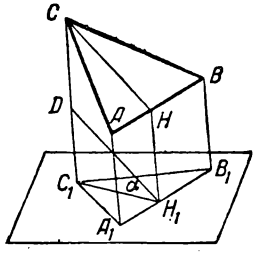
где α — угол наклона плоскости треугольника ABC к плоскости проекции. Следовательно,

$$\text{пл. } A_1B_1C_1 = \text{пр. пл. } ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CH \cos\alpha,$$

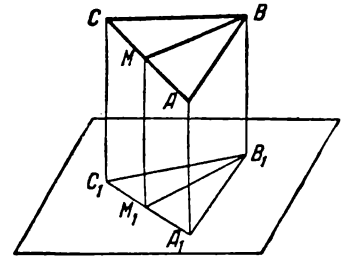
или

$$\text{пр. пл. } ABC = \text{пл. } ABC \cdot \cos\alpha.$$

Пусть теперь ни одна из сторон треугольника ABC не параллельна плоскости проекций. Если высота вершины B над плоскостью



Черт. 58.



Черт. 59.

проекций заключена между высотами вершин A и C, иначе — если $C_1C > B_1B > A_1A$, то через вершину B можно провести в плоскости треугольника прямую BM (черт. 59), параллельную плоскости проекций, и тем самым разделить треугольник ABC на два: ABM и CBM, у которых общая сторона BM параллельна плоскости проекций. По предыдущему имеем

$$\text{пр. пл. } ABM = \text{пл. } ABM \cdot \cos\alpha,$$
$$\text{пр. пл. } CBM = \text{пл. } CBM \cdot \cos\alpha.$$

Отсюда по сложении получим:

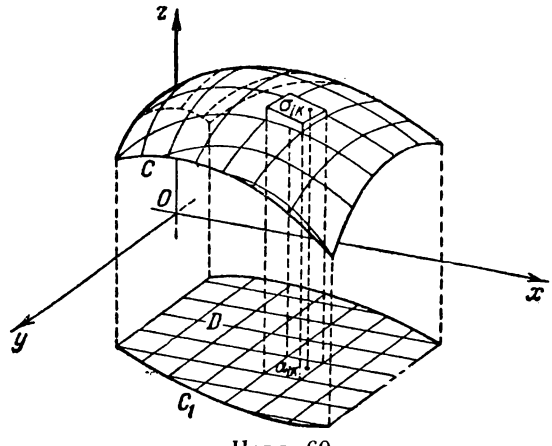
$$\text{пр. пл. } ABC = \text{пл. } ABC \cdot \cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Проекция площади любой плоской фигуры равна проектируемой площади, умноженной на косинус угла её наклона к плоскости проекций.*

Действительно, если фигура прямолинейна, то диагоналями её можно разбить на треугольники, а если она криволинейна, то её можно рассматривать как предел прямолинейных фигур.

Площадь кривой поверхности. Пусть подлежащая измерению часть поверхности ограничена замкнутым контуром C, который проектируется на плоскость xOy контуром C_1. Область D, ограниченную контуром C_1, разделим каким-либо образом, например, двумя сериями прямых, параллельных соответственно оси Ox и оси Oy, на элементарные части α_{ik} (черт. 60). В каждой из этих частей возьмём какую-либо точку (x_{ik}, y_{ik}) и в соответствующей точке поверхности (x_{ik}, y_{ik}, z_{ik}), где $z_{ik}=f(x_{ik}, y_{ik})$, проведём касательную плоскость. Пусть σ_{ik} — площадь той части этой касательной плоскости, которая имеет α_{ik} своей проекцией на плоскость xOy. По предыдущей лемме имеем:



Черт. 60.

$$\alpha_{ik}=\sigma_{ik}\cos\gamma_{ik},\ \text{или}\ \sigma_{ik}=\frac{\alpha_{ik}}{\cos\gamma_{ik}}, \tag{25}$$

где γ_{ik} — угол наклона касательной плоскости к плоскости xOy, равный углу между нормалью к поверхности в точке (x_{ik}, y_{ik}, z_{ik}) и осью Oz. Если из двух углов, образованных осью Oz и нормалью к поверхности, будем брать за угол γ_{ik} острый угол, то можно считать $\cos\gamma_{ik}>0$. Предполагая, что в каждой точке поверхности имеется определённая касательная плоскость и эти касательные плоскости переходят непрерывно одна в другую, не занимая положения, перпендикулярного к плоскости xOy, можно считать $\frac{1}{\cos\gamma}$ непрерывной функцией переменных x и y. При таких условиях сумма площадей σ_{ik}, прикасающихся к измеряемой поверхности, стремится к определённому пределу, который как предел двукратной суммы представляется в виде двойного интеграла:

$$\lim\sum\sum\sigma_{ik}=\lim\sum\frac{\alpha_{ik}}{\cos\gamma_{ik}}=\int\int_D\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}. \tag{26}$$

Этот предел и представляет, по определению, измеряемую площадь S поверхности. Так как (стр. 156)

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \text{ где } p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

то площадь S части поверхности $z = f(x, y)$, ограниченной замкнутым контуром C, можно представить в следующем виде:

$$S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy. \tag{26'}$$

Как следует из самого определения двойного интеграла, величина (26') площади кривой поверхности не зависит от способа разбиения её проекции D на элементарные части. Если поверхность — плоская, т. е. если z зависит линейно от x и y, то $\cos\gamma$ будет постоянным и формула (26) приводит к обычному определению площади плоской фигуры.

Пример 1. Вычислить поверхность шара $x^2+y^2+z^2=a^2$.
Решение. Уравнение верхней полусферы

$$z = \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}.$$

Нормаль в каждой точке поверхности направлена по радиусу и потому

$$z = a\cos\gamma.$$

Площадь полусферы определяется двойным интегралом

$$\frac{1}{2}S = \iint_D \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \iint_D \frac{a\,dx\,dy}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}, \tag{α}$$

где областью интегрирования D является область, ограниченная экватором шара. Переходя к полярным координатам, получим

$$\frac{1}{2}S = \iint_D \frac{ar\,dr\,d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}. \tag{β}$$

Пределы интегрирования постоянны: φ меняется от 0 до 2π, а r — от 0 до a; вычисляем:

$$\frac{1}{2}S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = 2\pi a\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^a = 2\pi a^2,$$

$$S = 4\pi a^2.$$

Заметим, что мы имели здесь дело с несобственными двойными интегралами, поскольку знаменатели в интегралах (α) и (β) на границах соответствующих областей обращаются в нуль.

Пример 2. Вычислить площадь той части поверхности шара, которая лежит внутри касающегося и проходящего через центр шара круглого цилиндра (ср. задачу Вивиани).

Решение. Областью интегрирования является круг радиуса $\frac{a}{2}$, проходящий через центр шара. Пределы интегрирования в полярных координатах — те же, что и в задаче Вивиани (§ 7):

$$\frac{1}{4}S = a\int_D\int \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sin\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Но

$$\int_0^{a\sin\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a\sin\varphi} = a(1-\cos\varphi);$$

следовательно,

$$\frac{1}{4}S = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\varphi)\,d\varphi = a^2\left[\varphi-\sin\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

$$S = 2a^2(\pi-2).$$

Независимость величины S от системы координат. Покажем теперь, что величина интеграла (26′) не зависит от системы координат, а зависит только от формы поверхности и ограничивающего контура.

Из теоремы о среднем значении интеграла имеем

$$\int_D\int \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \frac{1}{\cos\gamma_0}\int_D\int dx\,dy, \tag{27}$$

где γ_0 заключается между наименьшим (g) и наибольшим (G) углами наклона касательных плоскостей измеряемой части поверхности:

$$g < \gamma_0 < G. \tag{28}$$

Из равенства (27) имеем:

$$S = \frac{D}{\cos\gamma_0}.$$

Следовательно, всегда можно выбрать такую касательную плоскость поверхности — именно наклонённую под углом γ_0 к плоскости xOy, — что в сечении её с проектирующим цилиндром, опирающимся на контуры C и C_1, будем иметь площадь, равную величине двойного интеграла (26).

Применение этого положения к любой элементарной части поверхности приводит к следующему: можно выбрать такую точку (x_{ik}, y_{ik}) в каждой элементарной части α_{ik} площади D, что двукратная сумма, определяющая двойной интеграл (26), при стремлении своём к пределу совсем не будет менять своей величины, т. е.

$$\sum\sum \frac{\alpha_{ik}}{\cos\gamma_{ik}} = \lim \sum\sum \frac{\alpha_{ik}}{\cos\gamma_{ik}} = \int_D\int \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Пусть теперь оси координат изменяют свои направления, но достаточно мало, чтобы интеграл (26′) для каждого положения осей имел смысл [1]). Пусть контур C проектируется на плоскость $x'Oy'$ контуром C_1', ограничивающим площадь D'. При непрерывном изменении осей площадь D' непрерывно меняет свою величину и потому можно считать D' мало отличающимся от D. Подберём теперь угол γ_0' так, чтобы

$$D' = S\cos\gamma_0'. \tag{29}$$

Вследствие непрерывности изменения величины D' и направления оси аппликат $\cos\gamma_0$ будет мало отличаться от $\cos\gamma_0'$. Точно так же мало изменятся наименьший (g') и наибольший (G') углы наклона касательных плоскостей, так что будет оставаться в силе неравенство (28) для изменённых углов g', γ_0' и G':

$$g' < \gamma_0' < G'. \tag{28′}$$

Поэтому угол γ_0', определённый равенством (29), является углом наклона одной из касательных плоскостей измеряемой части поверхности, и площадь сечения этой плоскости с новым проектирующим цилиндром будет равна S, т. е. величине, названной нами площадью измеряемой части поверхности. Применяя это положение ко всякой элементарной части поверхности, мы можем заключить, что существует и для новых осей способ образования постоянной двукратной суммы, равной S:

$$\sum\sum \frac{\alpha_{ik}'}{\cos\gamma'} = S,$$

а следовательно, и всякий другой способ образования этой суммы при новой системе координат приводит к пределу S, т. е. величина интеграла (26′) зависит лишь от формы поверхности и ограничивающего контура.

§ 9. Площадь поверхности в криволинейных координатах.

Уравнение поверхности можно представить в параметрической форме

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{30}$$

где u и v — независимые переменные (параметры), а x, y, z в правых частях уравнений (30) — знаки функций. Если определить из первых двух уравнений u и v и вставить их выражения через x и y в последнее, то мы получим уравнение поверхности в виде $z = f(x, y)$.

Проектируя элемент поверхности $d\sigma$ последовательно на плоскости xOy, yOz, zOx, получим:

$$\cos\alpha\, d\sigma = d(y, z), \quad \cos\beta\, d\sigma = d(z, x), \quad \cos\gamma\, d\sigma = d(x, y),$$

---

[1]) Преобразованная функция должна оставаться однозначной, а поверхность — не иметь касательных плоскостей, перпендикулярных плоскости xOy, т. е. p и q должны быть конечны. Если бы изменение осей выходило из этих границ, то измеряемую поверхность нужно было бы разбить на части, к которым применимо проводимое рассуждение.

где α, β, γ — углы наклона нормали, соответствующей рассматриваемому элементу, к осям координат. Преобразовывая с помощью уравнений (30) элементарные площади $d(y, z)$, $d(z, x)$, $d(x, y)$, будем иметь

$$\cos\alpha\, d\sigma = A\, du\, dv,\quad \cos\beta\, d\sigma = B\, du\, dv,\quad \cos\gamma\, d\sigma = C\, du\, dv, \tag{31}$$

где

$$A = \frac{d(y, z)}{d(u, v)},\qquad B = \frac{d(z, x)}{d(u, v)},\qquad C = \frac{d(x, y)}{d(u, v)}.$$

Из равенств (31) по возведении в квадрат и сложении получим

$$d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv, \tag{32}$$

и следовательно,

$$S = \iint\limits_{D'} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv, \tag{33}$$

где D' — область изменения параметра u и v, соответствующая площади D.

Интеграл (33) можно представить в ином виде. Преобразуем помощью формул (30) элемент дуги, расположенной на поверхности:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{34}$$

Полагая здесь

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \frac{\partial x}{\partial v}\, dv,\quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\, du + \frac{\partial y}{\partial v}\, dv,\quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}\, du + \frac{\partial z}{\partial v}\, dv,$$

найдём:

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2, \tag{35}$$

где

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Принимая во внимание, что

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u},\quad B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u},\quad C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}, \tag{37}$$

нетрудно простым вычислением установить тождество

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2, \tag{38}$$

и следовательно,

$$S = \iint\limits_{D'} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{38'}$$

§ 10. Поверхностный интеграл или интеграл, распространённый на какую-либо определённую сторону поверхности.

Пусть некоторый кусок поверхности S, ограниченный замкнутым контуром, пересекается с любой прямой, параллельной оси Ox, или Oy, или Oz, не более чем в одной точке. Таким образом уравнение этой поверхности можно представить в любом из видов

$$x = f_1(y, z), \quad \text{или} \quad y = f_2(z, x), \quad \text{или} \quad z = f_3(x, y),$$

где $f_1(y, z)$, $f_2(z, x)$, $f_3(x, y)$ — непрерывные функции, однозначные соответственно в областях D_1, D_2, D_3, получаемых как проекции поверхности S на соответствующие плоскости координат.

Если $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывные функции переменных x, y, z, то интегралы

$$\left.\begin{gathered}\iint\limits_{D_1} P_1(f_1(y, z), y, z)\,dy\,dz, \quad \iint\limits_{D_2} Q(x, f_2(z, x), z)\,dz\,dx, \\ \iint\limits_{D_3} R(x, y, f_3(x, y))\,dx\,dy\end{gathered}\right\} \tag{39}$$

имеют согласно определению двойного интеграла вполне определённый смысл. Элементы площади $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dx\,dy$ по тому же определению должны считаться здесь положительными величинами. Не предрешая формы этих элементов площади, те же интегралы (39) можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{gathered}\iint\limits_{D_1} P(f_1(y, z), y, z)\,d(y, z), \quad \iint\limits_{D_2} Q(x, f_2(z, x), z)\,d(z, x), \\ \iint\limits_{D_3} R(x, y, f_3(x, y))\,d(x, y).\end{gathered}\right\} \tag{39'}$$

Пусть $d\sigma$ — элемент поверхности S, а α, β, γ — углы наклона к осям координат нормали в точке (x, y, z), направленной в какую-либо определённую сторону поверхности. Рассматривая элементы площади $d(y, z)$, $d(z, x)$, $d(x, y)$ как проекции элемента поверхности $d\sigma$, будем иметь:

$$\left.\begin{gathered}d(y, z) = |\cos\alpha|\,d\sigma, \quad d(z, x) = |\cos\beta|\,d\sigma, \\ d(x, y) = |\cos\gamma|\,d\sigma.\end{gathered}\right\} \tag{40}$$

Соответственно выбранной стороне поверхности $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — величины определённых знаков при всех перемещениях точки (x, y, z) по поверхности S. Если отнести эти знаки и к элементам площади, то равенства (40) примут вид

$$\left.\begin{gathered}d(y, z) = \cos\alpha\,d\sigma, \quad d(z, x) = \cos\beta\,d\sigma, \\ d(x, y) = \cos\gamma\,d\sigma,\end{gathered}\right\} \tag{40'}$$

где $d\sigma$ — во всяком случае положительная величина. При таких значениях $d(y, z)$, $d(z, x)$, $d(x, y)$ интегралы (39′), сохраняя определённый смысл, отличаются от интегралов (39), быть может, лишь знаком. Эти интегралы, как вполне определяемые формой и выбранной стороной поверхности S, можно обозначить следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\iint\limits_{\overline{S}} P(x, y, z)\cos\alpha\, d\sigma, \quad \iint\limits_{\overline{S}} Q(x, y, z)\cos\beta\, d\sigma, \\ &\qquad\qquad \iint\limits_{\overline{S}} R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

где под x, y, z разумеются координаты точек рассматриваемой поверхности, что и отмечается указателем S, а знаки косинусов определяются выбранной стороной $\overline{S}$ поверхности. Эти интегралы (41), а также их сумму

$$\iint\limits_{\overline{S}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma \tag{42}$$

и называют *поверхностными* или интегралами, распространёнными на определённую сторону поверхности S. Если направление нормали в каждой точке поверхности изменить на противоположное, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ изменят свой знак, а потому и интегралы (41) и (42), если их рассматривать распространёнными на другую сторону $\underline{S}$ поверхности, сохраняя прежнюю абсолютную величину, изменят свой знак:

$$\iint\limits_{\overline{S}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma =$$

$$= -\iint\limits_{\underline{S}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma,$$

где $\overline{S}$ и S означают разные стороны одной и той же поверхности.

Распространим теперь понятие поверхностного интеграла на случай, когда поверхность S может пересекаться с прямыми, параллельными осям координат, в нескольких точках. Разрежем такую поверхность линиями прикосновения огибающих её цилиндров с образующими, параллельными осям координат, на куски, каждый из которых обладает требуемым вначале свойством. Интеграл (42), распространённый на определённую сторону каждого из этих кусков; имеет по предыдущему определённый смысл. Сумму таких интегралов, распространённых на те стороны кусков, которые составляют одну сторону данной поверхности, например внешнюю в случае замкнутости, и

называют интегралом, распространённым на эту сторону поверхности S. При перемещениях точки (x, y, z) по поверхности в этом общем случае $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ могут и менять свой знак, но в каждой точке (x, y, z), раз выбрана сторона поверхности, каждый из косинусов имеет вполне определённый знак. Интеграл, распространённый на обратную сторону поверхности, отличается от первого только знаком.

Если поверхность дана параметрически, т. е. представлена уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{43}$$

то

$$d(y, z) = \frac{d(y, z)}{d(u, v)} d(u, v), \quad d(z, x) = \frac{d(z, x)}{d(u, v)} d(u, v),$$

$$d(x, y) = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} d(u, v).$$

Функциональные определители имеют здесь вполне определённый знак, смотря по тому, прямое или обратное соответствие между плоскостями (u, v) и (y, z), (z, x), (x, y) устанавливается формулами (43). Знаки элементов площадей $d(y, z)$, $d(z, x)$, $d(x, y)$ определяются выбранной стороной элемента поверхности $d\sigma$ и меняются на обратные при перемене стороны поверхности. Поэтому знак элемента $d(u, v)$ определяется выбранной стороной поверхности и можно положить

$$\cos\alpha\, d\sigma = \frac{d(y, z)}{d(u, v)} d(u, v), \quad \cos\beta\, d\sigma = \frac{d(z, x)}{d(u, v)} d(u, v),$$

$$\cos\gamma\, d\sigma = \frac{d(x, y)}{d(u, v)} d(u, v).$$

Поверхностный интеграл (42) преобразовывается таким образом в обыкновенный двойной интеграл

$$\iint_D \left(P \frac{d(y, z)}{d(u, v)} + Q \frac{d(z, x)}{d(u, v)} + R \frac{d(x, y)}{d(u, v)} \right) du\, dv,$$

взятый со знаком $+$ или $-$ соответственно выбранной стороне поверхности; здесь D означает область изменения переменных u и v, соответствующую поверхности S, на которую распространён интеграл (42), а $du\, dv > 0$.

§ 11. Трёхкратный интеграл.

Определение трёхкратного интеграла аналогично определению двукратного. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в каждой точке некоторой области V, ограниченной замкнутой поверхностью S. Будем предполагать эту функцию непрерывной в области V, а поверхность S — «кусочно однозначной»; под этим мы будем понимать, что S можно разбить на конечное число кусков, каждый из которых изо-

бражает непрерывную однозначную функцию каких-либо двух из переменных x, y, z:

$$z = z(x, y), \quad \text{либо} \quad x = x(y, z), \quad \text{либо} \quad y = y(z, x).$$

Разбивая область V плоскостями, соответственно параллельными плоскостям координат, на элементарные параллелепипеды α_{ikl}, где индексы i, k, l указывают номера по счёту от соответствующей плоскости координат рассматриваемого параллелепипеда, составим трёхкратные суммы

$$\sum_i \sum_k \sum_l f(x_i, y_k, z_l)\,\alpha_{ikl} \quad \text{и} \quad \sum_i' \sum_k' \sum_l' f(x_i, x_k, z_l)\,\alpha_{ikl}, \tag{44}$$

из которых первая распространена на внутреннюю область, а вторая—на внутреннюю и пограничную, которая составлена параллелепипедами α'_{ikl}, пересекаемыми ограничивающею область V поверхностью. Покажем, что сумма объёмов пограничных параллелепипедов имеет пределом нуль:

$$\lim \sum \alpha'_{ikl} = 0.$$

В силу сделанного выше предположения о «кусочной однозначности» поверхности S достаточно доказать, что к нулю стремится сумма пограничных параллелепипедов, содержащих «однозначный кусок» поверхности S, т. е. часть её, изображённую, например, однозначной непрерывной функцией

$$z = z(x, y).$$

Но в силу замкнутости поверхности S область D задания функции z можно считать замкнутой ограниченной. Тогда z равномерно непрерывна в D, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|z(x', y') - z(x, y)| < \varepsilon \text{ при } |x' - x| < \delta \text{ и } |y' - y| < \delta, \tag{45}$$

в какой бы части области D ни лежали точки (x, y) и (x', y'), лишь бы их координаты удовлетворяли указанным неравенствам. Рассмотрим произвольное разбиение пространства на параллелепипеды α_{ikl} со сторонами ξ_i, η_j и ζ_k, параллельными, соответственно, осям Ox, Oy и Oz и меньшими δ:

$$\xi_i < \delta, \quad \eta_j < \delta \text{ и } \zeta_k < \delta.$$

Пусть m_{ij} и M_{ij} — точные нижняя и верхняя границы функции z в столбце, образованном параллелепипедами α_{ijk}, проектирующимися на плоскость Oxy в один и тот же прямоугольник α_{ij} со сторонами ξ_i, η_j. В силу (45) имеем $M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$, и потому сумма высот параллелепипедов α_{ijk}, входящих в этот столб и содержащих каждый внутри точки рассматриваемого куска поверхности S, будет меньше $\varepsilon + 2\delta$. Отсюда следует, что сумма объёмов всех параллелепипедов α_{ijk},

содержащих внутри точки рассматриваемого куска поверхности S, меньше произведения

$$(\varepsilon + 2\delta) K, \tag{46}$$

где K — площадь какого-нибудь квадрата, содержащего внутри область D. Но взяв ε (а затем, в случае нужды, и δ) достаточно малым, мы сделаем сколь угодно малым и выражение (46). Тем самым наше предложение доказано.

На основании этого предложения совершенно так же, как в случае двукратного интеграла, можно доказать, что трёхкратные суммы (44) стремятся к одному и тому же пределу, который и называют *тройным* или *трёхкратным интегралом*:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_i \sum_k \sum_l f(x_i, y_k, z_l)\, \alpha_{ikl} = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \tag{47}$$

(Произведение $dx\, dy\, dz$, измеряющее объём бесконечно малого во всех трёх измерениях прямоугольного параллелепипеда, является элементом области интегрирования, а произведение $f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ — элементом трёхкратного интеграла.

Геометрическое и механическое толкование трёхкратного интеграла. Если функцию $f(x, y, z)$ примем сохраняющей в области интегрирования постоянное значение, равное 1, то трёхкратный интеграл представит объём тела, ограниченного поверхностью S и представляющего область интегрирования:

$$V = \iiint\limits_V dx\, dy\, dz.$$

Представим себе тело V, ограниченное поверхностью S, заполненным веществом, плотность которого в различных точках различна и является, следовательно, функцией координат точки $f(x, y, z)$. Произведение плотности $f(x, y, z)$ на объём $dx\, dy\, dz$ бесконечно малого параллелепипеда представляет массу этого объёма, а трёхкратный интеграл, распространённый на область V, представляет массу всего тела:

$$M = \iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Вычисление тройного или трёхкратного интеграла соответственно порядку суммирования его элементов можно свести к последовательному вычислению трёх простых интегралов. Пределы этих интегралов определяются формою поверхности S. Предположим, что эта поверхность с любою прямою, параллельною любой из осей координат, пересекается не более как в двух точках. Если бы такое предположение не имело места, то так же, как и в случае двойного интеграла, мы разбили бы область интегрирования на части, имеющие

требуемое свойство. Пусть первое суммирование бесконечно малых элементов $f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ совершается в направлении Oz при предполагаемых постоянными x и y. Пределами этого интеграла будут аппликаты z_1, z_2 точек пересечения поверхности S с прямой, по которой совершается суммирование (черт. 61). Эти аппликаты являются функциями x и y:

$$z_1 = z_1(x, y),\quad z_2 = z_2(x, y).$$

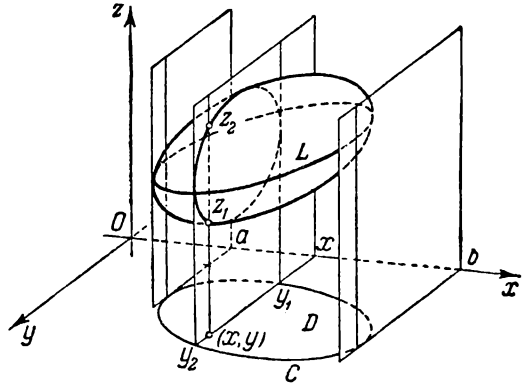
Таким образом получим после этого суммирования функцию переменных x и y:

$$dx\,dy\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz = \Phi(x, y)\,dx\,dy,$$

а

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dz = \iint_D \Phi(x, y)\,dx\,dy,$$

где D — область интегрирования; каждая точка этой области является проекцией какой-либо точки поверхности S. Иными словами, кривая C, ограничивающая эту область, представляет проекцию той линии на поверхности S, которая разделяет её на две части — верхнюю, определяемую уравнением $z_2 = z_2(x, y)$, и нижнюю, определяемую уравнением $z_1 = z_1(x, y)$ (черт. 61).



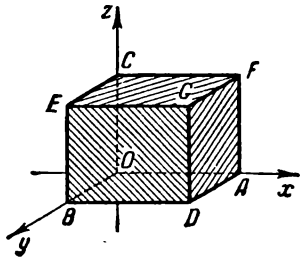
Черт. 61.

Таким образом вычисление тройного интеграла сведено к вычислению двойного, а о вычислении двойного была уже речь выше (§ 3). Итак,

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz\right] dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz,$$

где пределы z_1, z_2 первого интегрирования по z зависят от x и y: $z_1 = z_1(x, y)$, $z_2 = z_2(x, y)$, пределы y_1, y_2 второго — только от x: $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, а пределы третьего интегрирования a и b постоянны. Геометрическое значение пределов явствует из чертежа 61.

При перемене порядка интегрирования и пределы соответственно изменятся. Если тело, на которое распространяется интеграл, представляет собой параллелепипед с гранями, параллельными плоскостям координат, то пределы всех трёх интегралов постоянны и сохраняются при перемене порядка интегрирования.



Черт. 62.

Пример. Определить массу M параллелепипеда OG (черт. 62), в котором распределение плотностей подчинено закону

$$f(x, y, z) = x + y + z,$$

т. е. $x + y + z$ есть плотность в точке (x, y, z). Таким образом плотность в начале координат O равна нулю, в вершине G равна $a + b + c$; в плоскости, определяемой уравнением

$$x + y + z = m,$$

где m — какое-нибудь постоянное, плотность в каждой точке одна и та же, именно m. Меняя m, мы тем самым разбиваем параллелепипед на бесконечно тонкие слои одинаковой плотности. Масса всего тела определяется трёхкратным интегралом

$$M = \iiint_{OG} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x + y + z)\, dz;$$

$$\int_0^c (x + y + z)\, dz = \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=c} = cx + cy + \frac{c^2}{2};$$

$$\int_0^b \left(cx + cy + \frac{c^2}{2}\right) dy = \left[cxy + \frac{cy^2}{2} + \frac{c^2 y}{2}\right]_{y=0}^{y=b} = cbx + \frac{cb^2}{2} + \frac{c^2 b}{2};$$

$$M = \int_0^a \left(cbx + \frac{cb^2}{2} + \frac{c^2 b}{2}\right) dx = \left[\frac{cbx^2}{2} + \frac{cb^2 x}{2} + \frac{c^2 bx}{2}\right]_{x=0}^{x=a} =$$

$$= abc \cdot \frac{a + b + c}{2}.$$

§ 12. Замена переменных в трёхкратном интеграле.

Пусть переменные x, y, z в трёхкратном интеграле заменяются функциями новых переменных u, v, w:

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \qquad (48)$$

имеющими непрерывные частные производные по u, v и w, и пусть этими функциями устанавливается взаимно однозначное соответствие области V, на которую распространён данный трёхкратный интеграл, с соответствующей областью V' для новых переменных, на которую должен быть распространён преобразованный трёхкратный интеграл.

Здесь так же, как и при выводе формулы преобразования двукратного интеграла, область интегрирования будем пока предполагать подчинённой некоторым ограничительным условиям. От этих ограничений можно потом освободить окончательный результат, распространяя его и на области, которые могут быть составлены из областей рассматриваемого вида.

По правилу вычисления трёхкратного интеграла имеем

$$\int\int\int_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\int_D dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz, \qquad (49)$$

где $z_1 = z_1(x, y)$, $z_2 = z_2(x, y)$, а D — соответствующая область изменения x и y после интегрирования по z. При интегрировании по z переменные x и y считаются постоянными. Из равенств (48), полагая $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, находим:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv + \frac{\partial x}{\partial w}\,dw, \\ 0 &= \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv + \frac{\partial y}{\partial w}\,dw, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv + \frac{\partial z}{\partial w}\,dw. \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Отсюда, определяя du, получим:

$$du = \frac{J_{13}\,dz}{J} \quad \text{и} \quad dz = \frac{J}{J_{13}}\,du, \qquad (51)$$

где J и J_{13} — соответствующие функциональные определители

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}, \quad J_{13} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}. \qquad (52)$$

Мы предполагаем, что они сохраняют знак во всей области v.

Заменяя в интеграле $\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz$, где x и y считаются постоянными, переменное интегрирование z через u, будем иметь:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\,dz = \int_{u_1}^{u_2} f(x, y, z)\,\frac{J}{J_{13}}\,du, \qquad (53)$$

где $z = z(u, v, w)$, $u_1 = u_1(x, y)$, $u_2 = u_2(x, y)$, а v и w рассматриваются как функции x, y и u. Смотря по тому, будет ли $\frac{J}{J_{13}}$ положительным или отрицательным, u_1 будет меньше или больше u_2.

Таким образом данный трёхкратный интеграл с переменными интегрирования x, y, z преобразовывается в трёхкратный интеграл, содержащий переменными x, y, u, с соответствующей областью изменения V'':

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{u_1}^{u_2} f(x, y, z)\frac{J}{J_{13}}\,du,$$

или

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V''} f(x, y, z)\frac{|J|}{|J_{13}|}\,dx\,dy\,du. \quad (54)$$

Применяя снова правила вычисления трёхкратного интеграла, будем иметь

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b du \iint_{D'} f(x, y, z)\frac{|J|}{|J_{13}|}\,dx\,dy,$$

где a и b $(a < b)$ — постоянные пределы последнего интегрирования, а D' — область изменения предшествующего двукратного интегрирования, при котором u считается постоянным. Преобразуем этот двукратный интеграл с помощью подстановок (48), где u следует считать постоянным. Полагая $u = \text{const}$, находим:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw.$$

По правилу преобразования двойного интеграла элемент площади $dx\,dy$ заменяется элементом $|J_{13}|\,dv\,dw$:

$$dx\,dy = |J_{13}|\,dv\,dw, \quad \text{где} \quad J_{13} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\iint_{D'} f(x, y, z)\frac{|J|}{|J_{13}|}\,dx\,dy = \iint_{D''} f(x, y, z)|J|\,dv\,dw$$

и

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b du \iint_{D''} f(x, y, z)|J|\,dv\,dw,$$

или

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} f(x, y, z)\,|J|\,du\,dv\,dw. \quad (55)$$

Таким образом при преобразовании трёхкратного интеграла элемент объёма $dx\,dy\,dz$ заменяется элементом $|J|\,du\,dv\,dw$.

Функциональный определитель как обобщение производной. Полагая $f(x, y, z) = 1$, из равенства (55) получим

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} |J|\,du\,dv\,dw,$$

или по теореме о среднем значении [1])

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = |J(u_0, v_0, w_0)| \iiint\limits_{V'} du\,dv\,dw, \quad (56)$$

где (u_0, v_0, w_0) — некоторая точка в области V'. Обобщая обозначения приращения и производной на случай соответствия протяжений трёх измерений, подобно тому, как это для случая двух измерений было сделано в § 5, и считая $\Delta(u, v, w)$ положительным, а $\Delta(x, y, z)$ положительным или отрицательным, смотря по знаку функционального определителя, равенство (56) можно представить в следующем виде:

$$\Delta(x, y, z) = J(u_0, v_0, w_0)\,\Delta(u, v, w) \text{ и } \frac{\Delta(x, y, v)}{\Delta(u, v, w)} = J(u_0, v_0, w_0),$$

где

$$|\Delta(x, y, z)| = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz, \quad \Delta(u, v, w) = \iiint\limits_{V'} du\,dv\,dw. \quad (57)$$

Будем теперь стягивать область V' в точку (u, v, w). С этою же точкой совпадёт в пределе и точка (u_0, v_0, w_0), и таким образом получим:

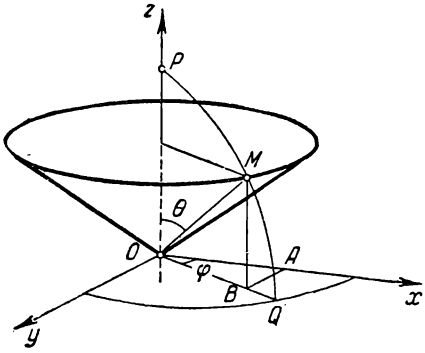
$$\frac{d(x, y, z)}{d(u, v, w)} = J(u, v, w) \text{ и } d(x, y, z) = Jd(u, v, w). \quad (58)$$

Новые переменные u, v, w можно рассматривать или как прямоугольные координаты в области V', или как криволинейные координаты в области V: уравнениям $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ соответствуют кривые поверхности, пересекающиеся в точке (u, v, w), прямоугольные координаты которой x, y, z.

Если из двух соответственных областей $\Delta(u, v, w)$ и $\Delta(x, y, z)$ первая представляет параллелепипед с гранями, соответственно параллельными плоскостям координат (vw), (wu), (uv), то вторая имеет форму криволинейного шестигранника, ограниченного кривыми поверх-

[1]) Которая очевидным образом распространяется и на грёхкратные интегралы (взятые по с в я з н о й области V).

ностями $u = \text{const}$, $u + \Delta u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $v + \Delta v = \text{const}$, $w = \text{const}$ и $w + \Delta w = \text{const}$. Элемент объёма $d(x, y, z) = Jd(u, v, w)$ представляет главную часть бесконечно малого объёма $\Delta(x, y, z)$. Рассматривая u, v, w как криволинейные координаты той же области V, мы можем теперь сказать, что замена переменных в трёхкратном интеграле сводится геометрически к замене одного элемента объёма $dx\,dy\,dz$ другим, который является главною частью объёма криволинейного шестигранника, образованного в пересечении бесконечно близких пар кривых поверхностей (u) и $(u + du)$, (v) и $(v + dv)$, (w) и $(w + dw)$. Другими словами, одно разбиение области V, именно тремя сериями плоскостей, параллельных соответственно плоскостям координат, заменяется другим, именно, тремя сериями кривых поверхностей (u), (v) и (w), где u, v, w принимают соответственно различные постоянные значения.



Черт. 63.

Элемент объёма в полярных координатах. Пусть r, θ, φ — полярные координаты точки $M(x, y, z)$: r — радиус-вектор, φ — долгота, а θ — дополнение широты до прямого угла (черт. 63):

$$OM = r, \quad \angle AOQ = \varphi, \quad \angle zOM = \theta;$$
$$OA = x, \quad AB = y, \quad BM = z.$$

Проектируя радиус-вектор, с одной стороны, сначала на плоскость экватора xOy, а потом на оси Ox, Oy, с другой, — на ось Oz, получим

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad \text{и} \quad z = r\cos\theta. \tag{59}$$

Различным значениям r соответствует ряд концентрических сфер, различным значениям θ — ряд круговых конусов с общею осью Oz и, наконец, различным значениям φ — пучок полуплоскостей с общим краем Oz. Равенства (59) устанавливают взаимно однозначное соответствие значений декартовых координат и полярных, если

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \theta < \pi.$$

Вычислим элемент объёма в полярных координатах. Дифференцируя x, y, z по r, φ и θ, находим

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi;$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\sin\theta\cos\varphi;$$
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

Следовательно,

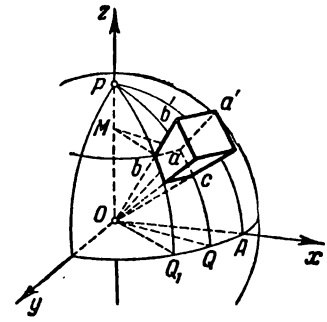
$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=r^2\sin\theta. \qquad (60)$$

Таким образом,

$$d(x,\ y,\ z)=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi. \qquad (61)$$

Тот же результат можно получить геометрически следующим образом. Сферами (r), конусами (θ) и полуплоскостями (φ) пространство разбивается на кривогранные шестигранники. Один из таких шестигранников мы получим, давая координатам r, θ и φ приращения dr, $d\theta$ и $d\varphi$ (черт. 64). Пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, можно принять такой шестигранник за прямоугольный параллелепипед с измерениями $aa'=dr$ вдоль радиуса, $ac=r\,d\theta$ по дуге меридиана и $ab=r\sin\theta\,d\varphi$ по дуге параллели. Определяя объём такого параллелепипеда, мы и получим предыдущее выражение (61).



Черт. 64.

§ 13. Вычисление объёмов.

Как мы видели, объём тела, ограниченного какими-либо поверхностями, определяется трёхкратным интегралом

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz. \qquad (62)$$

Элементом объёма здесь является бесконечно малый во всех направлениях параллелепипед, грани которого параллельны плоскостям координат. Формой ограничивающих измеряемый объём поверхностей определяются пределы последовательных интегрирований, к которым сводится вычисление трёхкратного интеграла.

Вычисление объёма с помощью суммирования бесконечно тонких пластинок. По правилу вычисления трёхкратного интеграла, если результат двух первых интегрирований, например по y и z, представить в виде двойного интеграла, имеем

$$V=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\iint\limits_D dy\,dz. \qquad (63)$$

Иногда границы тела таковы, что результат двойного интегрирования по y и z заранее известен как функция x, которая представляет площадь сечения, перпендикулярного оси Ox:

$$\iint_D dy\,dz = \varphi(x). \tag{64}$$

Произведение $\varphi(x)\,dx$ является элементом объёма и представляет объём бесконечно тонкой пластинки, вырезанной из тела, а объём всего тела может быть определён как сумма таких пластинок:

$$V = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{65}$$

В частности так вычисляется объём тела вращения, для которого $\varphi(x) = \pi y^2$. Примеры такого вычисления объёмов мы имели в т. I (стр. 455—457).

Вычисление объёма тела с помощью суммирования бесконечно тонких призм. Представим трёхкратный интеграл по правилу его вычисления в следующем виде:

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{z_1}^{z_2} dz,$$

где $z_1 = z_1(x, y)$ и $z_2 = z_2(x, y)$. Выполняя первое интегрирование, будем иметь:

$$V = \iint_D (z_2 - z_1)\,dx\,dy. \tag{66}$$

Произведение $(z_2 - z_1)\,dx\,dy$ является элементом объёма и представляет объём бесконечно тонкой призмы, площадь основания которой равна $dx\,dy$, а высота $z_2 - z_1$. Если эта высота, как функция x и y, известна, то вычисление объёма сводится к двукратному интегрированию, т. е. к суммированию такого рода призм, заполняющих измеряемый объём. В частности, если тело ограничено снизу плоскостью xOy, с боков — цилиндрической поверхностью, опирающейся на область D как основание, и сверху — поверхностью $z = f(x, y)$, то в равенстве (66) следует положить $z_1 = 0$ и $z_2 = f(x, y)$, и мы получаем:

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Такое геометрическое истолкование мы давали двукратному интегралу при его определении (стр. 234).

Вычисление объёма с помощью суммирования бесконечно тонких цилиндрических колец. Если в интеграле (66) декартовы координаты x и y преобразовать в полярные, то получим (стр. 253):

$$V = \iint\limits_{D'} (z_2 - z_1)\, r\, dr\, d\varphi,$$

где $z_2 - z_1$ представлено как функция r и φ. По правилу вычисления двойного интеграла имеем

$$V = \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} (z_2 - z_1)\, d\varphi.$$

Если $z_2 - z_1$ зависит только от r, то получаем, что

$$V = 2\pi \int_0^R (z_2 - z_1)\, r\, dr.$$

Элемент объёма — произведение $2\pi (z_2 - z_1)\, r\, dr$ — представляет объём бесконечно тонкого цилиндрического кольца радиуса r, толщина которого dr, а высота $z_2 - z_1$.

В частности, при $z_1 = 0$ и $z_2 = f(r)$ будем иметь

$$V = 2\pi \int_0^R f(r)\, r\, dr.$$

Таким образом вычисление объёма сводится к суммированию бесконечно тонких цилиндрических колец, заполняющих измеряемый объём (см. пример 2 § 7).

Вычисление объёма в полярных координатах. Как мы видели, в полярных координатах r, θ и φ объём определяется следующим трёхкратным интегралом:

$$V = \iiint\limits_{V} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Элементом объёма является бесконечно малый во всех направлениях кривогранный шестигранник (черт. 64). Формой и положением ограничивающих поверхностей определяются пределы последовательных интегрирований.

Вычисление объёма помощью суммирования бесконечно тонких пирамид (или конусов), усечённых или полных. Пусть начало координат лежит вне поверхности, ограничивающей измеряемый объём,

а радиус-вектор пересекает эту поверхность не более как в двух точках. По правилу вычисления трёхкратного интеграла имеем:

$$V = \iiint_V r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \iint_D \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \int_{z_1}^{z_2} r^2 \, dr,$$

или, по выполнении интегрирования по r,

$$V = \frac{1}{3} \iint_D (r_2^3 - r_1^3) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

где D — область изменения, определяемая конусом, огибающим ограничивающую поверхность из начала координат. Элементом объёма является разность объёмов двух пирамид, одной — с основанием $r_2 \sin\theta \, d\theta \cdot r_2 \, d\varphi$ и высотой r_2, а другой — с основанием $r_1 \sin\theta \, d\theta \cdot r_1 \, d\varphi$ и высотой r_1. Вычисление объёма сводится к суммированию такого рода пирамид. Если начало координат лежит внутри измеряемого тела, то $r_1 = 0$ и $r_2 = r$, а пределы для θ и φ постоянны:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^3 \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} r^3 \sin\theta \, d\theta.$$

§ 14. Центр тяжести. Теоремы Гюльдена.

Пусть в точках $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ сосредоточены массы m_1, m_2, на которые действуют пропорциональные этим массам параллельные силы P_1, P_2:

$$P_1 = m_1 g, \quad P_2 = m_2 g,$$

где g — коэффициент пропорциональности. Чтобы иметь конкретное представление о таких силах, можно принять g за ускорение силы тяжести, ибо силы тяжести при небольших размерах расстояния A_1A_2 сравнительно с радиусом земли можно считать параллельными. По правилам сложения параллельных сил равнодействующая равна сумме их, а точка приложения её C_2 делит расстояние A_1A_2 на части, обратно пропорциональные силам и, стало быть, массам:

$$\frac{A_1C_2}{C_2A_2} = \frac{P_2}{P_1}, \quad \text{или} \quad \frac{A_1C_2}{C_2A_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

При изменении направления действующих сил P_1, P_2 эта точка не меняет своего положения на отрезке A_1A_2; её называют центром параллельных сил или центром тяжести пары точек A_1, A_2. Пусть ξ_2, η_2, ζ_2 — координаты точки C_2. По формулам деления отрезка в данном отношении (т. I, стр. 37, 173) имеем:

$$\xi_2 = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad \eta_2 = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}, \quad \zeta_2 = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}. \qquad (67)$$

Если даны n точек $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$ с массами m_1, m_2, m_3, ..., m_n, на которые действуют параллельные силы P_1, P_2, P_3, ..., P_n, пропорциональные этим массам, то точку приложения равнодействующей C_n можно построить, складывая по предыдущему силы P_1, P_2, потом их равнодействующую P_1+P_2, приложенную в точке C_2, — с третьей силой P_3, и т. д. Получим таким образом определённую точку C_n, координаты которой ξ_n, η_n, ζ_n находятся постепенно по тем же формулам (67):

$$\xi_3=\frac{(m_1+m_2)x_2+m_3x_3}{(m_1+m_2)+m_3}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\ \text{и т. д.},$$

наконец

$$\xi_n=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},\quad \eta_n=\frac{m_1y_1+m_2y_2+\ldots+m_ny_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$
$$\zeta_n=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\ldots+m_nz_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}. \tag{68}$$

В каком порядке ни складывать параллельные силы P_1, P_2, ..., P_n и при любом их направлении, получим, как следует из симметрии формул (68), ту же точку $C_n(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$ как точку приложения равнодействующей $P_1+P_2+\ldots+P_n$. Точка C_n и будет центром тяжести системы материальных точек A_1, A_2, ..., A_n.

Если массы заполняют сплошь дугу какой-либо линии или часть поверхности или объём какого-либо тела, то суммы в числителях и знаменателях формул (68) обращаются в интегралы. В случае тела элемент массы равен произведению элемента объёма на плотность ρ, которая в общем случае будет функцией координат точки:

$$dm=\rho\,dx\,dy\,dz$$

и, следовательно, из формул (68), обозначая через ξ, η, ζ координаты центра тяжести тела, получим:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\frac{\int\int\int\rho x\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int\rho\,dx\,dy\,dz},\quad \eta=\frac{\int\int\int\rho y\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int\rho\,dx\,dy\,dz},\\ \zeta&=\frac{\int\int\int\rho z\,dx\,dy\,dz}{\int\int\int\rho\,dx\,dy\,dz},\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

где тройные интегралы распространяются на область, занимаемую рассматриваемым телом.

Если определяется центр тяжести поверхности, занимаемой сплошь массами, то подобным же образом найдём:

$$\xi=\frac{\int\int\rho x\,d\sigma}{\int\int\rho\,d\sigma},\quad \eta=\frac{\int\int\rho y\,d\sigma}{\int\int\rho\,d\sigma},\quad \zeta=\frac{\int\int\rho z\,d\sigma}{\int\int\rho\,d\sigma}, \tag{70}$$

где $d\sigma$ — элемент этой поверхности. Область, на которую распространяются встречающиеся здесь двойные интегралы, определяется рассматриваемой поверхностью. В частности для координат центра тяжести плоской пластинки будем иметь:

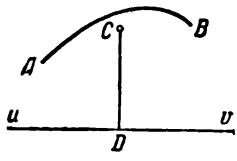
$$\xi = \frac{\int\int \rho x\, dx\, dy}{\int\int \rho\, dx\, dy}, \quad \eta = \frac{\int\int \rho y\, dx\, dy}{\int\int \rho\, dx\, dy}. \tag{70'}$$

Координаты центра тяжести дуги плоской кривой линии определяются по тем же основаниям формулами

$$\xi = \frac{\int \rho x\, ds}{\int \rho\, ds}, \quad \eta = \frac{\int \rho y\, ds}{\int \rho\, ds}, \tag{71}$$

где ds — элемент этой дуги, а пределы интегралов определяются концами её.

При однородности материального тела, или материальной поверхности, или материальной дуги плотность всюду постоянна и на ρ дроби в формулах (69), (70), (70') и (71) можно сократить. В этом случае из формул (70') и (71) для ординаты η центра тяжести можно вывести интересные теоремы Гюльдена для определения поверхности и объёма тел вращения.



Черт. 65.

Теорема 1. *Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой около некоторой оси, лежащей в плоскости кривой, равна произведению длины вращаемой дуги на длину окружности, которую описывает при этом центр тяжести её, определённый в предположении однородного распределения масс* (черт. 65).

Доказательство. Примем ось вращения за ось абсцисс. При однородном распределении масс на вращаемой дуге из равенств (71) имеем для ординаты центра тяжести дуги:

$$\eta = \frac{\int y\, ds}{\int ds}, \quad \text{или} \quad L\eta = \int y\, ds,$$

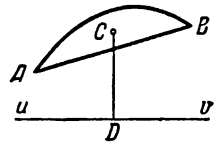
где L — длина вращаемой дуги, концами которой $A(x_0, y_0)$, $B(X, Y)$ определяются пределы интеграла. По умножении обеих частей последнего равенства на 2π, получим:

$$2\pi \int_{x=x_0}^{x=X} y\, ds = 2\pi\eta \cdot L.$$

Но в левой части этого равенства мы имеем площадь полученной поверхности вращения (т. I, стр. 459), а в правой — произведение длины вращаемой линии L на длину окружности, описанной центром тяжести, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Объём тела, образованного вращением плоской фигуры около оси, лежащей в плоскости этой фигуры вне её, равен произведению площади вращаемой фигуры на длину окружности, которую описывает при этом центр тяжести её, определённый в предположении однородного распределения масс* (черт. 66).

Доказательство. Принимая ось вращения за ось абсцисс и полагая, согласно условию, $\rho = \text{const}$, из формул (70′) имеем:



Черт. 66.

$$\eta = \frac{\int\int y\,dx\,dy}{\int\int dx\,dy}, \quad \text{или} \quad P\eta = \int\int y\,dx\,dy,$$

где P — вращаемая площадь, контур которой определяет и область, на которую распространяется двойной интеграл. Выполняя интегрирование по y, будем иметь:

$$\int_P\int y\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} y\,dy = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx,$$

где $y_2 = y_2(x)$ и $y_1 = y_1(x)$ — уравнения верхней и нижней частей контура вращаемой площади. Таким образом будем иметь

$$\frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx = P\eta,$$

или, по умножении на 2π,

$$\pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx = 2\pi\eta P.$$

Левая часть этого интеграла представляет объём рассматриваемого тела вращения, а правая — произведение вращаемой площади P на длину окружности, которую описывает центр её тяжести, что и требовалось доказать.

Применение теоремы Гюльдена к вычислению поверхностей и объёмов тел вращения особенно просто, когда положение центра тяжести вращаемой фигуры известно или по тем или иным соображениям легко определимо.

Пример 1. Вычислить поверхность и объём тора (ср. т. I, стр. 456). Тор получается вращением круга около не пересекающей его прямой, лежащей в той же плоскости.

Пусть a — радиус круга, а h — расстояние его центра от оси вращения. Рассматривать ли окружность заполненной равномерно массами или круг

— в том и другом случае, как следует из симметрии расположения масс, центром тяжести будет центр круга. Обозначая через S и V соответственно поверхность и объём тора, по теоремам Гюльдена будем иметь:

$$S = 2\pi a \cdot 2\pi h = 4\pi^2 ah,$$
$$V = \pi a^2 \cdot 2\pi h = 2\pi^2 a^2 h.$$

Теоремы Гюльдена могут служить и для определения положения центра тяжести той или другой фигуры, если соответствующая поверхность или объём тела вращения заранее известны.

Пример 2. Определить положение центров тяжести полуокружности и полукруга радиуса a. Полуокружность и полукруг при вращении около соответствующего диаметра дают поверхность и объём шара. Обозначая через h_1 и h_2 расстояния искомых центров тяжести от центра шара, будем иметь

$$4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi h_1 \text{ и } \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi a^2}{2} \cdot 2\pi h_2,$$

откуда

$$h_1 = \frac{2a}{\pi}, \quad h_2 = \frac{4a}{3\pi} \left(h_2 = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{2}{3} < h_1 \right).$$

Выражение для h_2 можно было бы вывести из выражения для h_1 геометрически, разбив полукруг на бесконечно тонкие секторы и рассматривая последние как треугольники: геометрическое место центров тяжести их будет полуокружность радиуса $\frac{2}{3}a$.

§ 15. Момент инерции.

Моментом инерции какой-либо материальной частицы относительно данной оси называют произведение массы этой частицы на квадрат её расстояния от данной оси. Моментом инерции системы материальных частиц называют сумму моментов инерции этих частиц. Чтобы вычислить момент инерции какого-либо тела относительно данной оси, данное тело разбивают на неограниченно возрастающее число безгранично убывающих частиц и составляют сумму моментов инерции всех этих частиц, в предположении, что вся масса каждой частицы сосредоточена в произвольной её точке. Предел этой суммы при беспредельном возрастании числа частиц и составляет, по определению, момент инерции данного тела.

В силу изложенного выше этот предел выразится трёхкратным интегралом, распространённым на объём данного тела.

В самом деле, допустим, что требуется вычислить момент инерции некоторого тела V относительно оси Oz. Разобьём весь объём V плоскостями, параллельными плоскостям координат, на мелкие прямоугольные параллелепипеды. Плотность тела во всех точках каждого из этих параллелепипедов будем считать одинаковой и совпадающей с действительной плотностью тела в одной из вершин взятого параллелепипеда. Возьмём какой-либо из этих параллелепипедов и пусть

x_i, y_i, z_i — координаты одной его вершины, $\rho(x_i, y_i, z_i)$ — плотность тела в этой вершине. Его объём будет

$$v_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$

Момент инерции этого параллелепипеда относительно оси Oz равен

$$r^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i,$$

где r — расстояние точки (x_i, y_i, z_i) от оси Oz:

$$r^2 = x_i^2 + y_i^2.$$

Момент инерции I всего тела мы получим, составив сумму

$$\sum r^2 \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

для всех параллелепипедов, находящихся внутри данного тела, и перейдя к пределу в предположении, что число параллелепипедов безгранично растёт в то время, как их линейные размеры стремятся к нулю. В силу изложенного выше, пределом этой суммы служит трёхкратный интеграл

$$I = \lim \sum r^2 \rho \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i = \int\int\int r^2 \rho \, dx \, dy \, dz,$$

распространённый на объём данного тела.

Таким же путём вычисляется и момент инерции произвольной плоской фигуры, покрытой некоторой массой, относительно оси, лежащей в плоскости этой фигуры. Кратность интеграла в этом случае понижается: мы получаем здесь двукратный интеграл, распространённый на площадь данной фигуры.

По тому же правилу вычисляются моменты инерции кривых поверхностей и линий относительно различных осей. При этом вычисление момента инерции линии сводится не к кратному, а к простому интегрированию.

Пример 1. Найти момент инерции круга радиуса R относительно какого-либо его диаметра, считая плотность фигуры равной единице во всех её точках.

Уравнение окружности будет

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (c)$$

Будем вычислять момент инерции относительно оси Ox. В силу предыдущего имеем:

$$I = \int\int_C y^2 \, dx \, dy = \int_{-R}^{+R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \, dy.$$

Но

$$\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{3}(R^2 - x^2)\sqrt{R^2-x^2},$$

следовательно,

$$I = \frac{2}{3}\int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Полагая

$$x = R\sin t, \quad dx = R\cos t\,dt,$$

имеем

$$I = \frac{2}{3}R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt = \frac{4}{3}R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt =$$

$$= \frac{4}{3}R^4\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4t + 4\cos 2t + 3)\,dt = R^4\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Пример 2. Вычислить момент инерции прямоугольника с основанием b и высотой h относительно оси, параллельной его основанию и проходящей через центр прямоугольника.

Поместив начало координат в центре прямоугольника и направив оси координат параллельно сторонам прямоугольника, вычисляем момент инерции относительно оси Ox:

$$I = \int\int y^2\,dx\,dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\,dy = \frac{bh^3}{12}.$$

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Что такое двукратный интеграл? Каково его геометрическое значение? Что такое элемент площади, элемент интеграла, элемент объёма?
2. В чём заключается правило замены переменных в двукратном интеграле? Что такое функциональный определитель и каково его геометрическое значение?
3. Какой вид имеет элемент площади в полярных координатах?
4. В чём заключается правило вычисления двукратного интеграла? Как определяются пределы последовательных интегрирований при вычислении двукратного интеграла? При какой области пределы интегрирования постоянны? Изменяются ли пределы при перемене порядка интегрирования?
5. Что такое трёхкратный интеграл? Какой вид имеет элемент объёма? Какое механическое значение может иметь трёхкратный интеграл? Как вычисляется трёхкратный интеграл? Как определяются пределы интегрирования? При какой форме области интегрирования пределы постоянны? Как преобразовывается трёхкратный интеграл при замене переменных? Какое геометрическое значение имеет функциональный определитель? Какой вид имеет элемент объёма в полярных координатах? В полуполярных или цилиндрических?
6. Каковы способы вычисления объёма?
7. Что такое криволинейный интеграл? Когда криволинейный интеграл зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования?

8. Что такое интеграл, распространённый на какую-либо сторону поверхности? Какая связь между интегралами, распространёнными на различные стороны одной и той же поверхности? Как свести интеграл по поверхности к обыкновенному двукратному интегралу?

9. Как вычисляется площадь поверхности? Элемент поверхности в декартовых координатах? В криволинейных?

УПРАЖНЕНИЯ.

Двукратный интеграл.

1. Вычислить с помощью двойного интегрирования объём усечённой треугольной призмы, в основании которой лежит треугольник в плоскости xOy, ограниченный прямыми $y = k_1 x$, $y = k_2 x$, $x = a$, причём $k_2 > k_1 > 0$, рёбра параллельны оси Oz, а верхнее основание (косое сечение) дано уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

Отв. $V = \frac{a^2(k_2 - k_1)}{2} \cdot \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$, где z_1, z_2, z_3 — боковые рёбра призмы.

2. Вычислить таким же образом объём кругового цилиндра с основанием, данным уравнением $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, усечённого плоскостью

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Отв. $V = \pi a^2 \cdot \frac{p}{\cos\gamma}$.

3. Вычислить объём эллиптического цилиндра с основанием $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, усечённого плоскостью $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

Отв. $V = \pi ab \cdot \frac{p}{\cos\gamma}$.

4. Вычислить объём ограниченного сверху параболоидом $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$ призматического тела, в основании которого лежит прямоугольный треугольник, отсечённый от координатного угла прямою $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Отв. $V = \frac{1}{12} abc$, где $c = \frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2q}$.

5. Вычислить объём цилиндра с эллиптическим основанием $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ограниченного сверху эллиптическим параболоидом $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$.

Отв. $V = \frac{1}{4}\pi abc$; $c = \frac{a^2}{2p} + \frac{b^2}{2q}$.

Замена переменных в двукратном интеграле.

6. Двукратный интеграл $J = \int\int e^{k(x+y)^2}\,dx\,dy$ распространён на область D, определяемую неравенствами $0 \leqslant x + y \leqslant 1$. Преобразовать его с помощью подстановки $x = s - st$, $y = st$. Каков геометрический смысл этого преобразования? Что означают геометрически s и t? В какую сеть преобразовывается элементарная сеть прямоугольников $dx\,dy$?

Отв. $J = \int_0^1 \int_0^1 e^{ks^2} s\,ds\,dt = \frac{e^k - 1}{2k}$.

7. Вычислить двукратный интеграл $J = \iint\limits_D e^{k\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2} dx\,dy$, распространённый на область D, определяемую неравенствами $0 \leqslant \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leqslant 1$. (Заменой $x = a\xi$, $y = b\eta$ задача сводится к предыдущей.)

Отв. $J = ab \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 e^{ks^2}\, s\,ds\,dt = ab\,\frac{e^k - 1}{2k}$.

Вычисление площади поверхности.

8. Вычислить площадь той части поверхности равностороннего гиперболического параболоида $x^2 - y^2 = 2pz$, которая ограничена линией пересечения поверхности с цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$.

Отв. $S = \frac{2\pi}{3p}\left[(p^2 + a^2)\sqrt{p^2 + a^2} - p^3\right]$.

9. Вычислить площадь части винтовой поверхности $z = c\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$, проектирующейся на плоскость xOy в виде правой от оси Oy половины кольца с центром в начале координат и радиусами a и b.

Отв. $S = \frac{\pi}{2}\left[b\sqrt{b^2 + c^2} - a\sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{a + \sqrt{a^2 + c^2}}\right]$.

Трёхкратный интеграл.

10. Вычислить объём эллипсоида.

Отв. $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

11. Определить массу шара, если плотность в какой-либо точке его обратно пропорциональна квадрату расстояния этой точки от центра шара; коэффициент пропорциональности k, а радиус шара a.

Отв. $M = 4\pi ak$.

Центр тяжести и теоремы Гюльдена.

12. Определить центр тяжести тонкой однородной полусферической чашки радиуса a.

Отв. $\zeta = \frac{a}{2}$.

13. Цилиндрическая поверхность, проходящая через круги прикосновения тора с двумя плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, разрезает тор на два кольца. Как велика разность объёмов и разность поверхностей этих колец?

Отв. Разность объёмов равна объёму двух шаров радиуса a, а разность поверхностей — поверхности двух таких шаров.

Момент инерции.

14. Вычислить момент инерции треугольника относительно одной из его высот.

15. Вычислить момент инерции параболического сегмента, ограниченного параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = p$, относительно касательной в вершине параболы.

16. Вычислить момент инерции сферы относительно одного из её диаметров.

ГЛАВА VIII.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ИНТЕГРАЛАМИ, РАСПРОСТРАНЁННЫМИ НА ОБЛАСТЬ, И ИНТЕГРАЛАМИ, РАСПРОСТРАНЁННЫМИ НА ГРАНИЦУ ЭТОЙ ОБЛАСТИ.

§ 1. Формула Остроградского на плоскости.

Особенно важное значение как для математического анализа, так и для математической физики имеют предложения, которыми устанавливается связь между интегрированием, распространённым на область, и интегрированием, распространённым на границу этой области. Эти предложения устанавливаются формулами Остроградского и Стокса. К этой же категории, как простейшее, можно отнести и основное предложение интегрального исчисления, по которому значения первообразной функции при верхнем и нижнем пределах определённого интеграла, т. е. на границах интервала интегрирования, определяют и величину интеграла, распространённого на этот интервал.

Двойной интеграл, распространённый на какую-либо площадь, можно свести к криволинейному интегралу по контуру этой площади. Формулу, устанавливающую такое соотношение, называют формулой Остроградского на плоскости. Для вывода её рассмотрим предварительно интегралы

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \quad \text{и} \quad \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy,$$

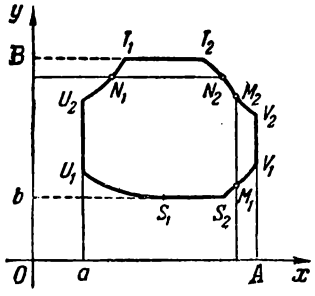
где $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ — непрерывные однозначные функции в области интегрирования D. Контур этой области C, предположим, пересекается с любой прямой, проходящей через внутреннюю точку области, параллельно оси Ox или оси Oy, в двух точках. Пусть прямая, параллельная оси Oy, пересекает контур C в точках $M_1(x, y_1)$ и $M_2(x, y_2)$. По правилу вычисления двукратного интеграла имеем:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^A dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^A [P(x, y_2) - P(x, y_1)]\,dx, \qquad (1)$$

где a и A — наименьшая и наибольшая абсциссы точек контура C, т. е. точек U_1, U_2 и V_1, V_2 (черт. 67), а y_1, y_2 являются функциями переменного x, имеющими своими графиками $U_1M_1V_1$ и $U_2M_2V_2$ [1]). Но интегралы

$$\int_a^A P(x, y_1)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^A P(x, y_2)\,dx$$

можно рассматривать как криволинейные интегралы, распространённые первый на дугу $U_1M_1V_1$, а второй — на дугу $U_2M_2V_2$ контура C, т. е.



Черт. 67.

$$\int_a^A P(x, y_1)\,dx = \int_{U_1M_1V_1} P(x, y)\,dx,$$

$$\int_a^A P(x, y_2)\,dx = \int_{U_2M_2V_2} P(x, y)\,dx = -\int_{V_2M_2U_2} P(x, y)\,dx.$$

Следовательно, равенство (1) можно представить в виде

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{V_2M_2U_2} P(x, y)\,dx - \int_{U_1M_1V_1} P(x, y)\,dx,$$

или

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{V_2M_2U_2} P(x, y)\,dx - \int_{U_2U_1} P(x, y)\,dx - \int_{U_1M_1V_1} P(x, y)\,dx - \int_{V_1V_2} P(x, y)\,dx,$$

ибо добавленные нами второй и четвёртый интегралы справа, распространённые на отрезки U_2U_1 и V_1V_2, перпендикулярные к оси Ox (или вырождающиеся в точку), равны нулю. Но дуги $V_2M_2U_2$, U_2U_1, $U_1M_1V_1$ и V_1V_2 соединяются в одну линию C, проходимую против движения часовой стрелки, и потому

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_C P\,dx. \tag{2}$$

Точно так же, обозначая через b и B наименьшую и наибольшую ординаты точек контура C, т. е. точек S_1, S_2 и T_1, T_2, а через x_1,

[1]) Точки U_1 и U_2, равно как V_1 и V_2, могут и совпадать.

x_2 — абсциссы точек N_1, N_2, меняющиеся в зависимости от y, находим:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_b^B dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int_b^B [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]\,dy =$$

$$= \int_{S_2\overset{\frown}{N_2}T_2} Q\,dy + \int_{T_1\overset{\frown}{N_1}S_1} Q\,dy =$$

$$= \int_{S_2\overset{\frown}{N_2}T_2} Q\,dy + \int_{T_2\overset{\frown}{T_1}} Q\,dy + \int_{T_1\overset{\frown}{N_1}S_1} Q\,dy + \int_{S_1\overset{\frown}{S_2}} Q\,dy,$$

или, так как дуги $S_2N_2T_2$, T_2T_1, $T_1N_1S_1$ и S_1S_2 составляют полный контур C,

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_C Q\,dy. \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) по вычитании и получим формулу Остроградского на плоскости:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy. \tag{4}$$

Если кривая C, ограничивающая область D, пересекается с той или другой прямой, проходящей через внутреннюю точку области параллельно оси абсцисс или оси ординат, более чем в двух точках, то соответствующими разрезами мы область D разобьём на области D_1, D_2, ..., к каждой из которых применима формула (4). Складывая почленно полученные таким образом равенства, мы получим снова формулу (4), ибо интегралы правой части соединяются в один криволинейный интеграл по контуру C, так как интегралы по разрезам, проходимым два раза в противоположных направлениях, обращаются в нуль.

Применим формулу Грина (4) к определению площади при помощи криволинейного интеграла, взятого по контуру, ограничивающему эту площадь. Полагая

$$P = -\frac{1}{2}y \quad \text{и} \quad Q = \frac{1}{2}x,$$

будем иметь

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Следовательно,

$$\iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx. \tag{5}$$

Но двойной интеграл $\int\int dx\,dy$ представляет величину площади D, на которую он распространён. Таким образом площадь можно вычислить по формуле (5) с помощью криволинейного интеграла, взятого по её периметру.

Если уравнения контура C представить параметрически:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad \text{причём } \varphi(t_0)=\varphi(T) \text{ и } \psi(t_0)=\psi(T),$$

то криволинейный интеграл второй части равенства (5) обратится в простой определённый интеграл и мы получим для вычисления площади D уже известную нам формулу [т. I, стр. 447, (10)]

$$D=\frac{1}{2}\int_{t=t_0}^{t=T}(x\,dy-y\,dx).$$

При помощи той же формулы (4) можно представить площадь D криволинейным интегралом иного вида. Полагая $P=-y$, а $Q=0$, будем иметь

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad \text{и} \quad \int\int_D dx\,dy=-\int_C y\,dx. \tag{6}$$

Полагая $Q=x$, а $P=0$, получим

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad \text{и} \quad \int\int_D dx\,dy=\int_C x\,dy. \tag{7}$$

Полусумма интегралов (6) и (7) даст нам снова формулу (5).

Из формулы (4) можно вывести условие, при котором криволинейный интеграл $\int P\,dx+Q\,dy$ зависит только от начальной и конечной точек пути интегрирования. Действительно, в этом случае криволинейный интеграл по замкнутому контуру внутри соответствующей области, где P и Q вместе со своими производными непрерывны, должен равняться нулю. Из формулы (4) следует, что и двойной интеграл $\int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$ при всякой области должен равняться нулю, что возможно тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Это условие мы уже вывели раньше из других соображений (см. §§ 7—8).

§ 2. Формула Остроградского в пространстве.

Формула Остроградского в пространстве, представляющая соответствующую формулу для тройных интегралов, имеет вид

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \oint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy, \tag{8}$$

где P, Q, R — непрерывные вместе со своими частными производными функции x, y, z:

$$P=P(x, y, z), \quad Q=Q(x, y, z), \quad R=R(x, y, z).$$

Допустим сначала, что поверхность S, ограничивающая объём V, с любой прямой, проходящей через внутреннюю точку тела V параллельно любой из осей координат, пересекается в двух точках.

Применяя правило последовательного вычисления к тройному интегралу $\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$, будем иметь

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_V dx\,dy \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz, \tag{9}$$

где z_1, z_2 — функции x и y, определяемые нижней и верхней частями поверхности S:

$$z_1=z_1(x, y), \quad z_2=z_2(x, y) \quad (z_1<z_2).$$

Выполняя интегрирование по z во второй части равенства (9), получим:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_V [R(x, y, z_2)-R(x, y, z_1)]\,dx\,dy. \tag{10}$$

Двукратные интегралы

$$\iint\limits_D R(x, y, z_2)\,dx\,dy \quad \text{и} \quad \iint\limits_D R(x, y, z_1)\,dx\,dy,$$

распространённые на область D, в которую проектируются обе части поверхности S, можно рассматривать как интегралы, распространённые на верхнюю сторону: первый — верхней части $[z_2=z_2(x, y)]$, а второй — нижней части $[z_1=z_1(x, y)]$ поверхности S, ибо элемент

площади $dx\,dy$ в этих интегралах положителен:

$$\iint\limits_D R(x, y, z_2)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{S}_2} R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

$$\iint\limits_D R(x, y, z_1)\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{S}_1} R(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Указатели $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ обозначают верхние стороны обеих частей поверхности S. Поэтому, обозначая через $\underline{S}_1$ нижнюю сторону нижней части поверхности S, будем иметь

$$\iint\limits_D [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)]\,dx\,dy = \iint\limits_{\overline{S}_2} R(x, y, z)\,dx\,dy + \iint\limits_{\underline{S}_1} R(x, y, z)\,dx\,dy.$$

Но поверхности $\overline{S}_2$ и $\underline{S}_1$ вместе с соединяющей их цилиндрической поверхностью, образующие которой перпендикулярны к плоскости xOy (и, возможно, вырождаются в точку), образуют вместе внешнюю сторону поверхности S. Следовательно, равенство (10) можно представить в следующем виде:

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S R(x, y, z)\,dx\,dy, \qquad (10')$$

где под S разумеется внешняя сторона поверхности, ограничивающей объём V.

Подобным же образом находим

$$\left.\begin{aligned} \iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_S P\,dy\,dz \\ \text{и} \qquad \iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz &= \iint\limits_S Q\,dz\,dx. \end{aligned}\right\} \qquad (10'')$$

Из равенств (10′) и (10″) по сложении и получим формулу (8).

Если поверхность S пересекается прямыми, проходящими через внутреннюю точку параллельно той или иной оси координат, более чем в двух точках, то область V разрезают новыми поверхностями на части, удовлетворяющие требуемому свойству. К каждой из таких частей применима формула (8). По сложении таким образом полученных равенств получим ту же формулу (8), ибо те части поверхностных интегралов, которые приходятся на разрезывающие поверхности, в сумме дают нуль, так как интегралы берутся с той и другой стороны любой разрезывающей поверхности.

Применим формулу (8) к определению объёма с помощью поверхностного интеграла. Полагая $P=\frac{1}{3}x$, $Q=\frac{1}{3}y$ и $R=\frac{1}{3}z$, будем иметь $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$ и $\int\int_V\int dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\int_S\int x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+$ $+z\,dx\,dy$.

Обозначая углы наклона внешней нормали к поверхности S через α, β, γ, получим:

$$\int\int_V\int dx\,dy\,dz=\frac{1}{3}\int_S\int(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\,d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности. Если r — радиус-вектор точки (x, y, z), а (r, n) — угол между ним и внешней нормалью n, то, проектируя звенья ломаной (x, y, z) и замыкающую r на внешнюю нормаль, найдём:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=r\cos(r, n).$$

Следовательно,

$$\int\int_V\int dx\,dy\,dz=V=\frac{1}{3}\int_S\int r\cos(r, n)\,d\sigma.$$

Так, если центр шара лежит в начале координат, то $r=\text{const}$., а $(r, n)=0$; для объёма шара будем иметь таким образом

$$V=\frac{1}{3}r\int_S\int d\sigma,\quad\text{или}\quad V=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

так как

$$\int_S\int d\sigma=4\pi r^2.$$

Из формулы Остроградского следует, что интеграл по поверхности

$$\int_S\int P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

зависит не от формы поверхности, а только от ограничивающего её контура, если

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0. \tag{11}$$

Действительно, пусть S и S_1 — две поверхности, ограниченные одним и тем же контуром L и не имеющие других общих точек. Интегралы, распространённые на соответственные стороны этих поверхностей, по условию равны между собой, а потому интеграл по внешней стороне

замкнутой поверхности $S+S_1$ должен равняться нулю. Следовательно, для всякой области V, где выполняются условия непрерывности функций P, Q, R и их производных $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$, должно иметь место равенство

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 0,$$

что возможно лишь при условии (11).

§ 3. Теорема Грина.

Применение формулы Остроградского к функциям вида

$$P = U\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q = U\frac{\partial V}{\partial y} - V\frac{\partial U}{\partial y},\quad R = U\frac{\partial V}{\partial z} - V\frac{\partial U}{\partial z},$$

где U и V — функции переменных x, y, z, непрерывные вместе со своими производными в рассматриваемой области D, приводит к теореме Грина, имеющей существенное значение в математической физике. Заметим предварительно, что

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = U\Delta V - V\Delta U,$$

где под ΔU и ΔV разумеются следующие выражения — так называемые вторые дифференциальные параметры [1]):

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Кроме того, обозначая через n перемещение точки по нормали к поверхности S, ограничивающей рассматриваемую область V, будем иметь

$$x = x_0 + n\cos\alpha,\quad y = y_0 + n\cos\beta,\quad z = z_0 + n\cos\gamma,$$

где (x_0, y_0, z_0) — точка, служащая началом отсчёта для n, а α, β, γ, как и раньше, — углы наклона нормали n к осям координат. Рассматривая функции U и V как сложные функции n, находим их производные по нормали, т. е. производные по этому переменному n:

$$\frac{dU}{dn} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dn},$$

---

[1]) Первым дифференциальным параметром называют выражение

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2.$$

или

$$\frac{dU}{dn} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma;$$

точно так же

$$\frac{dV}{dn} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma.$$

Вычисляя выражение

$$P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma,$$

получим

$$P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}.$$

Применяя теперь формулу Остроградского, мы и получим теорему Грина, выражаемую формулой

$$\int\int\int_V (U\Delta V - V\Delta U)\,dx\,dy\,dz = \int\int_S \left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma.$$

§ 4. Формула Стокса.

Соотношение между интегралом функции определённого вида, распространённым на поверхность S, ограниченную контуром L, и криволинейным интегралом, взятым по этому контуру, устанавливается формулою Стокса. Если $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ вместе со своими частными производными — непрерывные функции переменных x, y, z, то по формуле Стокса

$$\int\int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy =$$

$$= \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \qquad (12)$$

Чтобы установить это равенство, выделим из интеграла, стоящего в левой части, ту его часть, которая относится к одной функции, например P, и представим его в следующем виде:

$$\int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy\right) = \int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma, \qquad (13)$$

где β и γ — углы наклона нормали поверхности к положительным направлениям осей Oy и Oz, а $d\sigma$ — элемент поверхности. Переменные x, y, z здесь связаны уравнением поверхности S: $z = \varphi(x, y)$. Предположим сначала, что функция $z = \varphi(x, y)$ однозначна, а $\cos\gamma$

не меняет своего знака. Пусть, например, интеграл распространён на верхнюю сторону поверхности и, стало быть, $\cos\gamma > 0$. Контур L, ограничивающий поверхность S, проектируется на плоскость xOy линией C, ограничивающей некоторую область D, которая по условию находится во взаимно однозначном соответствии с поверхностью S. Так как $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ пропорциональны $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ и -1 (стр. 156), то

$$-\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

и, следовательно,

$$\int_S\int \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma = -\int_S\int \left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\, d\sigma.$$

Подставляя в этот интеграл $\varphi(x, y)$ вместо z и $dx\,dy$ вместо $\cos\gamma\, d\sigma$, мы обратим его в обыкновенный двойной интеграл, распространённый на область D. Обозначая сверх того $P(x, y, \varphi(x, y))$ через P_1, будем иметь:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

и

$$-\int_S\int \left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\, d\sigma = -\int_D\int \frac{\partial P_1}{\partial y}\, dx\, dy.$$

По формуле Остроградского на плоскости [§ 1, (2)]

$$-\int_D\int \frac{\partial P_1}{\partial y}\, dx\, dy = \int_C P_1\, dx.$$

Но значения функции $P_1 = P(x, y, \varphi(x, y))$ на кривой C — такие же, как и значения функции $P(x, y, z)$ в соответствующих точках кривой L. Следовательно,

$$\int_C P_1\, dx = \int_L P\, dx$$

и

$$\int_S\int \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dx - \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \int_L P\, dx. \tag{14}$$

Криволинейный интеграл здесь взят в прямом направлении, которое определяется взаимным расположением осей координат: наблюдатель, стоящий на плоскости xOy и обращённый головою в положительную сторону оси Oz, обходит какую-либо область в прямом направлении, если его повороты согласуются с вращением луча около начала координат от положительного направления оси Ox к положительному направлению оси Oy.

При расположении осей как на черт. 61, обходимая область будет постоянно справа от зрителя. При обходе контура L на поверхности наблюдатель располагается на той стороне её, на которую распространён двойной интеграл, и в соответствующем направлении нормали.

Если функция $z = \varphi(x, y)$ — не однозначная и $\cos\gamma$ при перемещении точки по поверхности может менять свой знак, то соответствующими разрезами разобьём поверхность S на части $S_1, S_2, \ldots$, к каждой из которых применимо равенство (14), следовательно, это равенство будет иметь силу и для всей поверхности S, ибо при сложении каждый из разрезов проходится два раза в противоположных направлениях.

Совершенно аналогично устанавливаются равенства

$$\left.\begin{aligned} \int_S\int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz &= \int_L Q\,dy, \\ \int_S\int \frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}\,dz\,dx &= \int_L R\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Сложив почленно равенства (14) и (15), мы получим формулу Стокса (12), которую можно представить также в следующем виде:

$$\int_S\int \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{12'}$$

Из формулы Стокса можно вывести необходимые и достаточные условия того, чтобы криволинейный интеграл, взятый по дуге какой-либо пространственной кривой, зависел не от формы этой кривой, а только от начальной и конечной точек её. Действительно, из такого свойства следует, что криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру в соответствующей области должен равняться нулю. Но в таком случае при любой поверхности, проходящей через такой контур, двукратный интеграл формулы Стокса должен равняться нулю, а следовательно,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma = 0;$$

а так как α, β, γ при произвольной форме поверхности S произвольны, то из предыдущего равенства вытекают искомые необходимые условия:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Достаточность их непосредственно следует из равенства (12′). При этих условиях дифференциальное выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ будет полным дифференциалом некоторой функции U, которую можно определить как криволинейный интеграл

$$U(x, y, z)=\int_{a, b, c}^{x, y, z} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

§ 5. Понятие о векторном анализе.

Чтобы дать представление о том, какое значение могут иметь приведённые в этой главе формулы Остроградского и Стокса, заметим, что тремя непрерывными функциями $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ определяется, как компонентами, т. е. слагающими по осям координат, вектор, выходящий из точки (x, y, z). Обозначая через V длину этого вектора, называемую модулем, а через λ, μ, ν — углы его наклона к положительным направлениям осей координат, будем иметь:

$$V=\sqrt{P^2+Q^2+R^2},$$

$$\cos\lambda=\frac{P}{V},\quad \cos\mu=\frac{Q}{V},\quad \cos\nu=\frac{R}{V}.$$

Область, где эти функции непрерывны, называют *векторным полем*. Вектор V может иметь различное физическое значение. Такими векторами будут, например, силы, действующие по какому-либо закону на точки какого-либо тела, скорости движущейся жидкости и т. п. Смотря по тому значению, какое придаётся вектору, остальные выражения, встречающиеся в формулах Остроградского и Стокса, имеют соответствующее физическое значение, а эти формулы выражают ту или иную физическую теорему. Так, если P, Q, R — компоненты скорости движения частицы какой-либо массы жидкости, то, во-первых, выражение

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

называемое *дивергенцией* вектора V, представляет кубическое расширение частицы жидкости в точке (x, y, z), отнесённое к единице объёма и времени, и для несжимаемой жидкости должно равняться нулю, во-вторых, выражения

$$C_x=\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\quad C_y=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\quad C_z=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

суть компоненты нового вектора C, называемого *ротором* или *вихрем* вектора V, а формулы Остроградского и Стокса выражают соответствующие теоремы гидродинамики. Дивергенция вектора C, как

нетрудно проверить непосредственным вычислением, обращается в нуль:

$$\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}=0.$$

При невихревом движении $C_x=0$, $C_y=0$ и $C_z=0$ и выражение $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ представляет полный дифференциал, т. е. P, Q, R суть частные производные некоторой функции U:

$$P=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Q=\frac{\partial U}{\partial y},\quad R=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Дивергенция такого векторного поля равна второму дифференциальному параметру функций U, т. е. ΔU. Такое поле называют *потенциальным*, $U=\text{const}$ — уравнение эквипотенциальных поверхностей.

Уже приведённая терминология показывает, какое значение имеют формулы Остроградского и Стокса для векторного анализа, а через него для рассмотрения задач математической физики.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int\int x^2\,dy\,dz+y^2\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy,$$

распространённый на внешнюю поверхность шара $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Указание. Перенести начало координат в центр шара и преобразовать потом декартовы координаты в полярные.

Отв. $\frac{8}{3}(a+b+c)\pi r^3$.

2. Применить для вычисления поверхностного интеграла предыдущей задачи формулу Остроградского.

3. Преобразовать по формуле Стокса криволинейный интеграл $\int y\,dx+z\,dy+x\,dz$, взятый по замкнутому контуру L, в поверхностный.

Взяв за кривую L окружность $x=R\cos^2 t$, $y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin 2t$, $z=R\sin^2 t$, вычислить и криволинейный интеграл и поверхностный, распространённый на соответствующую сторону круга, ограниченного данной окружностью.

Отв. $-\frac{\pi R^2}{\sqrt{2}}$.

ГЛАВА IX.

ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ РЯДОВ.

§ 1. Определение рядов. Их сходимость и расходимость.

При установлении теории пределов (т. I, Дифф. и интегр. исч., ч. 1, гл. II) мы рассматривали переменную величину a_n, меняющуюся по какому-либо закону с изменением указателя n и таким образом принимающую безграничный ряд последовательных значений $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Один из простейших типов такого бесконечного процесса состоит в том, что каждое новое число последовательности получается из предыдущего путём прибавления к нему некоторого числа, меняющегося по некоторому закону при продолжении этой операции. Если $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ — бесконечная последовательность чисел этого рода, а $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — образующие их слагаемые, то

$$s_1 = u_0,\ s_2 = s_1 + u_1,\ s_3 = s_2 + u_2,\ \ldots,\ s_n = s_{n-1} + u_{n-1}.$$

Отсюда следует, что

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}. \tag{1}$$

При безграничном увеличении n из суммы s_n получается соединение бесконечного множества чисел, как слагаемых; это соединение и называют *рядом*, а самые слагаемые $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — *членами* его.

Сходимость и расходимость ряда. Сумму n первых членов ряда s_n называют n-й частичной суммой этого ряда. Если она при безграничном увеличении n стремится к определённому конечному пределу, то ряд называют *сходящимся*, а предел, к которому стремится s_n, *суммою* ряда. Обозначая эту сумму через s, будем иметь по определению

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n, \tag{2}$$

или, как иногда пишут,

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots \tag{2'}$$

Если s_n не стремится к определённому конечному пределу, то ряд называют *расходящимся*. В этом случае s_n или стремится к положительной или отрицательной бесконечности, или не стремится ни

к какому определённому пределу. Таким образом расходящийся ряд может быть собственно расходящимся, когда $\lim s_n = \infty$, или неопределённым.

Различают ряды *знакопостоянные и знакопеременные.* У знакопостоянного ряда все члены имеют один и тот же знак. Знакопеременный имеет члены и положительные и отрицательные; если при этом положительные и отрицательные члены чередуются, то и ряд будем называть *знакочередующимся.* Относительно знакопостоянных рядов можно утверждать, что всякий такой ряд — или сходящийся, или собственно расходящийся, т. е. $\lim s_n = \pm\infty$; случая неопределённости для знакопостоянного ряда быть не может, ибо его частичная сумма монотонно изменяется с увеличением n. В случае знакопеременных рядов могут осуществляться все эти возможности: сходимость и расходимость двух видов, т. е. s_n может стремиться к определённому конечному пределу, может стремиться к положительной или отрицательной бесконечности или не стремиться ни к какому определённому пределу.

Геометрическая прогрессия. Примером ряда, который может быть при известных условиях и сходящимся, и расходящимся в том или другом смысле, может служить геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n + \ldots \qquad (a \neq 0). \qquad (3)$$

По известной формуле элементарной алгебры для суммы n первых членов этого ряда при $q \neq 1$ имеем

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Если $|q| < 1$, ряд будет сходящийся. Действительно, q^n стремится к нулю, а s_n — к определённому конечному пределу, который и составляет, по определению, сумму геометрической прогрессии:

$$\lim s_n = s = \frac{a}{1 - q}.$$

Если $|q| \geqslant 1$, то ряд (3) расходящийся, ибо сумма s_n не стремится к конечному пределу: при q положительном s_n стремится к положительной или отрицательной бесконечности, смотря по знаку a; при q отрицательном и меньшем, чем -1, s_n, бесконечно возрастая по абсолютной величине, постоянно меняет свой знак, а если $q = -1$, то s_n попеременно принимает значения a и 0; таким образом, в обоих последних случаях s_n не стремится ни к какому пределу.

Остаток ряда. Если отделить от сходящегося бесконечного ряда

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \ldots \qquad (4)$$

n первых его членов, т. е. s_n, то совокупность остальных членов также образует сходящийся ряд. Действительно, обозначая через σ_p

сумму p первых членов оставшегося ряда

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1} + u_{n+p} + \ldots, \tag{5}$$

т. е. полагая

$$\sigma_p = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1},$$

имеем:

$$\sigma_p = s_{n+p} - s_n$$

и, значит, фиксируя n и неограниченно увеличивая p, получаем:

$$\lim_{p \to \infty} \sigma_p = \lim_{p \to \infty} s_{n+p} - \lim_{p \to \infty} s_n = s - s_n,$$

где s — сумма первоначального ряда. Таким образом, ряд (5) действительно сходится и сумма его

$$r_n = s - s_n. \tag{6}$$

r_n называют n-м *остатком* ряда (4).

§ 2. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда.

Остаток сходящегося ряда как разность переменной величины s_n и её предела s — суммы ряда есть величина бесконечно малая: $\lim r_n = \lim (s - s_n) = 0$. Бесконечно малой будет и любая часть этого остатка $u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}$, которую мы выше представили как разность двух соответствующих сумм s_{n+p} и s_n:

$$s_{n+p} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-1}. \tag{7}$$

Таким образом, если ряд $\sum u_n$ сходящийся, то разность $s_{n+p} - s_n$ повышением указателя n может быть сделана по абсолютной величине менее любого наперёд заданного положительного числа ε одновременно для всех целых положительных значений p:

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon. \tag{8}$$

Это неравенство, если оно при любом наперёд заданном положительном и сколь угодно малом числе ε имеет место, начиная с достаточно высокого значения указателя n, одновременно для всех целых $p > 0$, является не только необходимым, но и достаточным условием существования предела для последовательности чисел s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ... [т. I, стр. 249], а следовательно, необходимым и достаточным условием сходимости ряда $\sum u_n$.

Соответственно различным значениям p неравенство (8) распадается на бесконечное множество подобных неравенств:

$$|s_{n+1} - s_n| < \varepsilon, \ |s_{n+2} - s_n| < \varepsilon, \ldots, |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon, \ldots, \tag{9}$$

каждое из которых выполнимо для сходящегося ряда, но ни одно в отдельности (т. е. при определённом значении p) недостаточно, чтобы обусловить эту сходимость.

Первое из неравенств (9) может быть представлено в виде $|u_n| < \varepsilon$, ибо $s_{n+1} - s_n = u_n$, и выражает следующее предложение: *общий член сходящегося ряда должен стремиться к нулю.* Но не всякий ряд, для которого $\lim u_n = 0$, будет сходящимся.

Гармонический ряд. Недостаточность для сходимости последнего условия можно подтвердить примером так называемого *гармонического ряда*

$$\sum u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Общий член его бесконечно уменьшается и стремится к нулю как своему пределу: $u_n = \frac{1}{n}$ и $\lim u_n = 0$. И тем не менее этот ряд расходящийся. Действительно,

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому разность $s_{2n} - s_n$ при бесконечном увеличении n не может быть величиной бесконечно малой, какой она должна была бы быть, если бы s_n (а значит, и s_{2n}) стремилось к конечному пределу. Следовательно, гармонический ряд есть ряд расходящийся.

§ 3. Ряды с положительными членами. Признаки их сходимости, вытекающие из сравнения рядов.

Ряды с положительными членами, как было отмечено выше (§ 1), могут быть сходящимися или собственно расходящимися, т. е. такими, для которых $\lim s_n = \infty$, случая же неопределённости для них быть не может.

Одна из существенных задач теории рядов состоит в том, чтобы установить признаки, по которым можно было бы узнать, будет ли ряд сходящимся или расходящимся. Мы уже установили (§ 2) необходимое и достаточное условие сходимости ряда: $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, но это общее условие, имеющее основное теоретическое значение, не всегда может служить практическим признаком, ибо соответственно различным значениям p оно, как сложное, распадается, в сущности, на бесчисленное множество простых условий $|s_{n+1} - s_n| < \varepsilon$, $|s_{n+2} - s_n| < \varepsilon$ и т. д., каждое из которых необходимо, но в отдельности ещё недостаточно, чтобы обусловить сходимость. Естественно поэтому заняться изысканием более простых признаков, хотя бы и не имеющих исчерпывающей общности.

Признаки, вытекающие из сравнения двух рядов. 1. *Если из двух рядов с положительными членами* $\sum u_n$, $\sum v_n$ *второй сходящийся, а члены первого, начиная с некоторого места, постоянно меньше соответственных членов второго, то и первый ряд сходящийся.*

Действительно, пусть, начиная с указателя m, имеем неравенства

$$u_m < v_m, \quad u_{m+1} < v_{m+1}, \ldots$$

Обозначая через s_n n-ю частичную сумму первого ряда $\sum u_n$, а через s_n' — соответствующую сумму второго $\sum v_n$, причём по условию s_n' стремится к конечному пределу s', и полагая n больше m, будем иметь:

$$s_n - s_m = u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{n-1},$$
$$s_n' - s_m' = v_m + v_{m+1} + \ldots + v_{n-1}.$$

Согласно условию, первая из этих сумм меньше второй при всяком значении n, большем, чем m, вторая же, в свою очередь, как сумма постоянно возрастающая, меньше своего предела $s' - s_m'$. Следовательно,

$$s_n - s_m < s' - s_m', \text{ или } s_n < s' - s_m' + s_m.$$

Таким образом постоянно возрастающая сумма s_n остаётся всегда меньше конечной величины $s' - s_m' + s_m$ и стремится потому к определённому конечному пределу, т. е. ряд $\sum u_n$ сходящийся.

2. *Если из двух рядов с положительными членами $\sum u_n$, $\sum v_n$ второй расходящийся, а члены первого, начиная с некоторого места, постоянно больше соответственных членов второго, то и первый ряд расходящийся.*

Действительно, если бы первый ряд был сходящимся, то в силу предыдущего предложения и второй ряд должен был бы быть сходящимся, что, однако, противоречит предположению.

3. *Если положительные числа a_n при всех n меньше положительного числа A и ряд $\sum u_n$ с положительными членами сходящийся, то и ряд $\sum a_n u_n$ сходящийся.*

Действительно, ряд $\sum Au_n$, очевидно, сходящийся. Но согласно условию $a_n u_n < Au_n$. Следовательно, по признаку 1 и ряд $\sum a_n u_n$ сходящийся.

4. *Если $a_n > A > 0$ при всяком n и ряд $\sum u_n$ с положительными членами расходящийся, то и ряд $\sum a_n u_n$ расходящийся.*

В самом деле, ряд $\sum Au_n$, очевидно, расходящийся; но, по условию, $a_n u_n > Au_n$; следовательно, и ряд $\sum a_n u_n$ по признаку 2 расходящийся.

Примеры. 1. Ряд $\sum 2^{-n}$, как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{2} < 1$, сходящийся. Следовательно, и ряд $\sum (2^n + 1)^{-1}$ или

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots = \sum \frac{1}{2^n + 1}$$

сходящийся, ибо

$$\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}.$$

2. Гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

расходящийся. Следовательно, и ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

расходящийся, ибо

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n} \text{ при } n>1.$$

3. Ряд $\sum x^n$ при x положительном, но меньшем единицы, как геометрическая прогрессия со знаменателем x сходящийся. Следовательно, и ряд

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

при $0<x<1$ сходящийся, ибо, начиная со второго члена, множитель $a_n=\frac{1}{n}<1$.

4. Ряд $\sum x^n$ при $x>1$ расходящийся. Следовательно, и ряд

$$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

при $x>1$ расходящийся, ибо, начиная со второго члена, множитель $a_n=n>1$.

§ 4. Признаки сходимости, вытекающие из свойств общего члена ряда или группы таких членов.

Суждение о сходимости или расходимости какого-либо наперёд данного ряда не всегда удобно можно обосновать на сравнении его с другими, ибо ряд, с которым сравнивается данный, должен быть ещё соответственно подобран. Необходимо поэтому установить такого рода признаки, которые позволяли бы судить о сходимости или расходимости ряда по свойствам его общего члена.

Из таких признаков мы рассмотрим два — признак Даламбера и признак Коши. В признак Коши — признак первого рода — входит один общий член u_n исследуемого ряда, а в признак Даламбера — признак второго рода — два: u_n и u_{n+1}.

Признак Даламбера. *Ряд с положительными членами — сходящийся, если отношение любого члена его к предыдущему остаётся, начиная с некоторого значения n, меньше фиксированного числа k, заключённого между нулём и единицей, и расходящийся, если указанное отношение становится, наконец, бо́льшим или равным единице.*

Доказательство. 1. Если при всех $n \geqslant m$, где m — некоторое определённое целое число, имеет место неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k, \quad \text{где} \quad 0 < k < 1,$$

то, полагая n равным m, $m+1$, ..., будем иметь:

$$u_{m+1} < u_m k, \; u_{m+2} < u_{m+1} k < u_m k^2, \; \ldots, \; u_{m+p} < u_m k^p, \; \ldots$$

Таким образом ряд $u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n + \ldots$, члены которого, начиная со второго, меньше соответственных членов убывающей геометрической прогрессии, сходящийся. Следовательно, и данный ряд $\sum u_n$ сходящийся.

2. Если при всех значениях n, начиная с $n = m$, имеет место неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k, \quad \text{где} \quad k \geqslant 1,$$

то это означает, что члены ряда, начиная с $n = m$, возрастают или сохраняют свою величину: $u_{n+1} \geqslant k u_n \geqslant u_n$ и, следовательно, мы имеем ряд расходящийся, ибо u_n не стремится к нулю.

Следствие. *Если отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при n бесконечно увеличивающемся стремится к определённому пределу α, то соответственно тому, будет ли этот предел меньше или больше единицы, и ряд $\sum u_n$ будет сходящимся или расходящимся.*

Действительно, пусть

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha < 1.$$

Взяв какое-нибудь число k между α и 1 ($\alpha < k < 1$), можно подобрать целое число m так, что при всех $n \geqslant m$ будет иметь место неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k,$$

и, следовательно, ряд $\sum u_n$ сходящийся.

Если $\alpha > 1$, то при $n \geqslant m$ будем иметь

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

и, следовательно, ряд $\sum u_n$ расходящийся.

Если $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, то определённого заключения о сходимости или расходимости ряда сделать ещё нельзя.

Признак Коши. *Ряд с положительными членами — сходящийся, если $\sqrt[n]{u_n}$, начиная с некоторого значения n, меньше фиксирован-*

ного числа k, заключённого между нулём и единицей, и расходящийся, если $\sqrt[n]{u_n}$ становится, наконец, и остаётся далее бо́льшим или равным единице.

Доказательство. 1. Если, начиная с некоторого значения указателя, $\sqrt[n]{u_n}$ меньше k, иначе u_n меньше k^n, где $0<k<1$, то это означает, что с этого места члены данного ряда меньше соответственных членов убывающей геометрической прогрессии $\sum k^n$. Следовательно, ряд $\sum u_n$ сходящийся.

2. Если, наоборот, $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1$, иначе $u_n\geqslant 1$, то $\lim u_n\neq 0$ и, значит, мы имеем ряд расходящийся.

Следствие. *Если $\sqrt[n]{u_n}$ при n бесконечно увеличивающемся стремится к определённому пределу β, то соответственно тому, будет ли этот предел меньше или больше единицы, и ряд $\sum u_n$ будет сходящимся или расходящимся.*

Действительно, если $\lim\sqrt[n]{u_n}=\beta<1$, то для любого числа k, заключенного между β и 1 ($\beta<k<1$), можно подобрать такое целое число m, что при $n\geqslant m$ будем иметь неравенство

$$\sqrt[n]{u_n}<k,$$

а если $\lim\sqrt[n]{u_n}=\beta>1$, то при $n\geqslant m$ будем иметь

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1.$$

Таким образом вопрос сводится к условиям теоремы.

Если $\lim\sqrt[n]{u_n}=1$, то определённого заключения о сходимости или расходимости ряда сделать ещё нельзя.

Примеры. 1. Ряд

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}+\ldots$$

сходящийся, ибо

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\left[\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right]=\lim\frac{1}{n+1}=0.$$

Раньше [т. I, стр. 371] мы видели, что $\lim s_n=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

2. Ряд

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

сходящийся, если $0<x<1$, и расходящийся, если $x>1$. Действительно,

$$\lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}:\frac{x^n}{n}\right)=\lim\frac{x\cdot n}{n+1}=x,$$

3. Ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{3^n+1}+\ldots$$

сходящийся, ибо

$$\sqrt[n]{u_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{3^n+1}}<\frac{1}{3} \text{ при } n\geqslant 1.$$

К такому же заключению приводит и признак Даламбера.

4. Определённого заключения о сходимости или расходимости рядов

$$\alpha)\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

и

$$\beta)\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

по признакам Даламбера и Коши сделать нельзя, ибо

$$\alpha)\ \lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\left(\frac{1}{n+1}:\frac{1}{n}\right)=\lim\frac{n}{n+1}=1$$

и

$$\beta)\ \lim\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}:\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\frac{n}{n+2}=1,$$

а признак Коши приводит к определению пределов $\sqrt[n]{n}$ и $\sqrt[n]{n(n+1)}$, которые, как увидим ниже, также равны каждый единице. Первый ряд гармонический, и мы уже знаем, что он расходящийся; второй же ряд — сходящийся, так как

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n},$$

$$s_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}\right)=\frac{n}{n+1}$$

и, следовательно, $\lim s_n=1$.

Теорема. *Если u_n — общий член бесконечного ряда с положительными членами и отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится при бесконечно увеличивающемся n к определённому пределу (в частности, и к бесконечности с положительным знаком), то к этому же пределу стремится и $\sqrt[n]{u_n}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ стремится к конечному пределу a, отличному от нуля. Тогда, как бы мало ни было число $\varepsilon>0$ (которое мы можем считать меньшим $2a$), существует такое конечное значение m указателя, начиная с которого отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ попадает внутрь интервала $\left(a-\frac{\varepsilon}{2},\ a+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Давая указателю значения m, $m+1$, $m+2$, ..., $n-1$, мы получим таким

образом ряд неравенств

$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_{m+1}}{u_m}<a+\frac{\varepsilon}{2},\quad a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2},\ \ldots,$$
$$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{u_n}{u_{n-1}}<a+\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда после почленного перемножения будем иметь:

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-m}<\frac{u_n}{u_m}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-m}.$$

Отсюда, по извлечении корня n-й степени, получим:

$$\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}<\frac{\sqrt[n]{u_n}}{\sqrt[n]{u_m}}<\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}},$$

или

$$\sqrt[n]{u_m}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}<\sqrt[n]{u_n}<\sqrt[n]{u_m}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}. \tag{10}$$

Но при $n\to\infty$ крайние члены этих неравенств стремятся, соответственно, к $a-\frac{\varepsilon}{2}$ и $a+\frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, существует такое N, что для всех $n>N$ будем иметь:

$$a-\varepsilon<\sqrt[n]{u_m}\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}\quad\text{и}\quad\sqrt[n]{u_m}\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{m}{n}}<a+\varepsilon.$$

Тогда из (10) получим, что для всех $n>N$ выполняются неравенства

$$a-\varepsilon<\sqrt[n]{u_n}<a+\varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ существует и равен a:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}. \tag{11}$$

При $a=0$ проведённое доказательство остаётся в силе, с тем изменением, что всюду вместо $a-\frac{\varepsilon}{2}$ и $a-\varepsilon$ нужно поставить нуль. Точно так же при $a=\infty$ следует всюду в левых неравенствах вместо a подставить $M+\varepsilon$, где M — произвольно большое положительное число, правые же неравенства (содержащие $a+\frac{\varepsilon}{2}$ и $a+\varepsilon$) вовсе не рассматривать.

Обратное утверждение не всегда верно: $\sqrt[n]{u_n}$ может стремиться к определённому конечному пределу и тогда, когда отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не имеет предела. Пусть

$$u_n = a_n x^n, \quad \text{где} \quad a_n = a^{\alpha_n} \quad (a \neq 1) \quad \text{и} \quad \alpha_n = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Для чётных значений указателя $\alpha_n = 1$, для нечётных $\alpha_n = 0$ и потому

$$u_{2n} = ax^{2n}, \quad u_{2n+1} = x^{2n+1}.$$

Определяя $\lim \sqrt[n]{u_n}$, получим:

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{a_n}x \quad \text{и} \quad \lim \sqrt[n]{u_n} = x, \quad \text{ибо} \quad \lim a_n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Таким образом предел $\sqrt[n]{u_n}$ существует. Но предела отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не существует, так как отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ принимает попеременно значения a^{-1} и a:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}x, \quad \text{т. е.} \quad \frac{u_1}{u_0} = \frac{x}{a}, \quad \frac{u_2}{u_1} = ax, \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{x}{a}, \ \ldots$$

Предыдущая теорема имеет то значение, что позволяет свести разыскание предела выражения вида $\sqrt[n]{u_n}$ к определению предела отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, если этот последний существует. Та же теорема в применении к рядам показывает, что там, где признак Даламбера даёт решение вопроса о сходимости ряда, признак Коши тоже даёт его, причём, как видно из приведённого выше примера, в некоторых случаях признак Коши может дать ответ на вопрос о сходимости ряда и тогда, когда признак Даламбера неприменим. Тем не менее признак Даламбера, хотя он и имеет меньшую сферу применения, по своей простоте во многих случаях более удобен.

Пример 1. Определить пределы, к которым стремятся выражения α) $\sqrt[n]{n}$ и β) $\sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$ при бесконечно увеличивающемся n:

$$\alpha) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

$$\beta) \lim \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = \lim \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = \lim (n+1) = \infty.$$

Пример 2. Установить сходимость или расходимость ряда

$$a + x + ax^2 + x^3 + \ldots + a^{\alpha_n}x^n + \ldots, \quad \text{где} \quad \alpha_n = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

Признак Даламбера не решает поставленного вопроса, ибо, как мы видели выше, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не стремится к определённому пределу. Обращаясь к признаку Коши, будем иметь:

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = x.$$

Следовательно, рассматриваемый ряд при $0 < x < 1$ сходящийся, а при $x > 1$ расходящийся. При $x = 1$ и $a > 0$ ряд будет также расходящийся, ибо s_n, как нетрудно видеть, бесконечно возрастает. Следует отметить, что этот ряд составлен из двух геометрических прогрессий: $\sum ax^{2n}$ и $\sum x^{2n+1}$.

§ 5. Иные признаки сходимости ряда.

В тех случаях, когда предыдущие признаки не приводят к решению вопроса о сходимости ряда, приходится изыскивать другие, могущие дать это решение. Но наперёд следует отметить, что общего практического признака, всегда приводящего к цели, и не может быть, если только не иметь в виду теоретического необходимого и достаточного условия сходимости ряда [§ 2].

1. Один из признаков, могущих иногда дать ответ, когда ни признак Даламбера, ни признак Коши не приводят к цели, вытекает из следующей теоремы Коши.

Теорема Коши. *Если $f(x)$ — непрерывная положительная убывающая функция, определённая для всех $x \geqslant 0$, и $F(x)$ — её первообразная, то ряд $\sum f(n)$, где n принимает значения 0, 1, 2, ..., будет сходящимся или расходящимся, смотря по тому, стремится ли функция $F(x)$ при x бесконечно увеличивающемся к конечному или бесконечному пределу.*

Доказательство. По теореме о конечных приращениях имеем

$$F(n+1) - F(n) = F'(n+\theta), \quad \text{или} \quad F(n+1) - F(n) = f(n+\theta),$$

где $0 < \theta < 1$. Но по условию $f(x)$ — функция убывающая, так что

$$f(n) > f(n+\theta) > f(n+1).$$

Следовательно,

$$f(n) > F(n+1) - F(n) > f(n+1).$$

Ряд, общий член которого равен $F(n+1) - F(n)$, будет сходящимся или расходящимся, смотря по тому, стремится ли $F(n)$ к конечному или бесконечному пределу. Действительно, определяя частичную сумму s_n этого ряда, получим:

$$s_n = [F(1) - F(0)] + [F(2) - F(1)] + \ldots + [F(n) - F(n-1)] = F(n) - F(0),$$

откуда

$$\lim s_n = \lim F(n) - F(0),$$

Если $\lim F(n)$ — конечная величина, то ряд $\sum f(n)$ сходящийся, ибо члены его соответственно меньше членов сходящегося ряда $\sum [F(n) - F(n-1)]$. Если же $\lim F(n) = \infty$, то ряд $\sum f(n)$ расходящийся, ибо члены его соответственно больше членов расходящегося ряда $\sum [F(n+1) - F(n)]$.

Теорему Коши можно формулировать и так: *ряд* $\sum f(n)$ *будет сходящимся или расходящимся, смотря по тому, будет ли интеграл* $\int_0^\infty f(x)\,dx$ *сходящимся или расходящимся, т. е. будет ли он иметь конечную или бесконечную величину.*

Пример 1. Установить сходимость или расходимость ряда

$$\sum \frac{1}{(1+n)^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{(1+n)^p} + \ldots$$

Общий член ряда $(1+n)^{-p}$ можно рассматривать как значение непрерывной убывающей функции $(1+x)^{-p}$ при целом значении аргумента. Полагая $f(x) = (1+x)^{-p}$, находим интеграл этой функции:

$$\text{при } p \neq 1 \quad F(x) = \int_0^x \frac{dx}{(1+x)^p} = \frac{(1+x)^{-p+1} - 1}{-p+1};$$

$$\text{при } p = 1 \quad F(x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x).$$

Если $p > 1$, то при бесконечно увеличивающемся x $\lim F(x) = (p-1)^{-1}$ и, следовательно, рассматриваемый ряд сходящийся. Если $p \leqslant 1$, то $\lim F(x) = \infty$ и ряд расходящийся.

Пример 2. Ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots$$

сходящийся, ибо

$$F(x) = \int_0^x \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \ln\frac{2(1+x)}{2+x} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = \ln 2 < \infty.$$

2. Бесконечные ряды вида

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots,$$

где $p > 0$, наряду с геометрическими прогрессиями различных знаменателей, могут служить для сравнения с ними других рядов. Опре-

деление порядка малости общего члена изучаемого ряда $\sum u_n$ относительно общего члена n^{-1} гармонического ряда решает вопрос о сходимости или расходимости ряда.

Действительно, пусть u_n — бесконечно малая относительно n^{-1} порядка p. Это означает по определению, что

$$\lim n^p u_n = q, \quad \text{где} \quad 0 < q < \infty.$$

Пусть a и b — два положительных числа, между которыми заключено q. При достаточно высоком указателе будем иметь

$$a < n^p u_n < b, \quad \text{или} \quad \frac{a}{n^p} < u_n < \frac{b}{n^p}.$$

Если $p > 1$, то с некоторого места члены данного ряда оказываются меньше соответственных членов сходящегося ряда

$$\frac{b}{1} + \frac{b}{2^p} + \frac{b}{3^p} + \ldots + \frac{b}{n^p} + \ldots = b \sum \frac{1}{n^p}$$

(см. выше пример 1) и, следовательно, данный ряд сходящийся.

Если $p \leqslant 1$, то члены данного ряда с некоторого места будут больше соответственных членов расходящегося ряда $a \sum n^{-p}$. Следовательно, и рассматриваемый ряд расходящийся.

Если $n^p u_n$ не стремится к определённому пределу, но при достаточно высоком указателе колеблется между конечными положительными границами, заключение было бы то же самое. Таким образом, если для всех больших значений n $n^p u_n < b < \infty$ и $p > 1$, то рассматриваемый ряд сходящийся, а если $nu_n > a > 0$, — расходящийся.

В случае существования предела признаком сходимости является равенство $\lim n^p u_n = 0$ для некоторого $p > 1$, ибо это означает, что u_n — бесконечно малая величина более высокого порядка, чем общий член сходящегося ряда $\sum n^{-p}$. Признаком расходимости является неравенство $\lim nu_n > 0$, ибо это означает, что u_n — того же или более низкого порядка (если $\lim nu_n = \infty$), чем общий член гармонического ряда.

§ 6. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Знакопеременные ряды во многих своих свойствах отличаются, вообще говоря, от знакопостоянных. Уже выше было отмечено [§ 1], что расходимость знакопеременного ряда может быть двух видов: либо s_n стремится к положительной или отрицательной бесконечности, либо не стремится ни к какому определённому пределу, между тем как для расходящегося знакопостоянного ряда возможность только одна: $\lim s_n = \infty$. Ряд следующих теорем отмечает различие свойств этих рядов и в случае их сходимости.

Теорема 1. *Знакочередующийся ряд*

$$u_0 - u_1 + u_2 - \ldots + (-1)^n u_n + \ldots,$$

члены которого постоянно убывают по абсолютной величине, а общий член с повышением указателя стремится к нулю, — сходящийся.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что все u_n положительны. Тогда по условию $u_n > u_{n+1}$ при всяком значении указателя n. Следовательно, при всяком (чётном или нечётном) числе членов частичные суммы рассматриваемого ряда

$$s_{2n} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}),$$
$$s_{2n+1} = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_{2n-2} - u_{2n-1}) + u_{2n},$$

как составленные из положительных частей, суть положительные величины. Первая из этих сумм, всегда меньшая второй, возрастает, а вторая, которую можно представить также в виде

$$s_{2n+1} = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \ldots - (u_{2n-1} - u_{2n}),$$

убывает. Кроме того, суммы эти отличаются одна от другой на бесконечно малую величину, ибо

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n},$$

а по условию $\lim u_{2n} = 0$. Следовательно, обе эти суммы стремятся к одному определённому конечному пределу [т. I, стр. 248], т. е. рассматриваемый ряд сходящийся, что и требовалось доказать.

Таким образом необходимое условие сходимости ряда, выражаемое равенством $\lim u_n = 0$, недостаточное в общем случае (стр. 303), оказывается достаточным для знакочередующегося ряда.

Пример. Гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

как мы видели, — расходящийся, а знакочередующийся ряд, составленный из тех же членов,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} + \ldots$$

— по предыдущей теореме, сходящийся. Ниже будет показано, чему равна его сумма (гл. X, § 5).

Теорема 2. *Знакопеременный ряд* $\sum u_n$ *будет сходящимся, если ряд* $\sum |u_n|$, *составленный из абсолютных величин тех же членов, сходящийся.*

Доказательство. Пусть s_n и σ_n — n-ые частичные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum |u_n|$. По условию s_n содержит и положительные

и отрицательные слагаемые. Обозначая сумму первых через s'_n, а абсолютную величину суммы вторых через s''_n, будем иметь

$$s_n = s'_n - s''_n \quad \text{и} \quad \sigma_n = s'_n + s''_n.$$

Суммы σ_n, s'_n и s''_n состоят из положительных слагаемых, и так как σ_n стремится к определённому конечному пределу, то к определённым конечным пределам стремятся и обе части её, т. е. s'_n и s''_n, а следовательно, и s_n стремится к определённому конечному пределу, т. е. ряд $\sum u_n$ сходящийся, что и требовалось доказать.

Обратное заключение не всегда было бы правильно: из сходимости ряда $\sum u_n$ не следует с необходимостью сходимость ряда $\sum |u_n|$, ибо разность $s'_n - s''_n$ может стремиться к определённому конечному пределу при бесконечно увеличивающихся уменьшаемом и вычитаемом.

Примером может служить рассмотренный выше знакочередующийся ряд, составленный из членов гармонического.

Абсолютная и условная сходимость. Из предыдущего следует, что сходимость знакопеременного ряда может быть двоякого рода. Сходящийся ряд называют *абсолютно сходящимся*, если абсолютные величины его членов образуют сходящийся ряд, и *условно* (не абсолютно) *сходящимся*, если абсолютные величины его членов составляют ряд расходящийся. Как следует из этих определений, знакопостоянный сходящийся ряд в то же время и абсолютно сходящийся, но знакопеременный ряд может быть либо абсолютно сходящимся, либо условно сходящимся. Так, всякая геометрическая прогрессия с положительным или отрицательным знаменателем, по абсолютной величине меньшим, чем единица, представляет ряд абсолютно сходящийся, а знакочередующийся ряд, составленный из членов гармонического, — условно сходящийся.

Теорема 3. *Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка его членов.*

Доказательство. Пусть $\sum u_n$ и $\sum v_n$ — ряды, отличающиеся один от другого только порядком следования своих членов, а s_n и s'_n — их частичные суммы. Число слагаемых второй суммы можно взять настолько большим, чтобы при данном n в неё входили все члены суммы s_n. Таким образом, будем иметь:

$$s'_m = s_n + u_{n+a} + u_{n+b} + \ldots + u_{n+p},$$

где u_{n+p} — член суммы s_m с наивысшим указателем, так что a, b, ... — какие-то указатели, меньшие, чем p (не обязательно все). Поэтому

$$|s'_m - s_n| = |u_{n+a} + u_{n+b} + \ldots + u_{n+p}| \leqslant$$
$$\leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|.$$

Если ряд $\sum u_n$ абсолютно сходящийся, то остаток ряда $\sum |u_n|$, а тем более часть этого остатка, при бесконечно увеличивающемся n может быть сделан сколь угодно малым; вместе с тем сколь угодно малой можно сделать и разность $s'_m - s_n$. Но в силу теоремы 2 ряд $\sum u_n$ сходится: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Теперь ясно, что ряд $\sum v_n$ также сходится, и притом к той же сумме. Действительно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, мы можем выбрать n столь большим, чтобы выполнялось неравенство

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и одновременно для всех достаточно больших m — также неравенство

$$|s'_m - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда для всех достаточно больших m будем иметь:

$$|s'_m - s| = |(s'_m - s_n) + (s_n - s)| \leqslant |s'_m - s_n| + |s_n - s| < \varepsilon,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} s'_m = s$. Тем самым теорема 3 доказана.

Теорема Римана. *Сумма условно сходящегося ряда зависит от порядка следования его членов и при соответствующем расположении их ряд может сходиться к любой назначенной величине, равно как и расходиться.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — положительные, а $-b_1, -b_2, \ldots, -b_n, \ldots$ — отрицательные члены условно сходящегося ряда $\sum u_n$, расположенные в порядке занимаемых ими в этом ряде мест. Вследствие условной сходимости ряда $\sum u_n$ суммы $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ и $b_1 + b_2 + \ldots + b_l$ растут безгранично.

Действительно, если бы обе эти суммы стремились к конечным пределам, то ряд $\sum |u_n|$ был бы сходящимся, в противоречие с предположением об условной сходимости ряда $\sum u_n$; а если бы одна из этих сумм стремилась к конечному пределу, а другая — к бесконечности, то частичные суммы ряда $\sum u_n$ стремились бы к бесконечности (того же знака), в противоречие с предположением о сходимости этого ряда. Составим теперь из членов данного ряда новый ряд так: сначала возьмём положительные члены $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ в установленном порядке, пока сумма не превзойдёт данного наперёд числа C, потом будем приписывать отрицательные члены, пока сумма $a_1 + a_2 + \ldots + a_k - b_1 - b_2 - \ldots - b_l$ не станет меньше числа C, и будем продолжать эту операцию безгранично, прибавляя с указанным расчётом то положительные, то отрицательные члены из данного запаса тех и других.

Частичная сумма s'_m так составленного ряда отличается от числа C с увеличением m, сколь угодно мало; действительно, если $s'_m > C$, то $s'_m - C < a_n$, где a_n — последний положительный член суммы s'_m, а если $s'_m < C$, то $C - s'_m < b_n$, где b_n — абсолютная величина последнего отрицательного члена суммы s'_m. Но ряд $\sum u_n$ сходящийся и $\lim u_n = 0$; вместе с тем и $\lim a_n = 0$ и $\lim b_n = 0$. Следовательно,

$$\lim s'_m = C,$$

где C, как отмечено выше, — любое данное наперёд число, что и требовалось доказать.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно сделать его и расходящимся. Так, полагая $C' < C$, выполняем указанную выше операцию с таким изменением: если операция заканчивается прибавлением положительных членов a_n, то сумма s'_m должна превышать число C, а если операция заканчивается прибавлением отрицательных членов $-b_n$, то сумма s'_m должна быть меньше C'. При таком порядке членов s'_m не стремится к определённому пределу, и ряд будет расходящимся. Ясно также, что ряд можно сделать расходящимся к положительной или отрицательной бесконечности.

Из последних двух теорем следует, что только абсолютно сходящийся ряд подчиняется законам действий над конечными суммами и только его, а не условно сходящийся ряд можно рассматривать как сумму его членов в смысле, близком к первоначальному значению этого слова.

Теорема Абеля. *Если* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ — *не возрастающая последовательность положительных чисел,* $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ *при всяком* n *не превосходит по абсолютной величине фиксированного числа* A, *а произведение* $s_n a_n$ *стремится к определённому конечному пределу, то ряд* $\sum a_n u_n$ *сходящийся.*

Доказательство. Пусть σ_n обозначает n-ю частичную сумму ряда $\sum a_n u_n$:

$$\sigma_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \ldots + a_n u_n.$$

Принимая во внимание, что $u_1 = s_1$, $u_2 = s_2 - s_1$, $u_3 = s_3 - s_2$, $\ldots$, $u_n = s_n - s_{n-1}$, можно представить предыдущую сумму в следующем виде:

$$\sigma_n = a_1 s_1 + a_2 (s_2 - s_1) + a_3 (s_3 - s_2) + \ldots + a_n (s_n - s_{n-1}),$$

откуда имеем:

$$\sigma_n = s_1 (a_1 - a_2) + s_2 (a_2 - a_3) + \ldots + s_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + s_n a_n.$$

Последний член правой части стремится, по условию, к определённому конечному пределу, а первые $n - 1$ членов образуют частичную сумму ряда $\sum s_{n-1} (a_{n-1} - a_n)$, который абсолютно сходится, ибо

невозрастающая последовательность положительных чисел a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... имеет предел a, положительный или равный нулю, и потому ряд $\sum(a_{n-1}-a_n)$ (члены которого неотрицательны) сходится к сумме a_1-a, числа же s_1, s_2, ..., s_n, ... по абсолютной величине ограничены [§ 3]. Следовательно, сумма σ_n, которую можно представить как сумму двух слагаемых, имеющих предел, стремится к определённому конечному пределу, т. е. ряд $\sum a_n u_n$ сходящийся, что и требовалось доказать.

По теореме Абеля из двух рядов $\sum a_n$ и $\sum u_n$, сходящихся или расходящихся, при некоторых условиях можно составить сходящийся ряд $\sum a_n u_n$. Первый ряд состоит из положительных и невозрастающих членов, и вопрос о его сходимости или расходимости в теореме совершенно не затрагивается. Вопрос же о том, когда второй ряд должен быть сходящимся и когда он может быть расходящимся, вполне решается требованием теоремы, чтобы произведение $s_n a_n$ стремилось к определённому конечному пределу. Если $\lim a_n$ больше нуля, то ряд $\sum u_n$ должен быть сходящимся, ибо сумма s_n должна стремиться к определённому конечному пределу. Если $\lim a_n = 0$, то ряд $\sum u_n$ может быть расходящимся, лишь бы только $s_n a_n$ стремилось к нулю.

В случае сходимости ряда $\sum u_n$, если притом все его члены положительны, теорема Абеля является повторением признака сходимости 3 § 3, вытекающего из сравнения рядов.

Если положить $u_n = (-1)^n$ и $\lim a_n = 0$, то из теоремы Абеля получаем теорему 1 этого параграфа о знакочередующемся ряде, составленном из убывающих членов.

Пример 1. Если a_n с увеличением n не возрастает и $\lim a_n = 0$, то ряд

$$a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos 2\theta + \ldots + a_n \cos n\theta + \ldots$$

при $\theta \neq 2k\pi$ сходящийся.

Чтобы убедиться в этом, можно, полагая $u_n = \cos n\theta$, применить теорему Абеля, если только $s_n = \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta$ при всех значениях n будет меньше некоторого фиксированного числа. Но s_n можно рассматривать как проекцию правильной ломаной линии (т. I, стр. 57—59), каждое звено которой равно принятой единице меры, причём первое наклонено к оси проекций под углом θ, второе — под углом 2θ и т. д. Каково бы ни было n, эта ломаная может быть вписана в круг радиуса $r = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$, проекция её равна проекции стягивающей хорды и не больше этой хорды, а хорда не больше $2r$. Следовательно,

$$|s_n| = |\cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|},$$

т. е. если $\theta \neq 2k\pi$, то s_n — ограниченная величина, и рассматриваемый бесконечный ряд по теореме Абеля есть ряд сходящийся.

Примечание. Ряд $\cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta + \ldots$ расходящийся, ибо $\cos n\theta$ не стремится к нулю.

Пример 2. Если b_n с увеличением n не возрастает и $\lim b_n = 0$, то ряд

$$b_1 \sin\theta + b_2 \sin 2\theta + \ldots + b_n \sin n\theta + \ldots$$

есть ряд сходящийся, ибо $s'_n = \sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta$ есть проекция той же ломаной, что и в предыдущем примере, но на перпендикулярное направление и при $\theta \neq 2k\pi$ представляет ограниченную величину; если же $\theta = 2k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), то все члены ряда обращаются в нуль.

§ 7. Действия с рядами.

1. *Если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то тем самым умножится на то же число и сумма этого ряда.*

Действительно, обозначая через s_n и s'_n частичные суммы, а через s и s' — суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum au_n$, будем иметь

$$s'_n = au_0 + au_1 + au_2 + \ldots + au_{n-1} = as_n$$

и, следовательно,

$$\lim s'_n = a \lim s_n, \quad \text{или} \quad s' = as.$$

2. **Сложение и вычитание рядов.** *Из двух сходящихся рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$ почленным сложением соответственных членов получается ряд $\sum(u_n + v_n)$, сумма которого равна сумме слагаемых рядов.*

Действительно, если s_n, s'_n, s''_n — частичные суммы, а s, s', s'' — суммы рядов $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum(u_n + v_n)$, то на основании свойств конечных сумм будем иметь

$$s''_n = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \ldots + (u_{n-1} + v_{n-1}) = s_n + s'_n,$$

откуда

$$\lim s''_n = \lim s_n + \lim s'_n, \quad \text{или} \quad s'' = s + s'.$$

Точно так же сумма ряда $\sum(u_n - v_n)$ равна разности сумм рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$.

3. **Умножение рядов.** При умножении сумм с конечным числом слагаемых каждое слагаемое одной суммы множится на каждое слагаемое другой. Распространяя такой способ перемножения на бесконечные ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$, получим в результате двойной ряд $\sum u_n v_m$, в котором каждый член, представляя произведение двух членов перемножаемых рядов, содержит два не зависящих друг от

друга указателя. Такой двойной ряд можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} u_0v_0 + u_0v_1 + u_0v_2 + \ldots + u_0v_m + \ldots \\ + u_1v_0 + u_1v_1 + u_1v_2 + \ldots + u_1v_m + \ldots \\ + u_2v_0 + u_2v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_2v_m + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_nv_0 + u_nv_1 + u_nv_2 + \ldots + u_nv_m + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Суммирование идёт здесь в двух направлениях в бесконечность. Но можно тот же ряд представить в виде простого бесконечного ряда и притом разными способами.

Отметим два таких способа. Один из них состоит в том, что в таблице (12) суммируются члены растущего квадрата, начиная с u_0v_0, причём при переходе от каждого квадрата к следующему недостающие члены объединяются в одну группу:

$$u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + u_2v_0) + \ldots$$

Таким образом получаем ряд последовательных сумм, равных соответственно произведениям частичных сумм перемножаемых рядов:

$$s_1s_1', \; s_2s_2', \; s_3s_3', \; \ldots, \; s_ns_n', \; \ldots$$

Второй способ состоит в суммировании членов двойного ряда в направлении восходящих (слева направо) диагоналей:

$$u_0v_0 + u_1v_0 + u_0v_1 + u_2v_0 + u_1v_1 + u_0v_2 + \ldots \\ \ldots + u_nv_0 + \ldots + u_0v_n + \ldots,$$

так что сначала идёт член u_0v_0, затем два члена, сумма указателей которых равна 1, затем три члена, сумма указателей которых равна 2, и т. д.

Вопрос теперь заключается в том, будет ли результирующий ряд сходящимся независимо от способа суммирования и объединения членов двойного ряда в группы и представляет ли он в случае сходимости произведение данных рядов.

Теорема. *Если* $s = \sum u_n$ *и* $s' = \sum v_n$ *— абсолютно сходящиеся ряды, то и ряд* $\sum u_nv_m$ *будет сходящимся, не меняющим при любом порядке суммирования своей суммы, равной произведению сумм перемножаемых рядов, т. е. будет абсолютно сходящимся рядом.*

Доказательство. Какое бы конечное число членов ряда $\sum u_nv_m$ ни было взято, всегда они входят в некоторый квадрат прямоугольной таблицы (12), определяемый наибольшим значением того или

другого из указателей n, m. Пусть σ_n, σ'_n — частичные суммы рядов $\sum|u_n|$, $\sum|v_n|$, а σ''_q — частичная сумма ряда $\sum|u_n v_m|$, причём p — наибольший из указателей входящих в эту сумму членов. В таком случае будем иметь:

$$\sigma''_q \leqslant \sigma_p \sigma'_p.$$

Но при $q \to \infty$ также $p \to \infty$. Так как σ_p и σ'_p по условию стремятся к определённым пределам σ и σ', а σ''_q — монотонно возрастающая сумма, остающаяся таким образом всё время меньше произведения $\sigma\sigma'$, то, следовательно, σ''_q стремится к определённому конечному пределу, т. е. ряд $\sum|u_n v_m|$ сходящийся, а поэтому ряд $\sum u_n v_m$ будет абсолютно сходящимся. Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка суммирования и объединения членов ряда в группы. Обозначая частичные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_m$ через s_n и s'_n, при суммировании квадратами прямоугольной таблицы (12) будем иметь:

$$s''_p = s_p s'_p \quad \text{и} \quad s'' = ss',$$

а следовательно, и при всяком ином порядке суммирования сумма ряда $\sum u_n v_m$ равна произведению сумм данных рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$, что и требовалось доказать.

Обобщение Мертенса. *Если по крайней мере один из двух сходящихся рядов, $s = \sum u_n$, $s' = \sum v_n$, например первый, — абсолютно сходящийся, то ряд $\sum w_n$, где $w_n = u_n v_0 + u_{n-1} v_1 + \ldots + u_0 v_n$ — сходящийся и имеет сумму, равную произведению сумм данных рядов.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу сходимости данных рядов разности $s_n - s_p$ и $s'_n - s'_q$ при достаточно высоких значениях p и q и $n > p$, $n > q$ могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Произведение $s_n s'_n$ представляет сумму членов квадрата прямоугольной области (12), а $s''_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ — сумму членов этого квадрата, лежащих над восходящей диагональю его, включая и эту диагональ. Следовательно, в разность $s_n s'_n - s''_n$ входят члены

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & & & & + & u_1 v_{n-1} \\
 & & & + & u_2 v_{n-2} & + & u_2 v_{n-1} \\
 & + & u_3 v_{n-3} & + & u_3 v_{n-2} & + & u_3 v_{n-1} \\
 & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
+ u_p v_q + \ldots & + & u_p v_{n-3} & + & u_p v_{n-2} & + & u_p v_{n-1} \\
 & & \ldots & & \ldots & & \ldots \\
+ u_{n-2} v_2 + \ldots + u_{n-2} v_q + \ldots & + & u_{n-2} v_{n-3} & + & u_{n-2} v_{n-2} & + & u_{n-2} v_{n-1} \\
u_{n-1} v_1 + u_{n-1} v_2 + \ldots + u_{n-1} v_q + \ldots & + & u_{n-1} v_{n-3} & + & u_{n-1} v_{n-2} & + & u_{n-1} v_{n-1}.
\end{array}$$

Суммируя по строкам эту совокупность слагаемых и обозначая через α_p сумму первых p строк, а через β_p сумму остальных, получим

$$\alpha_p = u_1(s'_n - s'_{n-1}) + u_2(s'_n - s'_{n-2}) + \ldots + u_p(s'_n - s'_q),$$

$$\beta_p = u_{p+1}(s'_n - s'_{q-1}) + u_{p+2}(s'_n - s'_{q-2}) + \ldots + u_{n-1}(s'_n - s'_1),$$

$$s_n s'_n - s''_n = \alpha_p + \beta_p.$$

При достаточно больших значениях p и q ($p+q=n$) разности $s'_n - s'_{n-1}$, $s'_n - s'_{n-2}, \ldots, s'_n - s'_q$, как части остатка сходящегося ряда $\sum v_n$, по абсолютной величине будут меньше наперёд данного положительного числа ε, сколь угодно малого. Следовательно, обозначая через σ_m и σ частичную сумму и сумму ряда $\sum |u_n|$, имеем

$$|\alpha_p| \leqslant |u_1(s'_n - s'_{n-1})| + |u_2(s'_n - s'_{n-2})| + \ldots$$

$$\ldots + |u_p(s'_n - s'_q)| < (\sigma_{p+1} - \sigma_1)\varepsilon < \sigma\varepsilon.$$

С другой стороны, разности $s'_n - s'_{q-1}, \ldots, s'_n - s'_1$, в силу сходимости ряда $\sum v_n$, по абсолютной величине меньше некоторого положительного числа A. Следовательно,

$$|\beta_p| \leqslant |u_{p+1}(s'_n - s'_{q-1})| + \ldots + |u_{n-1}(s'_n - s'_1)| < A(\sigma_n - \sigma_p).$$

Но разность $s_n - s_p$, представляя часть сходящегося по условию ряда $\sum |u_n|$, при достаточно высоком значении p представляет величину сколь угодно малую. Таким образом при бесконечном увеличении p и q будем иметь

$$\lim \alpha_p = 0, \quad \lim \beta_p = 0 \quad \text{и} \quad \lim(s_n s'_n - s''_n) = \lim \alpha_p + \lim \beta_p = 0,$$

откуда

$$\lim s_n s'_n = \lim s''_n \quad \text{и} \quad s'' = ss',$$

что и требовалось доказать.

§ 8. Ряды с комплексными членами.

Определение сходимости и расходимости ряда в силу понятия предела для комплексного переменного (стр. 34) применимо и к рядам, члены которых — комплексные числа. Пусть члены ряда $\sum u_n$ — комплексные числа

$$u_n = a_n + ib_n.$$

Составляя частичную сумму этого ряда, мы получим комплексное число, вещественная и мнимая части которого определяются по правилу сложения комплексных чисел (стр. 23—24):

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = A_n + iB_n,$$

где

$$A_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}, \quad B_n = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}.$$

Предел, к которому стремится частичная сумма s_n, и называют суммою данного ряда. Но

$$\lim s_n = \lim A_n + i \lim B_n.$$

Таким образом ряд с комплексными членами будет сходящимся, если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$, образованные из вещественных и мнимых частей членов данного комплексного ряда, будут сходящимися.

Ряд с комплексными членами называют абсолютно сходящимся, если ряд, составленный из модулей его членов, т. е. ряд

$$\sum |u_n| = \sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

сходящийся.

Абсолютно сходящиеся ряды с комплексными членами обладают такого же рода свойствами, как и абсолютно сходящиеся ряды с действительными членами.

ПОВТОРИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Что такое бесконечный ряд и что называют суммой бесконечного ряда? Когда ряд называют сходящимся и когда расходящимся? Какие виды расходимости следует различать? Что такое остаток ряда? В чём заключается необходимое и достаточное условие сходимости ряда?

2. Какие признаки сходимости положительных рядов вытекают из сравнения рядов? В чём состоят признаки Даламбера и Коши? Когда признаки Даламбера и Коши неприменимы и какие пути возможны в этом случае для исследования вопроса о сходимости ряда?

3. Когда знакопеременный ряд сходится? Что такое абсолютная и что такое условная сходимость ряда? Что можно сказать о сумме условно сходящегося ряда? Возможно ли из двух расходящихся рядов $\sum a_n$ и $\sum u_n$ составить сходящийся ряд $\sum a_n u_n$ и, если возможно, на основании какой теоремы?

4. Какие возможны действия с рядами и при каких условиях?

УПРАЖНЕНИЯ.

1. При каких значениях a и b ряд $\sum (a^n + b^n)$ будет сходящимся? Определить его сумму.

Отв. $s = \dfrac{a + b - 2ab}{(1-a)(1-b)}$.

2. Можно ли установить сходимость ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$$

по признаку Даламбера и Коши? Разлагая общий член этого ряда следующим образом:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right),$$

вычислить s_n и $\lim s_n$ и показать таким образом, что данный ряд сходящийся.

3. Показать, что ряды с положительными членами

$$\sum u_n, \quad \sum \frac{u_n}{1+u_n}, \quad \sum \frac{u_n}{1-u_n} \quad (\text{при } u_n \neq 1)$$

будут одновременно или сходящимися или расходящимися.

4. Можно ли установить сходимость ряда

$$\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}+\ldots$$

по признаку Даламбера или Коши?

Разлагая общий член на сумму или разность дробей с знаменателями $2n+2$ и $2n+1$, показать, что данный ряд имеет ту же сумму, что и знакочередующийся ряд

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

и, следовательно, является сходящимся.

5. Применить к определению сходимости ряда

$$\frac{1}{2(\ln 2)^a}+\frac{1}{3(\ln 3)^a}+\frac{1}{4(\ln 4)^a}+\ldots+\frac{1}{n(\ln n)^a}+\ldots$$

теорему Коши и показать таким образом, что данный ряд будет сходящимся при $a>1$ и расходящимся при $a\leqslant 1$.

6. При каких значениях x ряды

a) $1+\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}+\ldots,$

b) $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$

c) $\frac{x}{1+\sqrt{1}}+\frac{x}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$

будут сходящимися?

ГЛАВА X[1]).

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

§ 1. Ряды, члены которых зависят от переменного аргумента.

Члены бесконечного ряда $\sum u_n$ могут зависеть от переменного аргумента x.

Для одних значений этого аргумента ряд может оказаться сходящимся, для других — расходящимся. Если для всякого значения x какого-либо интервала (a, b) ряд функций независимого переменного x

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_{n-1}(x)+\ldots \qquad (1)$$

сходящийся, сумма ряда будет функцией x, определённой в этом интервале. Возможно, что ряд (1) будет сходящимся и в концах интервала, но возможно также, что здесь он будет расходящимся в том или другом смысле. В тех случаях, где будет требоваться определённое указание на поведение ряда в концах интервала, мы будем пользоваться и более определёнными обозначениями для последнего:

(a, b) — для интервала $a \leqslant x \leqslant b$,
$(a+0, b)$ — для интервала $a < x \leqslant b$,
$(a+0, b-0)$ — для интервала $a < x < b$,
$(a, b-0)$ — для интервала $a \leqslant x < b$.

Таким образом *интервал сходимости* ряда может быть и замкнутым или закрытым, т. е. интервалом, включающим начальную и конечную точки, и открытым с одной или обеих сторон, т. е. интервалом без одного или обоих концов.

Обозначая функцию, определяемую рядом (1), через $s(x)$, будем иметь по определению

$$s(x) = \lim s_n(x) = \lim [u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_{n-1}(x)].$$

Вычисление частичных сумм $s_n(x)$ для различных значений n даёт возможность вычислять значения функции $s(x)$ с любою степенью точности.

---

[1]) Главы X, XI и XII II тома написаны учеником А. К. Власова Н. А. Глаголевым.

Таким образом устанавливается новый способ аналитического определения функций. Сначала для этой цели в нашем распоряжении были элементарные алгебраические операции, совершаемые в конечном числе над постоянными и аргументом, или над постоянными, аргументом и функцией (неявные функции). Потом мы познакомились с бесконечным процессом в виде определённого интеграла с переменным верхним (или нижним) пределом (т. I, стр. 344).

Мы видели, что этим вторым способом можно определить $\ln x$ (т. I, стр. 381), что так же могут быть определены обратные тригонометрические функции:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

которые первоначально определялись нами геометрически. Теперь к предыдущим способам прибавляется также бесконечный процесс, но в виде бесконечного ряда.

Возможно, что одна и та же функция может быть определена различными способами, но не всегда различные способы определения функции определяют её в совершенно тождественных интервалах. Так, ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \tag{2}$$

представляющий геометрическую прогрессию, будет сходящимся, если x по абсолютной величине меньше единицы, и потому даёт нам вполне определённую функцию для интервала $(-1+0,\ 1-0)$, значения которой мы можем вычислить для $|x|<1$ с любой степенью точности, вычисляя суммы $1+x$, $1+x+x^2$ и т. д. Но та же функция определяется и конечным выражением, представляющим сумму бесконечной геометрической прогрессии:

$$s(x) = \frac{1}{1-x}. \tag{3}$$

Оба эти определения тождественны лишь для интервала $(-1+0,\ 1-0)$; вне этого интервала ряд (2), будучи расходящимся, не определяет никакой функции, между тем выражение (3) и при $|x|>1$ имеет смысл и лишь при $x=1$, требуя деления на 0, не определяет соответствующего значения функции. Если присоединить к значениям функции и пределы, к которым она стремится при различных изменениях x, то выражение (3) определяет функцию всюду, в том числе и при $x=1$, если считать, что

$$s(1) = \lim s(x) = \infty,$$

а ряд (2) определяет функцию лишь в интервале $(-1+0,\ 1)$, совпадающую с функцией (3) при дополнительном условии $-1 < x \leqslant 1$.

Члены бесконечного ряда могут зависеть и от нескольких переменных и тогда ряд определяет в области сходимости функцию нескольких переменных. Если члены ряда зависят от одного, но комплексного переменного, ряд определяет функцию этого комплексного переменного.

Рассмотрение рядов, члены которых суть функции одного или нескольких независимых переменных, ставит перед нами ряд новых задач. Если функции $u_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ непрерывны и дифференцируемы, то сумма, состоящая из конечного числа таких слагаемых:

$$s_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_{n-1}(x),$$

представляет также непрерывную функцию, имеющую производную и, в силу непрерывности, интеграл, которые находятся соответственно почленным дифференцированием и интегрированием. Эти положения и правила вытекают из предложения, что сумма конечного числа бесконечно малых слагаемых бесконечно мала. Но такая аргументация неприложима к бесконечным рядам.

Таким образом, нам предстоит исследовать вопрос, при каких условиях бесконечный ряд, члены которого суть непрерывные и дифференцируемые функции, представляет непрерывную функцию и можно ли и в каких случаях бесконечный ряд дифференцировать и интегрировать почленно.

§ 2. Равномерная сходимость.

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы остаток при увеличении его указателя мог быть сделан сколь угодно малым по абсолютной величине.

Но остаток ряда, члены которого являются функциями независимого переменного x, зависит не только от указателя n, но и от аргумента x:

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

где

$$r_n(x) = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots \tag{4}$$

При данном значении аргумента, например x_0, взятого из интервала сходимости, для данного сколь угодно малого положительного числа ε мы можем подобрать соответственное, достаточно большое значение указателя m так, что будут иметь место неравенства

$$|r_m(x_0)| < \varepsilon, \quad |r_{m+1}(x_0)| < \varepsilon, \ldots, \quad |r_n(x_0)| < \varepsilon, \ldots \tag{5}$$

Если значение аргумента изменится, оставаясь в интервале сходимости, то возможно, что при том же числе ε и том же начальном указателе m неравенства (5) сохранят свою силу, но возможно, что с изменением x при данном значении ε значение указателя m, начиная с которого неравенства (5) должны иметь место, придётся повысить, возможно даже, что при изменении аргумента x в интервале сходимости такому повышению указателя нет границ. Если возможно

подобрать определённое, достаточно большое значение указателя M, не зависящее от x, так, что при любом значении n, большем числа M или равном ему, неравенство

$$|r_n(x)| < \varepsilon \quad (n \geqslant M) \tag{6}$$

будет иметь место при всяком значении x в рассматриваемом интервале (a, b), то ряд называют *равномерно сходящимся*. Другими словами — остаток равномерно сходящегося ряда можно сделать сколь угодно малым равномерно во всём интервале, т. е. начиная с того же самого значения указателя M, меняющегося лишь с изменением положительного числа ε, меньше которого должна быть по требованию абсолютная величина остатка. Число M, входящее в определение равномерной сходимости, является верхней границей указателя m в неравенствах (5) для различных значений x из интервала (a, b). Для неравномерно сходящегося ряда значение указателя m, вообще различное для различных значений x, не имеет верхней границы.

Для ряда как равномерно, так и неравномерно сходящегося неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$, при данном ε, в интервале (a, b) или части его может выполняться для некоторых значений n и без того, чтобы сохранять силу для всех следующих за ними его значений. Но разница в том, что при равномерной сходимости есть такое значение указателя M, начиная с которого это неравенство уже постоянно имеет место независимо от x, а при неравномерной сходимости такого указателя нет.

Понятие равномерной сходимости одинаково относится и к рядам, члены которых зависят не от одного, а от нескольких переменных, или от комплексного переменного. Определение её для них остаётся то же самое, только вместо интервала сходимости и значений переменного в этом интервале придётся говорить об области сходимости и системе значений переменных в этой области.

Пример. Геометрическая прогрессия с первым членом x и знаменателем $1 - x$

$$s(x) = x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots + x(1-x)^{n-1} + \ldots \tag{\alpha}$$

представляет сходящийся ряд в замкнутом интервале (0, 1). Действительно, $s(x) = 1$ при $0 < x < 1$; кроме того, как следует из непосредственной подстановки, $s(0) = 0$, а $s(1) = 1$. Рассматриваемый ряд в интервале (0, 1) неравномерно сходящийся, а во всяком интервале $(a, 1)$, где $0 < a < 1$, — равномерно сходящийся. Действительно, остаток

$$r_n(x) = x(1-x)^n + x(1-x)^{n+1} + \ldots = (1-x)^n \qquad (x > 0)$$

зависит от x, а из неравенства $|r_n(x)| < \varepsilon$ или $(1-x)^n < \varepsilon$, принимая во внимание, что $1 - x$ и ε можно считать заключёнными между нулём и единицей, следует:

$$n\,|\ln(1-x)| > |\ln \varepsilon| \quad \text{или} \quad n > \frac{|\ln \varepsilon|}{|\ln(1-x)|}. \tag{\beta}$$

При данном ε числитель остаётся постоянным, а знаменатель, если x стремится к 0, может быть сделан сколь угодно малым; следовательно, выражение $\frac{|\ln\varepsilon|}{|\ln(1-x)|}$ не имеет верхней границы в интервале (0, 1), а потому нельзя указать такого числа M, чтобы при $n>M$ неравенство (β) удовлетворялось для всех x в интервале (0, 1). Но в интервале $(a, 1)$, где $0<a<1$, дробь (β) имеет верхнюю границу $\frac{|\ln\varepsilon|}{|\ln(1-a)|}=M$ и при $n>M$ имеем $|r_n(x)|<\varepsilon$ для всех x в интервале $(a, 1)$.

§ 3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости и некоторые свойства равномерно сходящихся рядов.

Ряд функций $\sum u_n(x)$ *— равномерно сходящийся в интервале* (a, b), *если члены его, начиная с некоторого указателя, при всяком значении* x *в этом интервале по абсолютной величине постоянно меньше соответственных (по номеру) членов сходящегося ряда* $\sum \alpha_n$, *составленного из положительных членов, не зависящих от* x.

Доказательство. Действительно, по условию при $n\geqslant m$, где m — некоторое определённое целое число, $|u_n(x)|<\alpha_n$. Следовательно, при $n\geqslant m$ и $|r_n(x)|<R_n$, где R_n — остаток ряда $\sum\alpha_n$. Но в силу сходимости ряда $\sum\alpha_n$ любому наперёд данному положительному числу ε соответствует определённое значение указателя M, начиная с которого $R_n<\varepsilon$. Следовательно, для $n\geqslant M$ или, если $M<m$, — для $n\geqslant m$ имеет место и неравенство $|r_n(x)|<\varepsilon$ на протяжении всего интервала сходимости, т. е. ряд $\sum u_n(x)$ в этом интервале — равномерно сходящийся.

Докажем теперь, что *если члены равномерно сходящегося в каком-либо интервале ряда суть непрерывные функции переменного* x, *то сумма ряда есть функция, непрерывная в том же интервале.*

Доказательство. Действительно, обозначая через $s(x)$ функцию, представляемую данным рядом, имеем:

$$s(x)=s_n(x)+r_n(x),$$

где $s_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда, а $r_n(x)$ — его остаток. Возьмём произвольное значение аргумента x, лежащее в данном интервале, и дадим ему приращение h такое, чтобы число $x+h$ также лежало в данном интервале. Обозначая через Δs, Δs_n, Δr_n соответственно приращения функций $s(x)$, $s_n(x)$ и $r_n(x)$, очевидно, будем иметь:

$$\Delta s=\Delta s_n+\Delta r_n, \tag{7}$$

или

$$\Delta s=\Delta s_n+r_n(x+h)-r_n(x),$$

откуда

$$|\Delta s|\leqslant|\Delta s_n|+|r_n(x+h)|+|r_n(x)|. \tag{8}$$

Так как данный ряд сходится равномерно, то, взяв произвольное сколь угодно малое число ε, можно подобрать такое число m_0, что при $n \geqslant m_0$ будем иметь $|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при всех значениях x в данном интервале; в частности, будем иметь одновременно

$$|r_{m_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |r_{m_0}(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Далее, $s_{m_0}(x)$, как сумма конечного числа непрерывных функций, есть функция непрерывная, а потому можно подобрать такое положительное число δ, что при $|h| < \delta$ будем иметь

$$|\Delta s_{m_0}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{10}$$

Тогда из неравенства (8) в силу (9) и (10) следует:

$$|\Delta s| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |h| < \delta,$$

что и доказывает непрерывность функции $s(x)$.

Обратное предложение не было бы справедливо; неравномерно сходящийся ряд также в некоторых случаях может представлять непрерывную функцию.

§ 4. Интегрирование и дифференцирование рядов.

Пусть дан ряд

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_{n-1}(x) + \ldots, \tag{11}$$

сходящийся при всех значениях x, лежащих в данном интервале. Он определяет в этом интервале некоторую функцию $s(x)$. Является вопрос, какими свойствами обладает эта функция по отношению к основным операциям анализа: дифференцированию и интегрированию.

Теорема 1. *Если члены ряда* (11) *суть функции непрерывные в каком-либо интервале и ряд* (11) *сходится в этом интервале равномерно, то функция* $s(x)$ *интегрируема и интеграл её в любых пределах от* a *до* b, *лежащих внутри интервала сходимости, может быть получен почленным интегрированием данного ряда.*

В самом деле, сумму $s(x)$ данного ряда можно представить в форме

$$s(x) = s_n(x) + r_n(x). \tag{11'}$$

Из предшествующего следует, что $s(x)$, $s_n(x)$ и $r_n(x)$ суть функции непрерывные и, следовательно, $s(x)$ интегрируема (ч. I, гл. IV, § 9), причём

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b s_n(x)\,dx + \int_a^b r_n(x)\,dx. \tag{12}$$

Так как ряд (11) сходится равномерно, то для произвольно малого положительного числа ε можно подобрать такое число m, что, взяв $n \geqslant m$, будем иметь

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

для всех значений x в интервале (a, b). Поэтому

$$\left|\int_a^b r_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |r_n(x)|\,dx < \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)$$

при $n \geqslant m$.

Таким образом этот интеграл при $n \geqslant m$ становится менее произвольно малого положительного числа $\varepsilon(b-a)$ и, следовательно, при беспредельном возрастании n стремится к нулю; а потому, увеличивая в равенстве (12) n беспредельно, будем иметь:

$$\int_a^b s(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b u_0(x)\,dx + \int_a^b u_1(x)\,dx + \int_a^b u_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)\,dx\right]$$

или

$$\int_a^b s(x)\,dx = \int_a^b u_0(x)\,dx + \int_a^b u_1(x)\,dx + \ldots, \tag{13}$$

и теорема доказана.

Допустим теперь, что верхний предел интеграции есть не постоянное число b, а переменная величина x, лежащая в интервале (a, b); тогда интегралы (13) будут функциями этого верхнего предела, и равенство (13) примет вид:

$$\int_a^x s(x)\,dx = \int_a^x u_0(x)\,dx + \int_a^x u_1(x)\,dx + \ldots \tag{13'}$$

Легко видеть, что этот новый ряд также сходится равномерно в интервале (a, b). В самом деле, его остаточный член в силу (12) имеет вид:

$$\int_a^x r_n(x)\,dx.$$

Так как x лежит в интервале (a, b), то при $n \geqslant m$ имеем:

$$\left|\int_a^x r_n(x)\,dx\right| < \varepsilon(b-a)$$

при всех x в интервале (a, b), что и доказывает равномерную сходимость нашего ряда.

Теорема 2. *Если члены сходящегося ряда суть функции переменного x, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных, сходится равномерно в каком-либо интервале, то сумма второго ряда есть производная от суммы данного ряда.*

Доказательство. Пусть

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_{n-1}(x) + \ldots \qquad (14)$$

есть данный ряд и

$$s(x) = u_0'(x) + u_n'(x) + \ldots + u_{n-1}'(x) + \ldots \qquad (15)$$

— ряд, члены которого суть производные членов данного ряда и который сходится равномерно в интервале (a, b). В силу теоремы 1 ряд (15) можно интегрировать почленно в пределах от a до x, где $a < x < b$.

Выполнив это интегрирование, получим

$$\int_a^x s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x u_n'(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} [u_n(x)]_a^x =$$

$$= [u_0(x) - u_0(a)] + [u_1(x) - u_1(a)] + \ldots$$

Последнее выражение представляет собой разность двух рядов.

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_{n-1}(x) + \ldots$$

и

$$S(a) = u_0(a) + u_1(a) + \ldots + u_{n-1}(a) + \ldots,$$

а потому имеем:

$$\int_a^x s(x)\,dx = S(x) - S(a).$$

Беря производные обеих частей этого равенства, в силу непрерывности функции $s(x)$ получим:

$$s(x) = S'(x),$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Свойства степенных рядов.

Степенным рядом называют ряд, члены которого суть последовательные целые положительные степени аргумента, снабжённые числовыми коэффициентами, т. е. ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots \qquad (16)$$

Эти ряды вследствие своих важных свойств играют большую роль в анализе. Познакомимся с важнейшими из этих свойств.

Обозначим через r и α_n абсолютные значения величин x и a_n, т. е. положим

$$|x| = r \text{ и } |a_n| = \alpha_n,$$

и составим ряд

$$\alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \ldots + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \ldots, \tag{17}$$

члены которого суть абсолютные величины членов ряда (16).

Если ряд (17) будет сходящимся, то ряд (16) будет тоже сходящимся и притом абсолютно. Исследуем сходимость ряда (17), применив к нему признак Коши (стр. 307).

Возьмём выражение

$$\sqrt[n]{\alpha_n r^n} = r\sqrt[n]{\alpha_n} = r\rho_n, \text{ где } \rho_n = \sqrt[n]{\alpha_n}.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, то ряд (17), очевидно, сходится при любом значении r, а, следовательно, ряд (16) сходится абсолютно при всяком x.

С другой стороны, если для некоторой последовательности указателей $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_{n_k} = \infty$, то, очевидно, ряд (16) расходится при любом значении $x \neq 0$, так как абсолютная величина его общего члена, т. е. $(\rho_n r)^n$ не стремится к нулю с возрастанием n.

Пусть, наконец, ρ_n ограничено. Тогда для каждого значения m последовательность $\rho_m, \rho_{m+1}, \ldots, \rho_{m+n}, \ldots$ ограничена и, значит, обладает точной верхней границей; обозначим её ρ'_m. По определению точной верхней границы, ρ'_m есть наименьшее число, обладающее тем свойством, что $\rho_n \leqslant \rho'_m$ для всех $n \geqslant m$. Ясно, что ρ'_m при возрастании m не может возрастать. Поэтому, будучи ограниченным снизу числом 0, ρ'_m при $m \to \infty$ стремится к определённому пределу. Этот предел называют *верхним пределом* последовательности $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ и обозначают

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n.$$

Название «верхний предел» объясняется следующим. Хотя сама последовательность $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ может и не сходиться, из неё, в силу её ограниченности, можно выбирать различные сходящиеся подпоследовательности и, значит, получать различные, вообще говоря, пределы, связанные с данной последовательностью. Оказывается, что определённое выше число $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n$ и есть, действительно, верхний, т. е. наибольший из этих пределов.

Очевидно, если последовательность $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ сходящаяся, то верхним пределом служит просто предел этой последовательности:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \rho_n = \lim_{n\to\infty} \rho_n.$$

Вернёмся теперь к вопросу об условиях сходимости ряда (16). Если последовательность $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ ограничена и вместе с тем не стремится к нулю, то её верхний предел есть конечное положительное число; обозначим его через $\frac{1}{R}$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\rho_n = \frac{1}{R}.$$

Докажем, что ряд (17) будет сходящимся, если $r < R$, и расходящимся, если $r > R$.

Пусть

$$r < R;$$

тогда

$$\frac{1}{r} > \frac{1}{R},$$

и мы можем положить

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \varepsilon,$$

где ε — положительное число. Отсюда

$$r = \frac{R}{1+\varepsilon R}.$$

Возьмём выражение

$$\sqrt[n]{a_n r^n} = \rho_n r = \frac{\rho_n R}{1+\varepsilon R}.$$

По определению верхнего предела, для всех достаточно больших значений n должно выполняться неравенство

$$\rho_n < \frac{1}{R} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\rho_n R}{1+\varepsilon R} < \frac{1+\frac{\varepsilon}{2}R}{1+\varepsilon R}.$$

Следовательно, $\sqrt[n]{a_n r^n}$, начиная с некоторого значения n, делается меньше постоянной правильной дроби и в силу признака Коши ряд (17) сходится.

Пусть теперь

$$r > R.$$

Из определения верхнего предела следует, что для произвольного положительного числа ε существует бесчисленное множество значений n, для которых осуществляется неравенство

$$\rho_n > \frac{1}{R} - \varepsilon,$$

откуда

$$\rho_n r = \sqrt[n]{a_n r^n} > \frac{r}{R} - \varepsilon r.$$

Но так как $r > R$, то $\frac{r}{R} > 1$, и так как ε — произвольное положительное число, то можно взять его меньшим, чем разность $\frac{1}{R} - \frac{1}{r}$; тогда величина $\frac{r}{R} - \varepsilon r$ будет > 1 и, следовательно, для бесчисленного множества значений n мы будем иметь

$$\sqrt[n]{a_n r^n} > 1;$$

следовательно, в ряде (17) общий член не стремится к нулю, а потому этот ряд расходится.

Сравнивая ряд (17) с рядом (16), мы заключаем, что ряд (16) сходится абсолютно при любом x, для которого $|x| < R$, и расходится при тех значениях x, для которых $|x| > R$ (ибо при этих значениях x общий член ряда (16) не будет стремиться к нулю).

Интервал $(-R, +R)$ называют *интервалом сходимости* ряда (16).

При $|x| = R$ ряд (16) может оказаться и сходящимся и расходящимся.

Если величина $\rho_n = \sqrt[n]{a_n}$ имеет предел при $n \to \infty$, то

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$

Далее, если существует предел отношения $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, то в силу теоремы, доказанной на стр. 308—309, имеем также

$$R = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Теорема. *Степенной ряд* (16) *сходится равномерно в любом интервале* $(-\rho, +\rho)$, *границы которого лежат внутри интервала сходимости.*

Доказательство. Пусть $(-R, +R)$ — интервал сходимости данного ряда (16); по условию $\rho < R$, а потому ряд

$$a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_{n-1}\rho^{n-1} + \ldots \qquad (17')$$

сходится и, следовательно, ряд (16) сходится абсолютно при всяком x, для которого $|x| < \rho$. При этом члены ряда (16) будут меньше соответствующих членов сходящегося числового ряда (17') и в силу признака Вейерштрасса ряд (16) будет сходиться равномерно в интервале $(-\rho, +\rho)$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Степенной ряд можно интегрировать почленно в любых пределах, лежащих внутри интервала сходимости.*

Теорема. *Если*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (16')$$

— степенной ряд, интервал сходимости которого $(-R, +R)$, *то ряд*

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \qquad (18)$$

получаемый почленным дифференцированием ряда (16′), *имеет тот же интервал сходимости* $(-R, +R)$ *и сходится в этом интервале к функции*

$$\varphi(x) = f'(x).$$

Другими словами, производную от функции, определяемой степенным рядом, можно получить почленным дифференцированием данного ряда.

Доказательство. Покажем сначала, что ряд (18) сходится абсолютно при всяком x, для которого $|x| = r < R$, и расходится при $|x| = r > R$.

Пусть $r < R$. Возьмём какое-либо число R', лежащее между r и R, т. е. удовлетворяющее неравенствам $r < R' < R$, и составим вспомогательный ряд:

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R'} \cdot 2\frac{r}{R'} + \frac{1}{R'} \cdot 3\left(\frac{r}{R'}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{R'} \cdot n\left(\frac{r}{R'}\right)^{n-1} + \ldots \qquad (19)$$

В силу признака Даламбера этот ряд сходится, так как отношение последующего члена к предыдущему

$$\frac{1}{R'}(n+1)\left(\frac{r}{R'}\right)^n : \frac{1}{R'}n\left(\frac{r}{R'}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{n}\frac{r}{R'} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{r}{R'}$$

при беспредельном возрастании n стремится к пределу $\frac{r}{R'}$, меньшему единицы. Так как ряд (16′) сходится абсолютно при $|x| = R'$, то можно указать такое число A, для которого

$$a_nR'^n < A$$

при всяком n, а потому, умножая члены ряда (19) соответственно на a_1R', $a_2R'^2, \ldots$, мы должны вновь получить сходящийся ряд (стр. 304, п. 3). Но выполнив это умножение, получим ряд

$$a_1 + 2a_2r + 3a_3r^2 + \ldots; \qquad (20)$$

это — ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (18). Из сходимости его вытекает абсолютная сходимость ряда (18).

Пусть теперь $r > R$. Легко видеть, что при таком предположении ряд (20) не может сходиться. В самом деле, допустим, что ряд (20) сходится; тогда должен сходиться и ряд

$$a_1 + a_2r + a_3r^2 + \ldots,$$

так как члены последнего ряда не превосходят соответственных членов ряда (20). Умножая члены последнего ряда на r и прибавляя к ряду число a_0, получим:

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \dots$$

Этот ряд опять должен сходиться, что, однако, невозможно, так как это — ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (16′), абсолютно сходящегося лишь при $r < R$. Итак, интервал сходимости ряда (18) есть $(-R, +R)$, т. е. тот же, что и ряда (16′).

Далее, в силу теоремы о равномерной сходимости степенного ряда, заключаем, что ряд (18) сходится равномерно в любом интервале $(-\rho, +\rho)$, границы которого лежат внутри интервала сходимости, и так как каждую точку x, лежащую внутри интервала $(-R, +R)$, всегда можно окружить интервалом $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, границы которого лежат внутри интервала $(-R, +R)$, то в силу теоремы о дифференцировании рядов заключаем, что сумма ряда (18) есть производная от функции $f(x)$, представляемой рядом (16′), во всех точках внутри общего интервала сходимости рядов (16′) и (18).

Пример. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots; \tag{21}$$

этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $-x$ и сходится абсолютно при $|x| < 1$. Интервал его сходимости есть, таким образом, $(-1, +1)$. Границы интервала сходимости можно определить и общим методом, изложенным выше: именно, мы имеем для определения границы R интервала сходимости следующее равенство:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$

Так как в данном случае $a_n = 1$, то наше равенство даёт $R = 1$.

На границах интервала сходимости, т. е. при $x = +1$ и $x = -1$, ряд (21) расходится.

В силу доказанных выше свойств степенного ряда мы можем проинтегрировать ряд (21) почленно в пределах от 0 до x, где $|x| < 1$. Выполнив эту интеграцию, получим:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \tag{22}$$

Мы получили таким образом выражение функции $\ln(1+x)$ для $|x| \leqslant 1$ в виде бесконечного ряда. Ряд (22) также сходится в интервале $(-1, +1)$. При этом при $x = -1$ ряд (22) обращается в гармонический ряд

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \dots$$

и, следовательно, расходится (стр. 303). Напротив, при $x = +1$ мы получим ряд, который, как мы видели выше, сходится (стр. 314). Покажем, что сумма

этого ряда есть $\ln 2$:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots=\ln 2. \qquad (22')$$

Это равенство мы пока не можем получить, полагая в (22) $x=1$, так как формула (22) была выведена нами в предположении, что $|x|<1$. Но нетрудно видеть, что формула (22) верна и при $x=1$.

Действительно, интегрируя тождество

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+(-1)^n\frac{x^n}{1+x}$$

в пределах от 0 до 1, получаем

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx.$$

Но

$$\left|(-1)^n\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx\right|<\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1},$$

и так как $\frac{1}{n+1}\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$, то тем самым и доказано равенство (22).

Мы видели, что ряд, получаемый почленным интегрированием (или дифференцированием) данного степенного ряда, сходится в том же интервале, что и данный ряд. Но на границе интервала сходимости поведение обоих рядов может быть различно. Так, в рассмотренном выше примере ряд (22) сходится при $x=1$, тогда как ряд (21) при $x=1$ расходится.

§ 6. Задача разложения функции в степенной ряд; аппроксимация функции целым многочленом.

До сих пор мы изучали свойства функций, представляемых рядами, члены которых суть функции переменного аргумента. Естественно поставить теперь обратную задачу: найти выражение данной функции в виде бесконечного ряда определённого вида, иначе, разложить данную функцию в бесконечный ряд. Простейшими рядами с переменными членами являются ряды степенные; в пределах интервала сходимости их свойства, как мы уже видели, во многом напоминают свойства целых многочленов. Поэтому мы и начнём с рассмотрения вопроса о разложении функции в степенной ряд. Такое разложение может иметь двоякую цель: во-первых, исследуя ряд, представляющий данную функцию, можно, как мы увидим дальше, более подробно изучить свойства этой функции; во-вторых, вследствие простоты конструкции степенного ряда, такое разложение даёт возможность легче вычислять значения функции по данному значению аргумента. В самом деле, имея выражение данной функции в виде бесконечного ряда и взяв сумму n его членов, мы получим целый многочлен $(n-1)$-й степени, дающий приближённое значение нашей функции и могущий с некоторым приближением заменить собой данную функцию в пределах интервала схо-

димости степенного ряда; величина остаточного члена $r_n(x)$, которую мы отбрасываем, заменяя равенство

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

приближённым равенством

$$f(x) \approx s_n(x),$$

показывает величину погрешности, которая будет сделана при такой замене.

Пусть дана функция $f(x)$, имеющая, при $x = a$, n конечных производных:

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x).$$

Найдём многочлен g_{n-1} степени $n-1$, обладающий тем свойством, что при $x = a$ значения этого многочлена и его $n-1$ производных совпадают со значениями самой функции $f(x)$ и её $n-1$ первых производных:

$$\left.\begin{array}{r} g_{n-1}(a) = f(a);\ g'_{n-1}(a) = f'(a); \\ g''_{n-1}(a) = f''(a);\ \ldots;\ g^{(n-1)}_{n-1}(a) = f^{(n-1)}(a). \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Равенства (23), как нетрудно видеть, вполне определяют единственный многочлен $g_{n-1}(x)$ степени $n-1$, обладающий таким свойством. В самом деле, по формуле Тэйлора для целого многочлена (стр. 11) имеем

$$g_{n-1}(x) = g_{n-1}(a) + \frac{x-a}{1} g'_{n-1}(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} g''_{n-1}(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} g^{(n-1)}_{n-1}(a),$$

но, в силу (23), величины

$$g_{n-1}(a),\ g'_{n-1}(a),\ \ldots,\ g^{(n-1)}_{n-1}(a)$$

можно заменить соответственно на

$$f(a),\ f'(a),\ \ldots,\ f^{(n-1)}(a),$$

а потому

$$g_{n-1}(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} f''(a) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a).$$

Посмотрим теперь, с какой точностью и при каких значениях x найденный многочлен $g_{n-1}(x)$ может заменить собою данную функцию $f(x)$.

Обозначив величину разности $f(x)-g_{n-1}(x)$ через $R_n(x, a)$, будем иметь:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+R_n(x, a). \qquad (24)$$

Формула (24) носит название формулы Тэйлора для функции $f(x)$, а $R_n(x, a)$ называют *остаточным членом.*

Представим $R_n(x, a)$ в следующей форме:

$$R_n(x, a)=(x-a)^p P_n(x, a),$$

где p — произвольное пока положительное число. Равенство (24) примет вид:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+(x-a)^p P_n(x, a). \qquad (25)$$

Предполагая, что x имеет определённое числовое значение, составим теперь новую функцию аргумента y следующего вида:

$$F(y)=f(y)+\frac{x-y}{1}f'(y)+\frac{(x-y)^2}{1\cdot 2}f''(y)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-y)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(y)+$$
$$+(x-y)^p P_n(x, a)-f(x). \qquad (26)$$

В силу предположенных свойств функции $f(x)$ замечаем, что функция $F(y)$ непрерывна и имеет определённую производную $F'(y)$. Кроме того, как следует из (25) и (26), $F(a)=0$ и $F(x)=0$, а потому, в силу теоремы Ролля, существует некоторое число ξ, лежащее между числами x и a, для которого $F'(\xi)=0$. Непосредственное вычисление даёт:

$$F'(y)=\frac{(x-y)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n)}(y)-p(x-y)^{p-1}P_n(x, a).$$

Полагая $y=\xi$, получим:

$$\frac{(x-\xi)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\xi)-p(x-\xi)^{p-1}P_n(x, a)=0,$$

откуда

$$P_n(x, a)=\frac{(x-\xi)^{n-p}}{p\cdot 1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\xi).$$

Подставив это значение $P_n(x, a)$ в выражение для $R_n(x, a)$, получим:

$$R_n(x, a)=\frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p}}{p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\xi).$$

Так как ξ есть число, лежащее между a и x, то можно положить

$$\xi = a + \theta(x-a), \text{ где } 0 < \theta < 1,$$

и потому

$$R_n(x, a) = \frac{(x-a)^p [x-a-\theta(x-a)]^{n-p}}{p \cdot 1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \theta(x-a))$$

или

$$R_n(x, a) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-p}}{p \cdot 1 \cdot 2 \ldots (n-1)} f^{(n)}(a + \theta(x-a)). \quad (27)$$

Величина θ, входящая в формулу (27), есть некоторая положительная правильная дробь; точное значение её нам неизвестно, оно зависит от значений x, a, n и p.

Различным значениям числа p соответствуют различные формы остаточного члена.

Полагая $p = n$, мы будем иметь выражение остаточного члена в форме, данной Лагранжем:

$$R_n(x, a) = \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} f^{(n)}\big(a + \theta(x-a)\big). \quad (28)$$

Полагая $p = 1$, получим остаточный член в форме, данной Коши:

$$R_n(x, a) = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} f^{(n)}\big(a + \theta(x-a)\big). \quad (29)$$

Величина остаточного члена определяет степень точности, с которой многочлен $g_{n-1}(x)$ может заменить данную функцию $f(x)$. При $x = a$ значения многочлена $g_{n-1}(x)$ и данной функции $f(x)$ совпадают. Чтобы определить степень уклонения значения многочлена $g_{n-1}(x)$ от соответственных значений функции $f(x)$ в интервале $(a-h, a+h)$, окружающем точку a, достаточно найти верхнюю границу величины $|R_n(x, a)|$ в этом интервале. Эта верхняя граница определяет предел погрешности, допускаемой при замене функции $f(x)$ многочленом $g_{n-1}(x)$.

Можно заранее задаться некоторою степенью точности, т. е. потребовать, чтобы при такой замене погрешность не превосходила некоторой заранее указанной границы M. Тогда возникает вопрос, как велик может быть интервал $(a-h, a+h)$, т. е. каково должно быть значение h, если

$$|R_n(x, a)| < M$$

при

$$a - h < x < a + h.$$

Для различных функций этот вопрос имеет различные решения,

Если в формуле Тэйлора (24) положить $a=0$, то получим формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{p\cdot 1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x) \qquad (0<\theta<1),$$

или, в форме Коши:

$$R_n(x)=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x) \qquad (0<\theta<1),$$

или, наконец, в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(\theta x) \qquad (0<\theta<1).$$

§ 7. Ряды Тейлора и Маклорена.

При выводе формул Тэйлора и Маклорена мы предполагали, что функция $f(x)$ имеет производные до n-го порядка включительно.

Допустим теперь, что данная функция имеет бесконечную последовательность производных:

$$f'(x),\quad f''(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x),\ \ldots$$

Тогда в формуле Тейлора можно брать число n сколь угодно большим. Если при этом остаточный член $R_n(x, a)$ будет стремиться к нулю при беспредельном возрастании n, то в этой формуле возможен переход к пределу при $n\to\infty$. Правая часть этой формулы [формулы (24) предшествующего параграфа] обращается при этом в бесконечный ряд:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)+\ldots \qquad (30)$$

Этот ряд в силу сделанного предположения сходится и выражает данную функцию.

Посмотрим, когда вообще возможен такой предельный переход и какие случаи могут при этом представиться.

1. Допустим, что в равенстве (24) $R_n(x, a)$ не стремится к конечному пределу при беспредельном возрастании n.

В этом случае предельный переход в равенстве (24) невозможен. Ряд (30) будет расходящимся, ибо его n-я частичная сумма

$$f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)=f(x)-R_n(x,\ a) \qquad (31)$$

не стремится ни к какому пределу при возрастании n.

2. Пусть $R_n(x,\ a)$ при всех значениях x в каком-либо интервале $(\alpha,\ \beta)$ стремится при возрастании n к некоторому пределу, величина которого зависит от x: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,\ a)=L(x)$. В этом случае ряд (30) будет сходиться в интервале $(\alpha,\ \beta)$, но сумма его в силу (31) будет $f(x)-L(x)$. Её значения будут, таким образом, совпадать со значениями данной функции лишь для тех значений x, для которых $L(x)=0$.

3. Если, наконец, при всех x в каком-либо интервале $(\alpha,\ \beta)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,\ a)=0$, ряд (30) будет сходящимся в интервале $(\alpha,\ \beta)$, и в этом интервале его сумма совпадает со значениями данной функции. Он будет таким образом представлять данную функцию в интервале $(\alpha,\ \beta)$.

Если $\lim R_n(x,\ a)=0$ при всех значениях x, то ряд (30) сходится при любом x и представляет функцию $f(x)$ для всех значений x.

Полагая в формуле (30) $a=0$, мы получаем ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\ldots$$

Этот ряд представляет функцию $f(x)$ в виде степенного ряда.

§ 8. Разложение простейших функций в степенной ряд.

1. Возьмём функцию $f(x)=e^x$.

Так как в данном случае $f(x)=f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(k)}(x)=e^x$ для всякого порядка k, и $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(k)}(0)=1$, то, применяя формулу Маклорена, найдём:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}+R_n(x). \qquad (32)$$

Беря остаточный член в форме Лагранжа, будем иметь:

$$R_n(x)=\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}e^{\theta x}. \qquad (33)$$

Нетрудно заметить, что эта величина $R_n(x)$ с возрастанием n стремится к нулю при любом значении x. В самом деле, взяв модуль

этой величины, получим:

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^n}{1\cdot 2\ldots n} e^{\theta x}. \qquad (33')$$

Первый множитель этого выражения стремится к нулю с возрастанием n при всяком x. Действительно, обозначая через m наибольшее число, не превосходящее $2|x|$, так что уже $m+1>2|x|$, имеем:

$$\frac{|x|^n}{1\cdot 2\ldots n} < \frac{|x|^m}{1\cdot 2\ldots m}\left(\frac{|x|}{m+1}\right)^{n-m} < \frac{|x|^m}{1\cdot 2\ldots m}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m},$$

и так как правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$, то и левая часть стремится к нулю.

Второй же множитель выражения (33′) $e^{\theta x}$ при любом фиксированном x есть ограниченная величина. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всяком x. А потому функция e^x разлагается в бесконечный сходящийся ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + \ldots, \qquad (34)$$

представляющий эту функцию при всяком конечном x. Полагая в равенстве (34) $x=1$, получим разложение в ряд основания неперовых логарифмов — числа e:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)} + \ldots$$

(ср. т. I, стр. 371).

2. Возьмём функцию $f(x)=\sin x$. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
& & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right), & f'(0) &= 1,\\
f''(x) &= \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right), & f''(0) &= 0,\\
f'''(x) &= \cos\left(x+2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+3\cdot\tfrac{\pi}{2}\right), & f'''(0) &= -1,\\
f^{IV}(x) &= \cos\left(x+3\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+4\cdot\tfrac{\pi}{2}\right), & f^{IV}(0) &= 0,\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
f^{(n)}(x) &= \cos\left(x+(n-1)\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+n\cdot\tfrac{\pi}{2}\right), & & \\
& & f^{(n)}(\theta x) &= \sin\left(\tfrac{n\cdot\pi}{2}+\theta x\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Мы видим, что рассматриваемая функция и все её производные чётного порядка при $x=0$ обращаются в нуль, а производные нечётного порядка принимают попеременно значения $+1$ и -1. Таким

образом, подставляя значения (35) в формулу Маклорена, получим разложение $\sin x$ по нечётным степеням аргумента:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{1\cdot 2\cdot 3\dots(2m-1)} + R_n(x),$$

где $n = 2m$ и R_n в форме Лагранжа имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\sin\left(n\frac{\pi}{2} + \theta x\right).$$

Первый множитель в этом выражении, как мы уже видели, стремится к нулю при всяком x, второй же множитель $\sin\left(n\frac{\pi}{2} + \theta x\right)$ по абсолютной величине не превосходит единицы, а потому при любом значении x имеем $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Следовательно, $\sin x$ при любом x разлагается в бесконечный ряд:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dots \qquad (36)$$

3. Возьмём функцию $f(x) = \cos x$. Поступая подобно предыдущему, найдём: $f^{(k)}(x) = \cos\left(k\cdot\frac{\pi}{2} + x\right)$. При $x = 0$ обращаются в нуль все производные нечётного порядка, а производные чётного порядка равны попеременно $+1$ и -1. Формула Маклорена даёт:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{1\cdot 2\cdot 3\dots 2m} + R_n(x),$$

где $n = 2m$. Взяв опять $R_n(x)$ в форме Лагранжа, получим:

$$R_n = \frac{x^{2m+1}}{1\cdot 2\dots(2m+1)}\cos\left(n\frac{\pi}{2} + \theta x\right).$$

Повторяя рассуждения, проведённые при разложении $\sin x$, найдём: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при всяком x, а потому $\cos x$ разлагается в бесконечный ряд:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dots \qquad (37)$$

при любом x.

Заметим, что тот же ряд (37) можно было бы получить на основании свойств степенного ряда (§ 5) простым дифференцированием ряда (36).

4. Применим формулу Маклорена к функции $\ln(1+x)$. Вычисляя производные, получим:

$$f(x)=\ln(1+x),$$
$$f'(x)=\frac{1}{1+x},$$
$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},$$
$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}{(1+x)^n}.$$

Беря значения $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(n-1)}(x)$ при $x=0$, заменяя в выражении $f^{(n)}(x)$ x через θx и внося полученные значения в формулу Маклорена, найдём:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}+R_n(x). \qquad (38)$$

Возьмём остаточный член $R_n(x)$ в форме Коши:

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^n(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^n}. \qquad (39)$$

Посмотрим, как изменяется величина остаточного члена с увеличением n. Мы уже видели, что интервалом сходимости ряда $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$ служит $(-1, +1)$, а потому и остаточный член (39) будем исследовать лишь для значений x, лежащих в этом интервале.

Представим $R_n(x)$ в следующем виде:

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\cdot x^n\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{1+\theta x}. \qquad (40)$$

Если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$. Далее, так как $|x|<1$, то $x>-1$; умножая обе части этого неравенства на положительную дробь θ и прибавляя к обеим частям по 1, получим $1+\theta x>1-\theta$, следовательно, $\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$ и тем более $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}<1$. Последний множитель выражения (40) $\frac{1}{1+\theta x}$, изменяясь с возрастанием n, всегда остаётся меньше некоторого постоянного числа, а именно $\frac{1}{1+\theta x}<\frac{1}{1-|x|}$. Отсюда следует, что остаточный член (40) стремится к нулю при всяком x, для которого $|x|<1$.

Таким образом $\ln(1+x)$ разлагается в бесконечный ряд:

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots \qquad (41)$$

при $|x|<1$. Этот ряд представляет функцию $\ln(1+x)$ внутри интервала $(-1, +1)$.

Исследуем сходимость ряда на границах интервала $(-1, +1)$.

При $x=-1$ ряд (41) принимает вид

$$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots$$

и представляет, следовательно, гармонический ряд, который, как мы видели (§ 2 гл. IX), расходится.

При $x=1$ ряд (41) принимает вид

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

и по теореме Лейбница сходится. Однако представление остаточного члена $R_n(x)$ формулы (38) в форме Коши не может дать ответа на вопрос о справедливости равенства (41) при $x=1$ [1]). Возьмём теперь остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

Полагая здесь $x=1$, получаем:

$$|R_n(1)|\leqslant\frac{1}{n}.$$

Это и показывает, что равенство (41) остаётся в силе и при $x=1$, т. е.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2\ ^{2}). \qquad (41')$$

5. Пусть $f(x)=(1+x)^m$, где m — любое действительное число.

---

[1]) Действительно, формула (40) при $x=1$ принимает вид

$$R_n(1)=(-1)^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{n-1}\frac{1}{1+\theta}. \qquad (40')$$

Если бы θ было постоянным, то это выражение стремилось бы к нулю, ибо $\theta<1$ (и >0). Однако на самом деле θ зависит от n. А так как закон этой зависимости нам неизвестен, то мы и не можем из формулы (40′) заключить, что $R_n(1)\to 0$.

[2]) Другое доказательство равенства (41′) было дано на стр. 338.

Вычисляя производные этой функции, найдём:

$$f(x) = (1+x)^m,$$
$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}.$$

Положив во всех этих равенствах, кроме последнего, $x=0$, а в последнем заменив x через θx, и подставив найденные значения в формулу Маклорена, получим:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)}x^n + R_n(x), \qquad (42)$$

где остаточный член опять возьмём в форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}(1+\theta x)^{m-1}. \qquad (43)$$

Заметим, что ряд

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots, \qquad (44)$$

как легко убедиться, применяя признак Даламбера, имеет интервалом сходимости $(-1, +1)$; поэтому, исследуя остаточный член (43), будем предполагать $|x|<1$.

В выражении (43) множитель

$$\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)}x^n$$

есть как раз общий член сходящегося ряда (44) и, следовательно, стремится к нулю с возрастанием n. Второй множитель $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$, как мы уже видели, остаётся всегда меньше единицы. Наконец, последний множитель $(1+\theta x)^{m-1}$ при любом n остаётся меньше некоторого постоянного числа. Действительно,

если $m>1$, то $(1+\theta x)^{m-1} < 2^{m-1}$;
если $m<1$, то $(1+\theta x)^{m-1} < (1-|x|)^{m-1}$.

Следовательно, $R_n(x)$ с увеличением n стремится к нулю при всяком x, если только $|x|<1$.

Таким образом, $(1+x)^m$ для всякого m разлагается при $|x|<1$ в бесконечный ряд:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \dots \qquad (45)$$

Более подробное исследование показало бы нам, что при $x=1$ разложение сохраняет силу в том случае, когда $m>-1$, при $x=-1$ разложение остаётся в силе, если $m>0$.

Наконец, при $|x|>1$ разложение вовсе не имеет места, так как соответствующий ряд (45) при этом расходится.

§ 9. Косвенные приёмы разложения некоторых функций в степенной ряд.

Выше был изложен общий метод разложения функций в степенной ряд. В отдельных случаях удаётся избежать применения этого общего метода и получить искомое разложение более коротким путём, основываясь на общих свойствах степенных рядов. Именно, если найдено разложение в ряд какой-либо функции, то, основываясь на свойствах дифференцируемости и интегрируемости степенного ряда внутри интервала его сходимости, можно получить путём дифференцирования или интегрирования данного ряда разложение в ряд производной от данной функции или её первообразной функции. Так, мы уже отмечали выше, что ряд для $\cos x$ мог быть получен простым дифференцированием ряда, представляющего $\sin x$.

В некоторых случаях при разложении в ряд данной функции бывает легче найти разложение в ряд её производной. В таком случае, найдя это разложение и затем проинтегрировав найденный ряд, можно получить искомое разложение данной функции. Именно этим приёмом мы пояучили разложение функции $f(x)=\ln(1+x)$ в конце § 5. Рассмотрим ещё два примера этого рода.

1. Возьмём функцию

$$f(x)=\operatorname{arctg} x.$$

Её производная

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

представляет сумму бесконечной прогрессии со знаменателем $-x^2$, сходящейся при $|x|<1$:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots \qquad (46)$$

Таким образом, производная данной функции разлагается в ряд непосредственно по формуле (46). Чтобы получить теперь разложение в ряд функции $\operatorname{arctg} x$, достаточно проинтегрировать равенство (46) в пределах от 0 до x, где $|x|<1$:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x (1-x^2+x^4-x^6+\ldots)\,dx.$$

Выполняя интеграцию, получим искомое разложение в ряд функции $\operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (47)$$

Ряд в правой части равенства (47) представляет функцию arctg в интервале $(-1, +1)$.

Исследуем сходимость ряда на границах этого интервала. При $x = 1$ ряд принимает вид

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

По теореме Лейбница он сходится. Покажем, что равенство (47) остаётся справедливым и при $x = 1$. Действительно, интегрируя тождество

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{1+x^2}$$

в пределах от 0 до 1, получаем:

$$\operatorname{arctg} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx,$$

и так как

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \right| < \int_0^1 x^{2n}\, dx = \frac{1}{2n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то действительно получаем:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Так как в обеих частях равенства (47) стоят нечётные функции и это равенство, по только что доказанному, справедливо при $x = 1$, то оно справедливо и при $x = -1$.

2. Возьмём функцию

$$f(x) = \arcsin x.$$

Её производная

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Представим эту производную в форме

$$f'(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Сравнивая это выражение с биномом $(1+x)^m$, разложенным в ряд по формуле (45), легко заметить, что разложение в ряд функции $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ можно получить из формулы (45), полагая в ней $m=-\frac{1}{2}$ и заменяя x через $-x^2$. Выполнив эту замену, получим

$$f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2}x^4+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}x^6+\ldots \quad (48)$$

В силу сказанного при разложении в ряд бинома $(1+x)^m$, ряд (48) сходится при $|x|<1$ и представляет функцию $f'(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ в интервале $(-1, +1)$. Проинтегрируем равенство (48) в пределах от 0 до x, где $|x|<1$:

$$f(x)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot 2}x^4+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}x^6+\ldots\right)dx.$$

Выполняя интегрирования, находим разложение в степенной ряд функции $\arcsin x$:

$$f(x)=\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7}+\ldots$$

в интервале $(-1, +1)$.

§ 10. Ряды Тэйлора и Маклорена для функций нескольких переменных.

Возьмём функцию двух переменных $F(x, y)$. Формула Тэйлора имеет целью дать разложение функции $F(x+h, y+k)$ по степеням h и k.

Составим новую функцию аргумента t следующим образом: $\Phi(t)=F(x+ht, y+kt)$, и разложим её по формуле Маклорена:

$$\Phi(t)=\Phi(0)+\frac{t}{1}\Phi'(0)+\frac{t^2}{1\cdot 2}\Phi''(0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\Phi^{(n-1)}(0)+\frac{t^n}{n!}\Phi^{(n)}(\theta t). \quad (49)$$

Вычислим последовательные производные функции $\Phi(t)$. С этой целью введём временно обозначения: $x+ht=u$, $y+kt=v$. Тогда

$\Phi(t)$ будет сложной функцией аргумента t, зависящей от него при посредстве двух переменных u и v, и производную $\Phi'(t)$ найдём по формуле производной сложной функции (стр. 144):

$$\Phi'(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

Но $\frac{du}{dt} = h$, $\frac{dv}{dt} = k$; кроме того, так как u и v суть в то же время функции от x и y, причём $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ и $\frac{\partial v}{\partial y} = 1$, то мы можем рассматривать $\Phi(t)$ и как функцию x и y и, очевидно, имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2}, \ldots$$

и вообще

$$\frac{\partial^{m+n}\Phi}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{\partial^{m+n}\Phi}{\partial u^m \partial v^n}.$$

Следовательно:

$$\Phi'(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}h + \frac{\partial \Phi}{\partial y}k.$$

Подобным же образом найдём:

$$\Phi''(t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}hk + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}k^2,$$

$$\Phi'''(t) = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}h^3 + 3\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2\, \partial y}h^2k + 3\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x\, \partial y^2}hk^2 + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}k^3,$$

. . . . . .

Полагая в этих равенствах $t = 0$ и замечая, что при $t = 0$ функция $\Phi(t)$ делается равной данной функции $F(x, y)$, имеем:

$$\Phi'(0) = \frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k,$$

$$\Phi''(0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}k^2,$$

. . . . . .

Пользуясь обозначениями, введёнными на стр. 162, мы можем эти производные представить в следующей символической форме:

$$\Phi^{(i)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^i F(x, y) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (50)$$

Подставляя (50) в (49), получим:

$$F(x+ht,\ y+kt)=F(x,\ y)+\frac{t}{1}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)F(x,\ y)+$$
$$+\frac{t^2}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2F(x,\ y)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n-1}F(x,\ y)+$$
$$+\frac{t^n}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^nF(x+\theta ht,\ y+\theta kt).$$

При $t=1$ получаем формулу Тэйлора, дающую разложение функции $F(x+h,\ y+k)$ по степеням h и k:

$$F(x+h,\ y+k)=F(x,\ y)+\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)F(x,\ y)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2F(x,\ y)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n-1}F(x,\ y)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^nF(x+\theta h,\ y+\theta k).\qquad(51)$$

Если в (51) положить $x=y=0$, то получим формулу Маклорена:

$$F(h,\ k)=F(0,\ 0)+\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)F(0,\ 0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2F(0,\ 0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n-1}F(0,\ 0)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k\right)^2F(\theta h,\ \theta k).$$

Заменяя h и k через x и y, получим:

$$F(x,\ y)=F(0,\ 0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)F(0,\ 0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2F(0,\ 0)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(n-1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}F(0,\ 0)+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^nF(\theta x,\ \theta y).\qquad(52)$$

Формула Маклорена (52) даёт таким образом разложение функции $F(x,\ y)$ по степеням x и y.

Если функция $F(x, y)$ допускает неограниченное дифференцирование в некоторой области изменения переменных x и y, то в формуле (51) можно увеличивать n беспредельно, и если при этом остаточный член

$$\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n F(x+\theta h,\ y+\theta k)$$

будет стремиться к нулю, то можно перейти к пределу при $n\to\infty$ и получить таким образом ряд Тэйлора, представляющий $F(x+h,\ y+k)$ в виде бесконечного ряда по степеням h и k:

$$F(x+h,\ y+k)=F(x,\ y)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)F(x,y)+\ldots \quad (53)$$

Такой же предельный переход в (52) даёт ряд Маклорена:

$$F(x,\ y)=F(0,\ 0)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)F(0,\ 0)+\ldots, \quad (54)$$

представляющий разложение функции $F(x, y)$ в бесконечный ряд по степеням x и y.

Разложения (51), (52), (53) и (54), очевидно, могут быть непосредственно распространены на функции любого числа переменных.

Пример 1. Разложить $\sin(x+y)$ в ряд по степеням x и y.
Имеем:

$$F(x,y)=\sin(x+y),\ \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\cos(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=-\sin(x+y),\ldots$$

и (54) даёт:

$$\sin(x+y)=x+y-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+\ldots;$$

очевидно, то же можно получить, заменяя $x+y$ через z и разлагая $\sin z$ в ряд по степеням z.

Пример 2. Разложить в ряд $F(x,y)=\dfrac{1}{(x-1)(y-1)}$.

Легко видеть, что $\dfrac{\partial^{m+n}F(x,\ y)}{\partial x^m\partial y^n}=(-1)^{m+n}\dfrac{m!n!}{(x-1)^{m+1}(y-1)^{n+1}}$,

и (54) даёт:

$$\frac{1}{(x-1)(y-1)}=1+x+y+x^2+xy+y^2+\ldots$$

§ 11. Ряды Фурье.

Мы решали задачу представления данной функции степенным рядом. Эта задача является простейшим случаем более общей задачи представления функции бесконечным рядом, членами которого служили бы функции заданного типа.

При представлении функции степенным рядом членами ряда являются степени аргумента с соответственными коэффициентами; другим столь же важным видом разложения в ряд является разложение по тригонометрическим функциям, именно, по синусам и косинусам дуг, кратных аргументу. Ряд вида

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$
$$\ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \qquad (55)$$

носит название *тригонометрического ряда*. Ввиду особых свойств тригонометрических рядов представление функции в виде такого ряда является особо важной задачей анализа.

Как будет показано ниже, тригонометрическими рядами можно представить значительно более широкий класс функций, чем рядами степенными. Кроме того, представление функции тригонометрическим рядом бывает особенно полезно при решении многих вопросов прикладных наук и, в частности, при решении ряда задач теоретической физики.

Задача представления данной функции в виде тригонометрического ряда сводится к нахождению тех значений коэффициентов a_n, b_n ряда (55), при которых этот ряд представляет данную функцию. При этом следует заметить, что сумма ряда (55) в случае его сходимости является периодической функцией аргумента x с периодом 2π, так как все его члены — периодические функции с периодом 2π. Поэтому, если данная функция — не периодическая, или имеет период, отличный от 2π, то ряд (55) может представлять эту функцию лишь в интервале длиной 2π, например, в интервале $(-\pi, +\pi)$. За пределами же этого интервала ряд (55) будет повторять те значения, которые он имел внутри интервала, тогда как данная функция за пределами интервала может иметь совершенно иные значения. Таким образом, ряд (55) всегда будет представлять периодическую функцию, совпадающую с данной лишь в одном из интервалов длиной 2π (если данная функция сама не имеет периода 2π). Этим самым исключается возможность представления данной непериодической функции тригонометрическим рядом, сумма которого совпадала бы с данной функцией при всех значениях аргумента, при которых функция определена, — случай, вполне возможный при разложении функций в степенной ряд и имевший место при разложении в ряд функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ и др.

С другой стороны, при разложении функции в степенной ряд эта функция должна удовлетворять целому ряду ограничительных условий, которые не имеют места при разложении в тригонометрический ряд.

В самом деле, степенной ряд, как было показано (стр. 335 и сл.), сходится равномерно в любом замкнутом интервале, лежащем внутри интервала его сходимости; его можно дифференцировать почленно,

причём в результате получается ряд с тем же интервалом сходимости и сумма нового ряда есть производная от суммы первоначального. Это дифференцирование, очевидно, можно повторить неограниченное число раз. Отсюда следует, что функция, представляемая степенным рядом в интервале его сходимости, непрерывна и бесконечно дифференцируема во всех точках внутри этого интервала. Эти ограничения оказываются излишними при разложении функций в тригонометрический ряд.

Приведём условия, достаточные для того, чтобы данную функцию можно было в каком-либо интервале длиной 2π представить тригонометрическим рядом (55); эти условия были найдены Дирихле и носят поэтому название условий Дирихле.

Они состоят в следующем.

Функцию $f(x)$ в каком-либо интервале (a, b) длиной 2π можно представить в виде тригонометрического ряда, если:

1° *в* ***замкнутом*** *интервале* (a, b), *где* $b-a=2\pi$, *данная функция* $f(x)$ *ограничена*;

2° *в замкнутом интервале* (a, b) *данная функция* $f(x)$ *имеет* ***конечное*** *число максимумов и минимумов*;

3° *функция* $f(x)$ *непрерывна во всех точках замкнутого интервала* (a, b) *кроме, может быть, конечного числа его точек.*

При этом, в силу условий 1° и 2°, если x_i — точка разрыва, то существуют пределы выражений $f(x_i+\varepsilon)$ и $f(x_i-\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$. В самом деле, в силу условия 2°, интервал (a, b) можно разбить на конечное число подинтервалов, в каждом из которых функция $f(x)$ меняется монотонно. Точка x_i будет лежать в одном из таких интервалов или на его границе. В обоих случаях в интервалах $(x_i-\varepsilon, x_i)$ и $(x_i, x_i+\varepsilon)$ функция $f(x)$ изменяется монотонно и в силу условия 1° и теоремы о пределе монотонно изменяющейся величины (т. I, стр. 247) существуют $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x_i-\varepsilon)$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x_i+\varepsilon)$. Следуя Дирихле, обозначим их соответственно через $f(x_i-0)$ и $f(x_i+0)$.

При выполнении условий 1°, 2°, 3° для данной функции $f(x)$ существуют такие значения коэффициентов a_n и b_n в ряде (55), при которых этот ряд сходится и сумма его в каждой точке интервала (a, b), где функция $f(x)$ непрерывна, совпадает со значением функции $f(x)$ в этой точке, а в каждой точке x_i разрыва функции $f(x)$ равна величине

$$\frac{f(x_i+0)+f(x_i-0)}{2};$$

на концах интервала (a, b) сумма ряда (55) даёт одну и ту же величину

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Если тригонометрический ряд (55) *сходится в каком-либо интервале и представляет в этом интервале некоторую функ-*

цию $f(x)$, то почленное интегрирование его даёт новый тригонометрический ряд, сходящийся в том же интервале и представляющий в этом интервале функцию, первообразную для функции, представляемой первоначальным рядом.

Доказательство всех приведённых выше утверждений выходит за рамки настоящей книги. Мы примем их без доказательства и будем на них опираться в дальнейшем.

Рассматривая условия Дирихле, нетрудно заметить, что они охватывают значительно более широкий класс функций, чем класс функций, разлагаемых в степенной ряд.

В самом деле, функция, разлагаемая в степенной ряд в каком-либо интервале, не только непрерывна, но и бесконечна дифференцируема в этом интервале, в то время как функция, удовлетворяющая условиям Дирихле в интервале (a, b), допускает разрывы и может быть вовсе недифференцируема в бесконечном множестве точек этого интервала.

Приступая к разложению функций в тригонометрический ряд, фиксируем интервал (a, b), именно, будем искать разложения функции в интервале $(-\pi, +\pi)$.

Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условиям Дирихле. В силу сказанного, существуют такие значения коэффициентов a_n и b_n, при которых

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$
$$\ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \qquad (56)$$

во всех точках интервала (a, b), где функция $f(x)$ непрерывна. Для определения величины коэффициентов a_n, b_n, соответствующих заданной функции $f(x)$, Эйлер предложил следующий метод. Умножим обе части равенства (56) на $\cos mx$, где m — целое положительное число, и проинтегрируем это равенство в пределах от $-\pi$ до $+\pi$[1]):

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\, dx +$$
$$+ a_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos x \cos mx\, dx + b_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin x \cos mx\, dx + \ldots$$
$$\ldots + a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos mx\, dx + \ldots \qquad (57)$$

[1]) Законность почленного интегрирования ряда (56) требует обоснования, поскольку этот ряд может сходиться неравномерно (например, когда $f(x)$ имеет точки разрыва). Как уже указывалось выше, такое обоснование выходит за рамки этой книги.

Найдём величины интегралов правой части. Имеем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx\, dx = \left[\frac{\sin mx}{m}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0.$$

Если $m \neq n$, то

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0.$$

Если же $m = n$, то будем иметь

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx\, dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1+\cos 2mx}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2mx}{2m}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \pi.$$

Далее, при $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+m)x}{n+m} + \frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$

и при $m = n$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \sin mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2mx\, dx = 0.$$

Таким образом, равенство (57) приводится к следующему:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx\, dx = a_m \pi,$$

откуда

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos mx\, dx. \qquad (58)$$

Давая в этом равенстве индексу m последовательно значения 1, 2, 3, ..., получим значения коэффициентов a_1, a_2, a_3, ... Для определения коэффициентов b_1, b_2, b_3, ..., умножим равенство (56) на $\sin mx$, где m — целое положительное число, и проинтегрируем его

в пределах от $-\pi$ до $+\pi$. Выполнив интеграцию, мы совершенно так же, как и выше, найдём:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx\, dx = b_m \pi,$$

откуда

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin mx\, dx. \tag{59}$$

Остаётся определить коэффициент a_0. Для этой цели проинтегрируем равенство (56) в пределах от $-\pi$ до $+\pi$:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} dx + a_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos x\, dx + b_1 \int_{-\pi}^{+\pi} \sin x\, dx + \ldots$$

Первый интеграл правой части даст

$$a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi a_0;$$

все же остальные интегралы, очевидно, будут равны нулю. Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx = 2\pi a_0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx. \tag{60}$$

Формулы (58), (59) и (60) определяют коэффициенты ряда (56), представляющего данную функцию $f(x)$. Ряд (56), в котором коэффициенты выражаются формулами (58), (59) и (60), называют *рядом Фурье* функции $f(x)$.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, +\pi)$ функцию

$$f(x) = \frac{x}{2}.$$

По формулам (58), (59) и (60) находим:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{\pi}\, dx, \quad a_m = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{2} \cos mx\, dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{\pi} \sin mx\, dx.$$

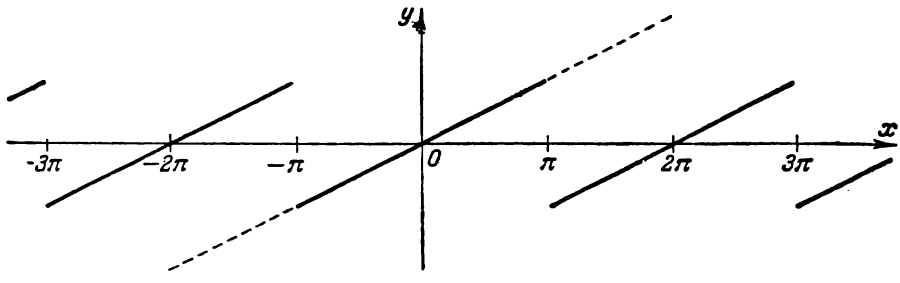
Произведя вычисления этих интегралов, получим:

$$a_0 = 0, \quad a_m = 0, \quad b_m = (-1)^{m-1} \cdot \frac{1}{m}.$$

Таким образом, находим искомое разложение:

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots \qquad (61)$$

Ряд (61) сходится при всех значениях x и представляет периодическую функцию с периодом 2π, причём во всех внутренних точках интервала $(-\pi, +\pi)$ значение суммы ряда (61) совпадает со значением функции $\frac{x}{2}$. За пределами интервала $(-\pi, +\pi)$ ряд (61) повторяет значения функции $\frac{x}{2}$, которые она имела внутри этого интервала. При $x = \pm\pi$ сумма ряда (61) равна нулю.



Черт. 68.

График функции, представляемой рядом (61), изображён на черт. 68, причём пунктиром изображена остальная часть графика функции $\frac{x}{2}$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, +\pi)$ функцию $f(x) = \frac{x^2}{4}$.

Определим коэффициенты разложения по формулам (58), (59) и (60). При $m > 0$ имеем:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x^2}{4}\cos mx\,dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x^2}{4}\sin mx\,dx.$$

Оба интеграла легко вычисляются двукратным применением метода интеграции по частям. Выполнив вычисления, найдём:

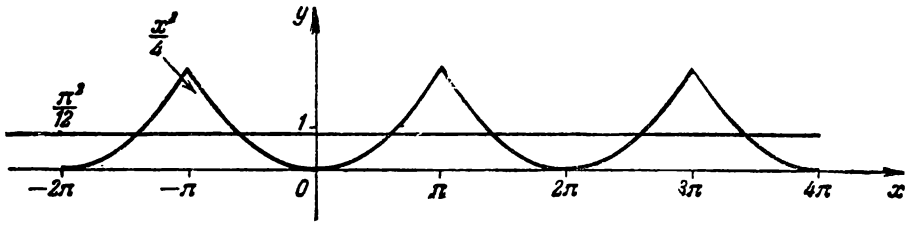
$$a_m = \frac{(-1)^m}{m^2}, \quad b_m = 0.$$

По формуле (60) находим величину a_0:

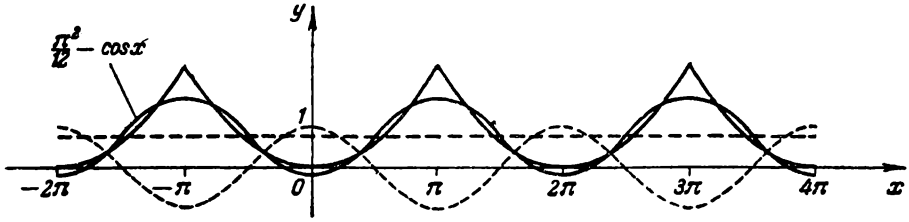
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{12}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Таким образом,

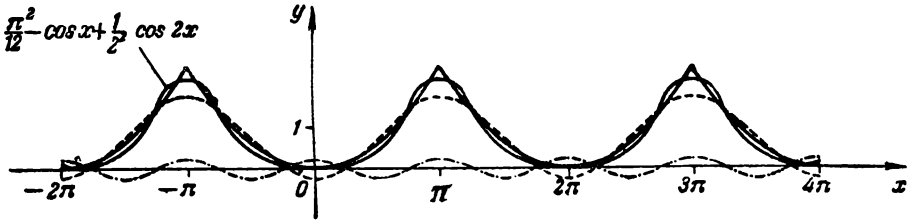
$$\frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots \qquad (62)$$



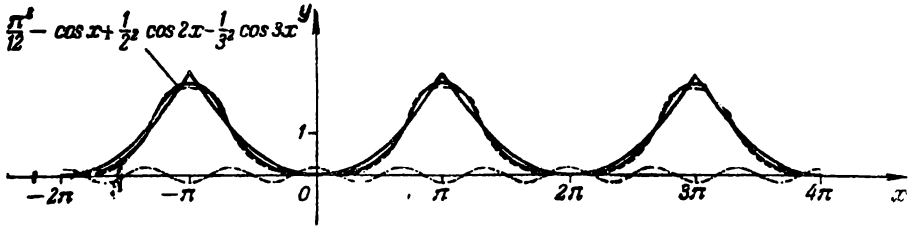
Черт. 69.



Черт. 70.



Черт. 71.



Черт. 72.

(На черт. 69—72 показаны графики функции $\frac{x^2}{4}$ и её приближений. На черт. 69 — график первого слагаемого разложения: $y_1 = \frac{\pi^2}{12}$; на черт. 70 — график суммы первых двух слагаемых: $y_2 = \frac{\pi^2}{12} - \cos x$; на черт. 71 — график суммы трёх слагаемых: $y_3 = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x$; на черт. 72 — график суммы первых четырёх слагаемых: $y_4 = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x$.)

То же разложение можно получить короче, интегрированием ряда (61). В самом деле, интегрируя равенство (61), получим:

$$\frac{x^2}{4} = -\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots + C,$$

где C — постоянная интеграции — является первым членом ряда Фурье, т. е. совпадает с a_0. Его можно определить по формуле (60), как это и сделано выше.

Ряды Фурье для чётных и нечётных функций. Отметим частные случаи разложения в ряд Фурье. Пусть данная функция $f(x)$ обладает тем свойством, что

$$f(-x) = -f(x).$$

Функцию называют в этом случае *нечётной*. Для такой функции все коэффициенты a_m ряда Фурье обращаются в нуль. В самом деле,

$$a_m = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos mx\,dx + \int_{0}^{+\pi} f(x)\cos mx\,dx.$$

Произведём в первом из этих интегралов замену переменного, положив

$$x = -z,$$

откуда

$$dx = -dz.$$

Тогда

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos mx\,dx = -\int_{+\pi}^{0} f(-z)\cos(-mz)\,dz =$$

$$= +\int_{+\pi}^{0} f(z)\cos mz\,dz = -\int_{0}^{+\pi} f(z)\cos mz\,dz.$$

Подставив это в выражение для a_m, получим

$$a_m = -\int_{0}^{\pi} f(z)\cos mz\,dz + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = 0.$$

Таким образом, нечётная функция разлагается в интервале $(-\pi, +\pi)$ в ряд Фурье по синусам кратных аргументов. Примером такого разложения может служить первый из приведённых выше примеров. Вычисление коэффициентов b_m может быть в этом случае упрощено. В самом деле,

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin mx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx.$$

Заменив в первом из этих интегралов x через $-z$, будем иметь

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin mx\,dx = \int_{+\pi}^{0} f(z)\sin(-mz)\,dz = \int_{0}^{+\pi} f(z)\sin mz\,dz.$$

Следовательно,

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx. \qquad (59')$$

Если функция $f(x)$ такова, что

$$f(-x) = f(x),$$

то её называют *чётной*. В разложении Фурье в этом случае исчезают все коэффициенты b_m. Коэффициенты же a_m вычисляются по формулам

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad (58')$$

и

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx. \qquad (60')$$

В этом можно убедиться, производя совершенно такие же вычисления, как те, которые мы выполнили для случая нечётной функции. Таким образом, чётная функция разлагается в интервале $(-\pi, +\pi)$ в ряд Фурье по косинусам дуг, кратных аргументу.

В общем случае, когда функция $f(x)$ не удовлетворяет ни одному из равенств

$$f(-x) = -f(x) \text{ и } f(-x) = f(x),$$

её разложение в ряд Фурье содержит члены обоих видов $a_n\cos nx$ и $b_n\sin nx$. Но следует заметить, что если ограничиться разложением

лишь в интервале от 0 до π, то можно любую функцию, разложимую в ряд Фурье, разложить или только по синусам, или только по косинусам. В самом деле, пусть дана какая-либо функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле. Чтобы получить для неё разложение по синусам в интервале $(0, \pi)$, составим новую функцию $F(x)$, определив её следующим образом:

$$F(x) = f(x) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$F(x) = -f(-x) \text{ при } -\pi \leqslant x < 0.$$

Функция $F(x)$, очевидно, удовлетворяет условиям Дирихле, если им удовлетворяет $f(x)$; следовательно, функция $F(x)$ разложима в ряд Фурье. Далее, $F(x)$ — функция нечётная, так как при $x > 0$

$$F(-x) = -f(x) = -F(x),$$

при $x < 0$

$$F(-x) = f(-x) = -F(x).$$

Следовательно, $F(x)$ разлагается в ряд Фурье по синусам дуг, кратных аргументу. Выполнив это разложение, мы получим ряд Фурье, сумма которого во всех точках внутри интервала $(0, \pi)$ совпадает со значениями данной функции $f(x)$ в этих точках.

Точно так же, чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье в интервале $(0, \pi)$ по косинусам, мы составляем новую функцию, полагая

$$F(x) = f(x) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

и

$$F(x) = f(-x) \text{ при } -\pi \leqslant x \leqslant 0.$$

В этом случае $F(x)$ — функция чётная и, следовательно, разлагается в ряд Фурье по косинусам дуг, кратных аргументу. Внутри интервала $(0, \pi)$ это разложение представляет данную функцию $f(x)$.

Пример. Разложить в интервале $(0, \pi)$ функцию $\frac{x}{2}$ в ряд по косинусам дуг, кратных аргументу.

Мы уже имели разложение этой функции в интервале $(-\pi, +\pi)$, причём разложение происходило по синусам дуг, кратных аргументу. Чтобы получить разложение той же функции в интервале $(0, \pi)$ по косинусам, составим функцию $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\frac{x}{2} \text{ при } -\pi \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Иными словами, положим $F(x) = \left|\frac{x}{2}\right|$ при $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

Разложим теперь функцию $F(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, +\pi)$. По формуле (58′),

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\cos mx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos mx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x\sin mx}{m}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\sin mx\,dx\right\} = \left[\frac{\cos mx}{\pi m^2}\right]_0^{\pi} = \frac{\cos m\pi - 1}{\pi m^2}.$$

Если m — число чётное, то $\cos m\pi = 1$, следовательно, $a_m = 0$; если m — нечётное, то $\cos m\pi = -1$ и, следовательно, $a_m = \frac{-2}{\pi m^2}$. Далее, $b_m = 0$ при всяком m, так как $F(x)$ — функция чётная. Наконец, по формуле (60′):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, искомое разложение функции $\frac{x}{2}$ в интервале $(0, \pi)$ имеет вид

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right).$$

Разложение функции в тригонометрический ряд в интервале $(-l, +l)$. От данного выше разложения в ряд Фурье в интервале $(-\pi, +\pi)$ можно перейти к разложению по синусам и косинусам в интервале $(-l, +l)$ произвольной длины $2l$. В самом деле, пусть дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле в замкнутом интервале $(-l, +l)$. Произведём замену переменного x, полагая

$$x = \frac{lz}{\pi}. \tag{63}$$

Мы будем иметь

$$f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right).$$

Последнее выражение есть некоторая функция аргумента z. Обозначим её через $F(z)$:

$$F(z) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right).$$

Из формулы (63) следует, что когда x меняется в пределах от $-l$ до $+l$, z меняется монотонно от $-\pi$ до $+\pi$. Функция $F(z)$ в замкнутом интервале $(-\pi, +\pi)$ удовлетворяет условиям Дирихле и, следовательно, разложима в этом интервале в ряд Фурье:

$$F(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz + b_n\sin nz), \tag{64}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(z)\,dz,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(z)\cos nz\,dz, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(z)\sin nz\,dz.$$

Преобразуем переменное во всех этих интегралах, полагая

$$z = \frac{\pi x}{l},$$

откуда

$$dz = \frac{\pi\,dx}{l}.$$

Тогда

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(z)\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{+l} F\left(\frac{\pi x}{l}\right)\frac{\pi\,dx}{l}.$$

Но из равенства

$$F(z) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$$

находим

$$F\left(\frac{\pi x}{l}\right) = f\left(\frac{l\cdot\frac{\pi x}{l}}{\pi}\right) = f(x),$$

а потому

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} f(x)\,dx; \tag{60''}$$

далее,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(z)\cos nz\,dz = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{+l} F\left(\frac{\pi x}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\frac{\pi\,dx}{l},$$

или

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{58''}$$

Совершенно так же получим

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{59''}$$

Произведём в равенстве (64) ту же замену переменного $z = \frac{\pi x}{l}$. Замечая, что

$$F\left(\frac{\pi x}{l}\right) = f(x),$$

будем иметь:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (65)$$

Формула (65) даёт искомое разложение функции $f(x)$ по синусам и косинусам дуг, кратных $\frac{\pi x}{l}$, причём это разложение, очевидно, имеет силу в интервале $(-l, +l)$.

Если требуется получить разложение функции лишь в интервале $(0, l)$, то, дополняя эту функцию в интервале $(-l, 0)$ до чётной или нечётной, можно получить её разложение в интервале $(0, l)$ или только по косинусам, или только по синусам кратных дуг.

Пример. Разложим функцию $f(x) = \frac{x}{2}$ в ряд Фурье в произвольном интервале $(-l, +l)$. Вычисляя коэффициенты по общим формулам, будем иметь

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} \frac{x}{2}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2l}\left[\frac{lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_{-l}^{+l} - \frac{1}{2n\pi}\int_{-l}^{+l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} \frac{x}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{1}{2l}\left[\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_{-l}^{+l} + \frac{1}{2n\pi}\int_{-l}^{+l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{l}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Следовательно, искомое разложение есть

$$\frac{x}{2} = \frac{l}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots\right).$$

§ 12. Неопределённые выражения.

Данные выше представления функций по формуле Тэйлора и разложение функций в ряды с успехом могут быть приложены к вычислению некоторых пределов для тех случаев, когда обычные способы вычислений пределов оказываются неприменимыми. Это будет, например, в том случае, когда отыскивается предел дроби, причём числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю или оба беспредельно возрастают. То же представится: при отыскании предела произведения, когда один из множителей стремится к нулю, а другой беспредельно растёт; при вычислении предела разности, когда

уменьшаемое и вычитаемое одновременно беспредельно растут; при вычислении предела степени, когда основание и показатель одновременно стремятся к нулю или основание беспредельно растёт, а показатель стремится к нулю, или основание стремится к единице, а показатель беспредельно растёт. Во всех этих случаях мы говорим, что имеем дело с неопределёнными выражениями и обозначаем их, соответственно, символами:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

1. Рассмотрим прежде всего первый случай. Пусть данная функция $F(x)$ представляется в виде дроби: $F(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные функции, имеющие непрерывные производные до n-го порядка для значений x, достаточно близких к a, причём при $x=a$ имеем: $\varphi(a)=0$ и $\psi(a)=0$.

Для отыскания предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ допустим ради общности, что при $x=a$ обращаются в нуль не только сами функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, но и их производные до $(n-1)$-го порядка включительно; из производных же n-го порядка $\varphi^{(n)}(x)$ и $\psi^{(n)}(x)$ хотя бы одна в точке a отлична от нуля. Разлагая функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(a)+\frac{x-a}{1}\varphi'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}\varphi^{(n)}(a+\theta(x-a))}{\psi(a)+\frac{x-a}{1}\psi'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\psi^{(n-1)}(a)+\frac{(x-a)^n}{n!}\psi^{(n)}(a+\theta'(x-a))},$$

откуда в силу условий

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(a)=0,$$
$$\psi(a)=\psi'(a)=\ldots=\psi^{(n-1)}(a)=0$$

найдём

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi^{(n)}(a+\theta(x-a))}{\psi^{(n)}(a+\theta'(x-a))}.$$

В силу непрерывности функций $\varphi^{(n)}(x)$ и $\psi^{(n)}(x)$ будем иметь:

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}. \tag{66}$$

Пример 1. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

Здесь

$$\varphi(x)=1-\cos x;\ \varphi(0)=0;\ \varphi'(0)=0,$$
$$\psi(x)=\sin x;\qquad \psi(0)=0;\ \psi'(0)=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=0.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}.$$

Здесь

$$\varphi(x)=e^x-e^{\sin x};\ \varphi(0)=0;\ \varphi'(0)=0;\ \varphi''(0)=0;\ \varphi'''(0)=1,$$
$$\psi(x)=x-\sin x;\ \psi(0)=0;\ \psi'(0)=0;\ \psi''(0)=0;\ \psi'''(0)=1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=1.$$

Выведенное правило становится неприменимым, когда функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вовсе не имеют производных в точке a, а также в том случае, когда нужно найти предел дроби $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ при беспредельном возрастании x, причём числитель и знаменатель беспредельно убывают.

2. Более удобный способ, применимый и в только что указанных случаях, представляет собой так называемое правило Лопиталя (l'Hospital), основанное на следующей теореме Коши.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две функции, непрерывные в замкнутом интервале (a, b) и имеющие во всех внутренних точках этого интервала конечные производные $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$, причём $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ не обращаются одновременно в нуль нигде внутри интервала (a, b) и $\psi(a)\neq\psi(b)$; тогда существует число ξ внутри интервала (a, b) $(a<\xi<b)$ такое, что имеет место равенство

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

В самом деле, рассмотрим следующую функцию x:

$$F(x)=\varphi(x)[\psi(b)-\psi(a)]-\psi(x)[\varphi(b)-\varphi(a)]+\varphi(b)\psi(a)-\varphi(a)\psi(b).$$

Так как

$$F(a)=0 \text{ и } F(b)=0,$$

то в силу теоремы Ролля имеем

$$F'(\xi)=0, \text{ где } a<\xi<b,$$

или

$$\varphi'(\xi)[\psi(b)-\psi(a)]-\psi'(\xi)[\varphi(b)-\varphi(a)]=0. \tag{67}$$

Но

$$\psi(b)-\psi(a)\neq 0 \text{ и } \psi'(\xi)\neq 0,$$

ибо если $\psi'(\xi)=0$, то в силу первого из этих неравенств и равенства (67) мы имели бы $\varphi'(\xi)=0$, т. е. обе производные $\varphi'(x)$ и

$\psi'(x)$ обращались бы в точке ξ одновременно в нуль, что противоречит условию теоремы. Поэтому из равенства (67) следует

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \tag{67'}$$

что и требовалось доказать.

Применим эту теорему к отысканию предела дроби $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ при $x\to a$, когда $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$.

Полагая $\varphi(a)=\psi(a)=0$, имеем в силу теоремы Коши:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

где ξ лежит между x и a и потому $\lim\limits_{x\to a}\xi=a$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \tag{68}$$

в предположении, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ при произвольном стремлении x к a существует.

Равенство (68) и составляет содержание правила Лопиталя.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0.$$

Заметим, что в правой части равенства (68) ξ есть некоторое число, связанное с x, и при приближении x к a ξ также стремится к a, но по некоторому определённому закону. Если же приближать x к a произвольным образом, то предел выражения $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ может и не существовать, в то время как предел дроби $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ существует.

Возьмём, например, функцию

$$F(x)=\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}.$$

Мы, очевидно, имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left[x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\sin\frac{1}{x}\right]=0.$$

Составим теперь выражение

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x};$$

это выражение при беспредельном убывании x, очевидно, не имеет никакого предела.

Формула (68) имеет более широкое применение, нежели (66), так как она, во-первых, не требует, как мы видели, существования производных $\varphi'(a)$ и $\psi'(a)$ и, во-вторых, она, как легко показать, применима и в том случае, когда x не стремится к конечному числу a, а беспредельно возрастает.

В самом деле, пусть x стремится к ∞. Полагая $x=\frac{1}{y}$, видим, что y стремится к 0, и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{\xi\to 0}\frac{\varphi'\left(\frac{1}{\xi}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)}{\psi'\left(\frac{1}{\xi}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

3. Пусть теперь при беспредельном возрастании x функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ также беспредельно возрастают.

Предположим, что при всех достаточно больших значениях x_1 и x_2 функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши в интервале (x_1, x_2). Тогда

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{\psi(x_2)-\psi(x_1)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)},$$

где $x_1<\xi<x_2$. Отсюда

$$\frac{\varphi(x_2)}{\psi(x_2)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\cdot\frac{1-\frac{\psi(x_1)}{\psi(x_2)}}{1-\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}} \tag{69}$$

Предположим, что предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ существует. Тогда при достаточно большом x_1, а следовательно, и при достаточно большом ξ, дробь $\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$ будет сколь угодно мало отличаться от этого предела. С другой стороны, можно, зафиксировав x_1, выбрать x_2 настолько большим, чтобы дроби $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}$ и $\frac{\psi(x_1)}{\psi(x_2)}$ стали сколь угодно малы и, следовательно, дробь

$$\frac{1-\frac{\psi(x_1)}{\psi(x_2)}}{1-\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)}}$$

сколько угодно мало отличалась от единицы. При таком выборе величин x_1 и x_2 выражение (69) будет сколь угодно мало разниться от предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

Следовательно, если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ и если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при достаточно больших значениях x удовлетворяют условиям теоремы Коши, то существует и предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ и для вычисления его можно применить данное выше правило Лопиталя.

Это же правило применимо и в том случае, когда дробь $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ принимает форму $\frac{\infty}{\infty}$ при конечном значении x.

В самом деле, пусть $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\infty$. Чтобы вычислить $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, полагаем $x=a+\frac{1}{y}$. Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{y\to\infty}\frac{\varphi\left(a+\frac{1}{y}\right)}{\psi\left(a+\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to\infty}\frac{\varphi'\left(a+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{\psi'\left(a+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}.$$

Легко видеть, что установленное здесь правило сохраняет силу и в том случае, когда $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}\to\infty$.

4. Рассмотрим теперь другие виды неопределённых выражений, на которые мы указывали в начале этого параграфа. Легко видеть, что все они приводятся к видам, рассмотренным выше.

а) Пусть

$$F(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x) \text{ и } \lim_{x\to a}\varphi(x)=0, \text{ а } \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty.$$

Имеем:

$$F(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}=\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

и следовательно, при $x=a$ функция $F(x)$ приводится к одному из видов

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty}.$$

б) Пусть

$$F(x)=\varphi(x)-\psi(x),$$

причём

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty \text{ и } \lim_{x\to\infty}\psi(x)=\infty.$$

Мы можем написать:

$$F(x)=\left[\frac{1}{\psi(x)}-\frac{1}{\varphi(x)}\right]:\frac{1}{\varphi(x)\cdot\psi(x)},$$

и при $x=a$ имеем $\frac{0}{0}$.

в) Пусть

$$F(x)=\varphi(x)^{\psi(x)},$$

причём при $x=a$ это выражение принимает один из трёх видов: 0^0, ∞^0, 1^∞.

Мы, очевидно, можем написать:

$$F(x)=e^{\psi(x)\ln\varphi(x)},$$

и во всех трёх случаях выражение $\psi(x)\ln\varphi(x)$ при $x=a$ принимает форму $0\cdot\infty$.

Пример. Найдём

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x}.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\ln\operatorname{tg}x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{-1}=-1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}=\frac{1}{e}.$$

Весьма часто при вычислении пределов рассмотренных выше типов непосредственное разложение функций в ряд быстрее приводит к цели, чем применение данных выше правил.

Найдем, например, предел дроби

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Заменяя $\cos x$ его выражением в виде бесконечного ряда и деля на x^2, получим:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots,$$

а потому

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Найдём ещё $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^m}$, где $m>0$.

Разлагая e^x в ряд, будем иметь:

$$\frac{e^x}{x^m} = x^{-m} + \frac{x^{1-m}}{1} + \frac{x^{2-m}}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-m}}{n!} + \ldots$$

Начиная с некоторого номера n, имеем $n - m > 0$, а потому

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$$

при любом $m > 0$.

Это свойство показательной функции выражают словами: *показательная функция с возрастанием аргумента растёт быстрее всякой положительной степени.*

УПРАЖНЕНИЯ.

I. Разложение функций в ряд.

1. Разложить в ряд по степеням $x - 1$ дробь $\frac{1}{x}$.

Отв. $\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots$; разложение годно для $0 < x < 2$.

2. Разложить в ряд по степеням x дробь $\frac{1}{1+x+x^2}$.

Отв. $\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \ldots$; разложение годно для $|x| < 1$.

3. Разложить в ряд $\sin^2 x$:

а) по формуле Маклорена;

б) замечая, что $\frac{d(\sin^2 x)}{dx} = \sin 2x$, разложить в ряд $\sin 2x$, пользуясь непосредственно рядом для $\sin x$, и полученный ряд проинтегрировать от 0 до x.

Отв. $\sin^2 x = x^2 - 2^3 \frac{x^4}{4!} + 2^5 \frac{x^6}{6!} - \ldots$; разложение годно при всяком x.

4. Вычислить интеграл $\int_a^x \frac{e^x\,dx}{x}$ путём разложения в ряд подинтегральной функции.

Отв. $\int_a^x \frac{e^x\,dx}{x} = \ln\frac{x}{a} + \frac{x-a}{1} + \frac{x^2-a^2}{1\cdot 2\cdot 2} + \frac{x^3-a^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3} + \ldots$

5. Вычислить интегралы $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ и $\int_a^x \frac{\cos x}{x}\,dx$ путём разложения в ряд подинтегральных функций.

Отв. $\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots,$

$$\int_a^x \frac{\cos x}{x}\,dx = \ln\frac{x}{a} - \frac{x^2-a^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4-a^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6-a^6}{6\cdot 6!} + \ldots$$

6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, если $f(x) = +1$ в интервале от 0 до $+\pi$ и $f(x) = -1$ в интервале от $-\pi$ до 0.

Отв. $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$.

7. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, определённую условиями $f(x) = -x$ в интервале от $-\pi$ до 0 и $f(x) = +x$ в интервале от 0 до $+\pi$.

Отв. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$. (Ср. пример на стр. 364—365).

8. Разложить функцию $f(x) = x$ по косинусам в интервале от 0 до π.

Отв. $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$.

II. Неопределённые выражения.

1. $\left[\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}\right]_{x\to 3}$. *Отв.* $\frac{1}{3}$.
2. $\left[\frac{x^2-9x+14}{x^3-8}\right]_{x\to 2}$. *Отв.* $-\frac{5}{12}$.
3. $\left[\frac{x^5-x^4-3x^2+5x-2}{x^3-x^2-x+1}\right]_{x\to 1}$. *Отв.* $\frac{1}{2}$.
4. $\left[\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right]_{x\to 0}$. *Отв.* 1.
5. $\left[\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right]_{x\to 1}$. *Отв.* $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
6. $\left[\frac{x^2\cos x}{\cos x - 1}\right]_{x\to 0}$. *Отв.* 2.
7. $\left[\frac{x-\sin x}{1-\cos x}\right]_{x\to 0}$. *Отв.* 0.
8. $\left[\frac{x-\sin x}{e^x - e^{-x}}\right]_{x\to 0}$. *Отв.* 0.
9. $\left[\frac{x^x - x}{x - 1 - \ln x}\right]_{x\to 1}$. *Отв.* 2.
10. $\left[\frac{\operatorname{ctg} x}{x - \frac{\pi}{2}}\right]_{x\to \frac{\pi}{2}}$. *Отв.* -1.
11. $\left[\frac{\operatorname{tg} 2x}{x - \frac{\pi}{2}}\right]_{x\to \frac{\pi}{2}}$. *Отв.* 2.
12. $\left[\frac{1-(1+x)^n}{\ln(1+x)}\right]_{x\to 0}$. *Отв.* $-n$.
13. $\left[\frac{\ln\cos\frac{\pi x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}\right]_{x\to 1}$. *Отв.* 0.
14. $\left[\frac{\ln x}{x^m}\right]_{x\to\infty}$. *Отв.* 0.
15. $\left[\frac{x - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\sin x}{x^5}\right]_{x\to 0}$. *Отв.* $-\frac{1}{20}$.
16. $\left[(x-3)\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}\right]_{x\to 3}$. *Отв.* $\frac{3}{\pi}$.
17. $\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right]_{x\to 0}$. *Отв.* $\frac{1}{2}$.
18. $[x^n \ln x]_{x\to 0}$. *Отв.* 0.
19. $[x^x]_{x\to 0}$. *Отв.* 1.
20. $[x^{\sin x}]_{x\to 0}$. *Отв.* 1.
21. $\left[\frac{1}{x^{1-x}}\right]_{x\to 1}$. *Отв.* $\frac{1}{e}$.
22. $\left[\frac{1}{x^{1-x^2}}\right]_{x\to 1}$. *Отв.* $\frac{1}{\sqrt{e}}$.
23. $\left[\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^m\right]_{m\to\infty}$. *Отв.* e^α.
24. $\left[\left(\frac{1}{1-e^x}\right)^{\sin x}\right]_{x\to 0}$. *Отв.* 1.

ГЛАВА XI.

ПРИЛОЖЕНИЯ АНАЛИЗА К ГЕОМЕТРИИ.

Попутно с изложением дифференциального и интегрального исчислений мы уже касались некоторых геометрических задач, решаемых аналитическим методом. Так, мы строили касательную к плоской кривой (т. I, стр. 294), находили уравнение касательной плоскости к поверхности (т. II, стр. 156), мы видели, как вычислить длину дуги плоской или пространственной кривой (т. I, стр. 450 и сл.), как определить поверхность и объём какого-либо тела (т. II, стр. 260, 240). В настоящей главе мы рассмотрим некоторые специальные вопросы теории плоских и пространственных кривых.

§ 1. Касательная и нормаль к плоской кривой

1. Геометрическое значение производной $f'(x)$ от данной функции $f(x)$ (т. I, стр. 294) даёт возможность весьма просто решить задачу нахождения касательной к кривой, данной уравнением $y=f(x)$, в данной на ней точке. Мы уже касались этой задачи в связи с другими вопросами анализа. Рассмотрим теперь эту задачу подробнее. Пусть на кривой $y=f(x)$ дана точка (x, y). Уравнение прямой, проходящей через точку (x, y) и не параллельной оси Oy, имеет вид:

$$Y-y=k(X-x),$$

где k — угловой коэффициент этой прямой. Если эта прямая касается кривой

$$y=f(x),$$

то

$$k=\frac{dy}{dx}=y'.$$

Следовательно, уравнение касательной имеет вид:

$$Y-y=y'(X-x), \tag{1}$$

где X и Y — текущие координаты, а x и y — координаты точки прикосновения.

Если кривая дана уравнением вида $F(x, y) = 0$, не разрешённым относительно ординаты, то это уравнение определяет y как неявную функцию от x, и производная этой функции имеет прежнее геометрическое значение.

Эту производную мы можем найти как производную неявной функции (стр. 147):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1) и освобождая его от знаменателя, получим:

$$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

Наконец, если кривая дана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то эти уравнения также устанавливают функциональную зависимость между x и y, и производную $\frac{dy}{dx}$ можно найти по формуле производной функции от функции:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx};$$

но

$$\frac{dy}{dt} = \psi'(t), \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Подставляя это в уравнение (1), получим уравнение касательной в виде:

$$x'(Y - y) - y'(X - x) = 0. \qquad (3)$$

Пример. Составим уравнение касательной к кривой второго порядка, данной общим уравнением:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

в точке с координатами x_0, y_0.

Применяя равенство (2), получим:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0$$

или

$$x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) - \\ - x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) - y_0(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = 0.$$

Но в силу уравнения кривой имеем:

$$x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y_0(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0,$$

а потому предыдущее равенство можно написать в виде:

$$x(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}) = 0$$

или

$$a_{11}x_0x + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}y_0y + a_{13}(x + x_0) + a_{23}(y + y_0) + a_{33} = 0.$$

2. Прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку прикосновения, носит название *нормали* к кривой.

Угловой коэффициент нормали к кривой, очевидно, равен $-\frac{1}{y'}$ для кривой, данной уравнением $y = f(x)$, или $\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x}$, если кривая дана общим уравнением $F(x, y) = 0$, или, наконец, $-\frac{x'}{y'}$, если кривая представлена в параметрической форме.

Соответственно этим трём случаям уравнение нормали может быть представлено в следующих видах:

$$X - x + y'(Y - y) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \tag{4'}$$

$$x'(X - x) + y'(Y - y) = 0. \tag{4''}$$

Пример. Составим уравнение нормали к параболе $y^2 = 2px$. Применим равенство (4'):

$$F(x, y) = y^2 - 2px, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -2p, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{X - x}{-2p} = \frac{Y - y}{2y}$$

или

$$y(X - x) + p(Y - y) = 0.$$

§ 2. Отрезки касательной и нормали. Подкасательная и поднормаль.

Длиною касательной называют длину отрезка этой прямой от точки касания до точки пересечения с осью x, т. е. отрезок MT (черт. 73). *Длиною нормали* называют длину отрезка нормали от точки кривой до точки встречи нормали с осью x, т. е. отрезок MN. Проекции TP и PN этих отрезков касательной MT и нормали MN на ось x называют соответственно *подкасательной* и *поднормалью*.

Мы введём следующие обозначения:

$$MT = t, \quad MN = n,$$

$$TP = s_t, \quad PN = s_n$$

и вычислим длину каждого из этих отрезков. Пусть кривая дана уравнением $y=f(x)$. Обозначая угол касательной с осью x через α, имеем $\operatorname{tg}\alpha=y'$. Из треугольника TPM находим:

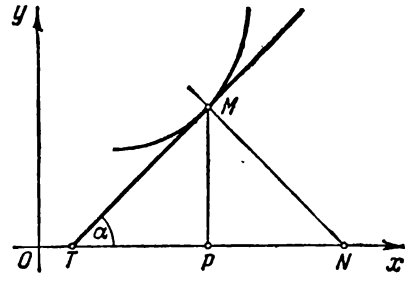
$$TP=PM:\operatorname{tg}\alpha \text{ или } s_t=\frac{y}{y'}, \quad (5)$$

$$MT^2=TP^2+PM^2=$$

$$=\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2=\frac{y^2}{y'^2}(1+y'^2),$$

откуда

$$t=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}. \quad (6)$$



Черт. 73.

Из треугольника PMN находим: $PN=PM\cdot\operatorname{tg}\angle PMN$, или, замечая, что

$$\angle PMN=\angle PTM=\alpha,$$

имеем

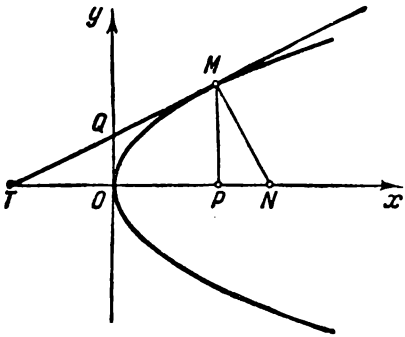
$$s_n=yy', \quad (7)$$

$$MN^2=PM^2+PN^2=y^2+y^2y'^2,$$

откуда

$$n=|y|\sqrt{1+y'^2}. \quad (8)$$

Пример 1. Найти подкасательную и поднормаль параболы $y^2=2px$. Дифференцируя равенство $y^2=2px$, получим: $2yy'=2p$; отсюда



Черт. 74.

$$y'=\frac{p}{y},$$

а потому

$$s_t=\frac{y}{y'}=\frac{y^2}{p}=\frac{2px}{p}=2x.$$

Из этого равенства следует, что начало O делит подкасательную пополам, а ось y делит пополам касательную MT (черт. 74).

Найдём поднормаль. Имеем:

$$s_n=y\cdot y'=y\cdot\frac{p}{y}=p.$$

Следовательно, поднормаль параболы не зависит от координат точки кривой, т. е. есть величина постоянная для всех точек кривой.

Пример 2. Найти длину нормали циклоиды

$$x=a(\varphi-\sin\varphi), \qquad y=a(1-\cos\varphi).$$

Мы имеем $n=y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; но из уравнения циклоиды находим:

$$dx=a(1-\cos\varphi)\,d\varphi, \qquad dy=a\sin\varphi\,d\varphi,$$

следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

а потому

$$n = a(1-\cos\varphi)\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}} = a\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\operatorname{cosec}\frac{\varphi}{2} = 2a\sin\frac{\varphi}{2}.$$

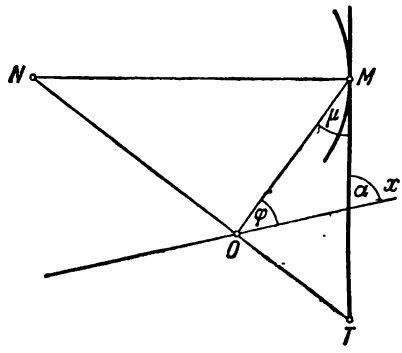
Сравнивая эту величину n с длиною хорды MP, где P — точка прикосновения образующего круга с осью Ox (см. т. I, черт. 207), замечаем, что $n = MP$. Отсюда нетрудно видеть, что нормаль совпадает с хордою MP, т. е. проходит через точку прикосновения образующего круга.

§ 3. Отрезки касательной и нормали в полярных координатах. Полярные подкасательная и поднормаль.

Пусть кривая дана уравнением в полярных координатах

$$r = f(\varphi). \tag{9}$$

Возьмём на ней какую-либо точку M (черт. 75), построим радиус-вектор OM, касательную MT, нормаль MN в точке M, а также проведём через полюс O прямую TN, перпендикулярную к радиусу-вектору OM и встречающую касательную MT и нормаль MN соответственно в точках T и N. MT называют *длиною полярной касательной*, MN — *длиною полярной нормали*, OT и ON — соответственно *полярной подкасательной* и *полярной поднормалью*.



Черт. 75.

Чтобы вычислить длины этих отрезков, найдём сначала величину угла, образуемого касательной MT с радиусом-вектором OM. Обозначая этот угол через μ, а угол касательной MT с полярной осью — через α, имеем:

$$\mu = \alpha - \varphi,$$

где φ — полярный угол точки M; отсюда

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\alpha-\varphi) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi}. \tag{10}$$

Но переходя к декартовым координатам, имеем:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dr\sin\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi}{dr\cos\varphi - r\sin\varphi\, d\varphi}.$$

Подставляя это выражение $\operatorname{tg}\alpha$ в (10), после сокращений получим:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r\,d\varphi}{dr}. \tag{11}$$

Обозначая теперь длины полярных касательной, нормали, подкасательной и поднормали соответственно через

$$T,\ N,\ \Sigma_t,\ \Sigma_n,$$

из треугольника OTM имеем:

$$OT = OM \cdot \operatorname{tg}\mu \text{ или } \Sigma_t = r \cdot \frac{r\,d\varphi}{dr},$$

т. е.

$$\Sigma_t = \frac{r^2\,d\varphi}{dr};$$

далее,

$$MT = \sqrt{OT^2 + OM^2} \text{ или } T = \sqrt{\left(\frac{r^2\,d\varphi}{dr}\right)^2 + r^2},$$

или

$$T = r\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}.$$

Точно так же, из треугольника ONM имеем:

$$ON = OM \cdot \operatorname{ctg} \angle ONM;$$

но $\angle ONM = \angle OMT = \mu$, следовательно,

$$\Sigma_n = r \operatorname{ctg}\mu = r\,\frac{dr}{r\,d\varphi},$$

т. е.

$$\Sigma_n = \frac{dr}{d\varphi};$$

отсюда

$$MN = \sqrt{ON^2 + OM^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2},$$

т. е.

$$N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

Пример 1. Рассмотрим спирали, которые мы уже встречали в аналитической геометрии (т. I, стр. 164 и сл.). Докажем следующие свойства этих кривых.

а) Полярная поднормаль архимедовой спирали есть величина постоянная. Действительно, уравнение спирали Архимеда: $r = a\varphi$. Отсюда

$$\Sigma_n = \frac{dr}{d\varphi} = a.$$

б) Полярная подкасательная гиперболической спирали есть величина постоянная. Действительно, уравнение гиперболической спирали: $r = \frac{a}{\varphi}$. Отсюда

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2}, \qquad \Sigma_t = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\varphi}} = \left(\frac{a}{\varphi}\right)^2 : \left(-\frac{a}{\varphi^2}\right) = -a.$$

в) Угол μ касательной к логарифмической спирали с радиусом-вектором точки прикосновения есть величина постоянная. Действительно, уравнение логарифмической спирали $r = ae^{k\varphi}$. Отсюда

$$\frac{dr}{d\varphi} = ake^{k\varphi}, \qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{r\,d\varphi}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = \frac{ae^{k\varphi}}{ake^{k\varphi}} = \frac{1}{k}.$$

Пример 2. Задача. Найти геометрическое место концов полярных подкасательных кривой второго порядка, отнесённой к фокусу, как к полюсу. Полярное уравнение этой кривой имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

(т. I, стр. 163); подкасательная Σ_t выражается так:

$$\Sigma_t = \frac{r^2\,d\varphi}{dr} = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\varphi}};$$

но из уравнения кривой имеем:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{pe\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2},$$

следовательно,

$$\Sigma_t = \frac{p^2}{(1 + e\cos\varphi)^2} : \frac{pe\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} = \frac{p}{e\sin\varphi}.$$

Угол наклона подкасательной к полярной оси, очевидно, равен $\varphi - \frac{\pi}{2}$. Обозначая этот угол через ϑ и подкасательную — через ρ, мы замечаем, что ρ и ϑ суть полярные координаты конца подкасательной T, причём по предыдущему

$$\rho = \frac{p}{e\sin\varphi}, \qquad \vartheta = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

Для получения уравнения геометрического места точек T остаётся найти непосредственную зависимость между ρ и ϑ, т. е. исключить φ из двух последних уравнений. Последнее уравнение даёт $\varphi = \vartheta + \frac{\pi}{2}$. Вставляя это в предыдущее уравнение, получим:

$$\rho = \frac{p}{e\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{p}{e\cos\vartheta},$$

или

$$\rho\cos\vartheta = \frac{p}{e}.$$

Это уравнение представляет прямую, перпендикулярную к полярной оси и отстоящую от полюса на расстояние $\frac{p}{e}$. Нетрудно заметить, что эта прямая есть директриса кривой, соответствующая фокусу, находящемуся в полюсе (см. т. I, стр. 162—163).

§ 4. Асимптоты плоских кривых.

Мы уже встречались с понятием асимптот при изучении свойств гиперболы (т. I, стр. 97).

Асимптотами гиперболы служили две прямые линии, обладавшие тем свойством, что разность ординат точек гиперболы и асимптоты с общей абсциссой стремилась к нулю при беспредельном удалении точки по кривой, т. е. при беспредельном возрастании абсциссы.

Мы дадим теперь общее определение асимптот плоских кривых и укажем способы их нахождения. Пусть даны какая-либо кривая

$$F(x, y) = 0, \tag{12}$$

имеющая бесконечную ветвь, и прямая линия

$$ax + by + c = 0. \tag{13}$$

Если при беспредельном удалении точки кривой (12) по её бесконечной ветви расстояние этой точки от прямой (13) стремится к нулю, то прямая (13) носит название асимптоты кривой (12). Асимптоты гиперболы, очевидно, обладают указанным свойством.

Покажем, как найти асимптоту кривой в том случае, когда она существует. Найдём сначала те асимптоты кривой, которые не параллельны оси ординат. Уравнение такой асимптоты можно представить в виде

$$y = kx + b. \tag{13'}$$

Для нахождения асимптоты мы должны определить величину k. Пусть $M(x, y)$ — какая-либо точка кривой (12); её расстояние от прямой (13') найдётся по формуле

$$d = \frac{y - kx - b}{\sqrt{1 + k^2}}$$

(т. I, стр. 64, (17)), причем x и y удовлетворяют уравнению (12). При удалении точки M по бесконечной ветви кривой абсцисса этой точки беспредельно растёт (либо беспредельно растёт по абсолютной величине, оставаясь отрицательной), расстояние же d при этом по условию стремится к нулю:

$$\lim_{x\to\infty} d = \lim_{x\to\infty} \frac{y - kx - b}{\sqrt{1 + k^2}} = 0 \quad \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{y - kx - b}{\sqrt{1 + k^2}} = 0\right); \tag{14}$$

отсюда

$$\lim_{x\to\infty} (y - kx) = b \quad \left(\lim_{x\to-\infty} (y - kx) = b\right). \tag{15}$$

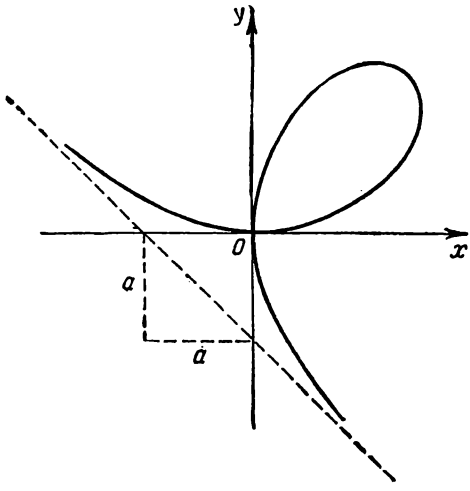
Далее, выражение $y - kx$ можно представить в форме

$$y - kx = x\left(\frac{y}{x} - k\right).$$

Так как всё выражение $x\left(\frac{y}{x} - k\right)$ имеет конечный предел b, а первый множитель x беспредельно растёт, то второй множитель $\frac{y}{x} - k$ должен стремиться к нулю, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = k \quad \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = k\right). \tag{16}$$

Равенства (15) и (16) определяют искомые величины k и b. При этом величины x и y, входящие в формулы (15) и (16), являются координатами точки кривой (12) и, следовательно, удовлетворяют уравнению (12). Таким образом, для определения величин k и b служат равенства (12), (15) и (16). Порядок вычислений может быть следующий: сначала по уравнению (12) стараются определить предел, к которому стремится отношение $\frac{y}{x}$ при $x \to \infty$ или $x \to -\infty$. Этот предел даёт величину k. Далее, с помощью уравнения (12) составляют выражение $y - kx$ и находят его предел при $x \to \infty$ или $x \to -\infty$. Этот предел даёт величину b.



Черт. 76.

Пример 1. Найти асимптоту кривой, называемой «декартовым листом» и представляемой уравнением

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \qquad (*)$$

Полагая в уравнении (*) $y = tx$, получаем:

$$(1 + t^3)x^3 - 3atx^2 = 0$$

или (считая $x \neq 0$ и сокращая на x^2)

$$(1 + t^3)x - 3at = 0.$$

Отсюда

$$x = \frac{3at}{1 + t^3} \quad \text{и} \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

Первое из этих уравнений показывает, что $x \to \infty$ в том и только в том случае, когда $t \to -1$. Следовательно,

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} t = -1$$

и далее

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} (x + y) = \lim_{t\to-1} \frac{3at + 3at^2}{1 + t^3} = \lim_{t\to-1} \frac{3at}{1 - t + t^2} = -a.$$

Тем самым асимптотой кривой (*) служит прямая $y = kx + b = -x - a$, или

$$x + y + a = 0.$$

Вид кривой изображён на черт. 76.

Пример 2. Найти асимптоту кривой

$$y = x \sin \frac{1}{x}.$$

Из уравнения кривой имеем:

$$\frac{y}{x} = \sin \frac{1}{x};$$

отсюда

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = 0.$$

Следовательно,

$$k = 0.$$

Из равенства (15) находим:

$$b = \lim_{x \to \infty} (y - 0 \cdot x) = \lim_{x \to \infty} y.$$

Этот последний предел найдём непосредственно из уравнения кривой. Обозначая $\frac{1}{x}$ через α, имеем

$$y = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha,$$

причём

$$\lim_{x \to \infty} \alpha = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Таким образом, $b = 1$. Искомая асимптота имеет уравнение

$$y = 1.$$

Если кривая имеет асимптоту, параллельную оси y, то уравнение такой асимптоты должно иметь вид $x = a$. При удалении точки по кривой ордината y беспредельно растёт (либо беспредельно растёт по абсолютной величине, оставаясь отрицательной). При этом расстояние точки $M(x, y)$ кривой от асимптоты, очевидно, равно

$$|d| = |x - a|.$$

Так как по условию

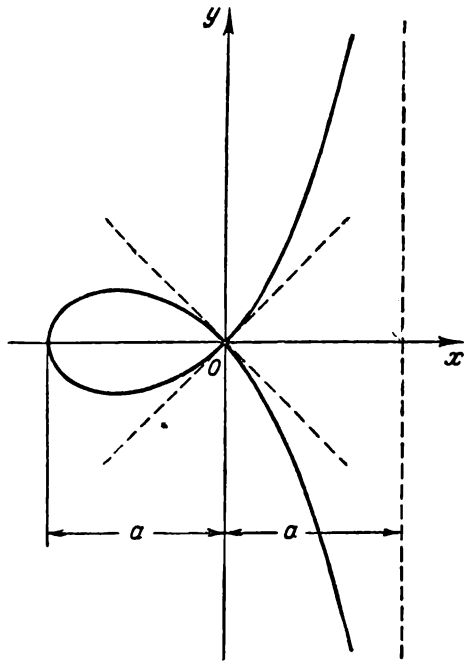
$$\lim_{y \to \infty} d = 0 \quad \left(\lim_{y \to -\infty} d = 0 \right),$$

то

$$\lim_{y \to \infty} x = a \quad \left(\lim_{y \to -\infty} x = a \right).$$

Таким образом, чтобы найти асимптоту, параллельную оси y, следует в уравнении кривой взять $y \to \infty$ или $y \to -\infty$ и установить,

к какому пределу будет при этом стремиться абсцисса x. Если x стремится к конечному пределу a, то уравнение асимптоты будет $x=a$. Если x не стремится к конечному пределу, то кривая не имеет асимптоты, параллельной оси y.



Черт. 77.

Совершенно так же можно, очевидно, находить и асимптоты, параллельные оси x, а именно, беря $x\to\infty$ или $x\to-\infty$, определять предел y.

Пример. Найти асимптоты кривой

$$x^3+ax^2+xy^2-ay^2=0 \quad (a\neq 0)$$

Будем сначала искать асимптоты, не параллельные оси y. Для этого надо сначала определить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$, предполагая его конечной величиной. Деля данное уравнение на x^3, получим:

$$1+\frac{a}{x}+\frac{y^2}{x^2}-a\frac{y^2}{x^3}=0.$$

Переходя к пределу при $x\to\infty$, найдём:

$$1+\left[\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}\right]^2=0.$$

Из этого уравнения следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}$ не имеет действительных значений; следовательно, кривая не имеет асимптоты, не параллельной оси y.

Будем теперь искать асимптоту, параллельную оси y. Деля обе части уравнения кривой на y^2, получим:

$$\frac{x^3}{y^2}+a\frac{x^2}{y^2}+x-a=0.$$

Легко видеть, что при приближении x к a координата y беспредельно растёт. Следовательно, уравнение искомой асимптоты

$$x-a=0.$$

Кривая, представленная данным уравнением, носит название «строфоиды» (черт. 77).

Теорема. *Если при беспредельном удалении точки по бесконечной ветви кривой касательная к кривой в этой точке стремится к определённому предельному положению, то это предельное положение касательной является асимптотой данной кривой.*

Уравнение касательной к кривой

$$y=f(x) \qquad (17)$$

имеет вид

$$Y - y = y'(X - x),$$

или

$$Y = y'X + y - xy',$$

где X, Y — текущие координаты, а x, y — координаты точки прикосновения. Если точка $M(x, y)$ удаляется по бесконечной ветви кривой, то по крайней мере одна из её координат беспредельно растёт. При этом очевидно, не нарушая общности, можно предположить, что $x \to \infty$. В таком случае в силу условия теоремы будут существовать пределы

$$\lim_{x\to\infty} y' \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} (y - xy'). \tag{18}$$

Обозначая их соответственно через p и q, будем иметь:

$$\lim_{x\to\infty} y' = p, \quad \lim_{x\to\infty} (y - xy') = q. \tag{19}$$

Следовательно, уравнение предельного положения касательной представится в виде

$$y = px + q. \tag{20}$$

Будем теперь искать асимптоту кривой. В силу изложенного выше асимптотой к кривой служит прямая

$$y = kx + b,$$

где

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x\to\infty} (y - kx). \tag{21}$$

Заметим теперь, что в силу второго из соотношений (19)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{y}{x} - y'\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = 0 \tag{22}$$

и потому

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} y'. \tag{23}$$

Далее, величину

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx)$$

можно найти по правилу Лопиталя. В самом деле,

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{y}{x} - k}{\frac{1}{x}}.$$

При $x \to \infty$ это выражение принимает форму $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, находим

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{xy' - y}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} (y - xy') = q. \tag{24}$$

Таким образом, $k = p$ и $b = q$. Следовательно, асимптотой кривой служит предельное положение касательной.

Замечание. По доказанной теореме совпадение асимптоты с предельным положением касательной имеет место всякий раз, когда предельное положение касательной существует (так как правило Лопиталя при раскрытии неопределённости

$$\frac{\frac{y}{x} - k}{\frac{1}{x}}$$

применимо лишь тогда, когда выражение $y - xy'$ имеет предел). Но асимптота может существовать и тогда, когда касательная не имеет определённого предельного положения при удалении точки касания в бесконечность. Так, например, кривая $y = \frac{\sin x}{x}$ имеет, как мы видели, асимптоту $y = 0$, но касательная к кривой при беспредельном удалении точки касания не стремится ни к какому определённому предельному положению. В самом деле, выражение

$$y - xy' = \frac{\sin x}{x} - x\,\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 2\frac{\sin x}{x} - \cos x$$

при беспредельном возрастании x ни к какому определённому пределу не стремится.

§ 5. Особые точки плоских кривых.

Пусть $F(x, y)$ — непрерывная функция, имеющая в рассматриваемой области плоскости (x, y) непрерывные частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$. Если в точке $M(x, y)$ кривой

$$F(x, y) = 0 \tag{25}$$

одна из этих производных отлична от нуля, то, как было доказано в § 7 гл. IV, в достаточно малой окрестности точки M уравнение (25) однозначно разрешимо относительно соответствующей переменной (а именно, относительно y, если $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, или относительно x, если $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$). В этом случае в окрестности точки M кривая (25) представляет собой график дифференцируемой однозначной функции другой переменной (соответственно x или y). Такую точку кривой называют

обыкновенной. В каждой своей обыкновенной точке кривая (25) имеет касательную. Уравнение касательной к кривой было получено в § 1 в форме

$$(X-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial F}{\partial y}=0, \tag{26}$$

где X, Y — текущие координаты, x, y — координаты точки прикосновения.

Если же кривая (25) ни в какой окрестности точки M не служит графиком дифференцируемой однозначной функции ни от x, ни от y, то M называют *особой точкой* кривой (25). Из сказанного выше следует, что для особой точки кривой (25) необходимо выполняются равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=0. \tag{27}$$

Так как координаты особой точки должны одновременно удовлетворять трём уравнениям (25) и (27), то существование на кривой особых точек является, вообще говоря, необычным фактом.

Нашей задачей является изучить характер расположения кривой вблизи её особых точек и, в частности, исследовать возможность проведения касательных к кривой в таких точках.

Пусть дана точка $M(x, y)$, для которой имеют место равенства (25) и (27). Будем предполагать, что функция $F(x, y)$ имеет вблизи точки M непрерывные частные производные по x и y до n-го порядка. Возьмём на кривой (25) точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$; разложение функции

$$F(x+\Delta x, \quad y+\Delta y)$$

по формуле Тэйлора даёт

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=F(x, y)+\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\Delta y+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y+\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(\left\{\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right\}_0\Delta x^n+\ldots+\left\{\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right\}_0\Delta y^n\right), \tag{28}$$

где частные производные n-го порядка

$$\left\{\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right\}_0, \quad \left\{\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right\}_0$$

вычислены для некоторых значений (x_0, y_0), лежащих в интервалах $(x, x+\Delta x)$ и $(y, y+\Delta y)$. Так как точка $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ взята на кривой (25), то $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$ и из равенства (28)

в силу (25) и (27) имеем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[\left\{\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right\}_0 \Delta x^n + \ldots + \left\{\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right\}_0 \Delta y^n\right] = 0. \quad (29)$$

Разделив обе части равенства (29) на Δx^2, получим:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left[\left\{\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\right\}_0 \Delta x^{n-2} + \ldots + \left\{\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right\}_0 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \Delta y^{n-2}\right] = 0. \quad (30)$$

Угловой коэффициент секущей MM' равен $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если при перемещении точки M' по кривой до совпадения с точкой M величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к некоторому предельному значению $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то, по определению, k и является угловым коэффициентом касательной к кривой в точке M. Для нахождения k переходим в равенстве (30) к пределу при $\Delta x \to 0$. Так как все члены левой части этого равенства, содержащие производные выше второго порядка, имеют множителями Δx и Δy в различных положительных степенях, то в пределе равенство (30) даст

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}k + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}k^2 = 0. \quad (31)$$

Если

$$\Delta = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}\right)^2 < 0, \quad (32)$$

то уравнение (31) имеет действительные и различные корни k_1 и k_2 (причём один из них может обратиться в ∞). Более тонкий анализ, который мы приводить не будем, показывает, что в этом случае кривая (25) в окрестности точки M распадается на две пересекающиеся в M ветви, а k_1 и k_2 служат угловыми коэффициентами касательных к этим ветвям. Таким образом, кривая имеет в точке M две различные касательные. Такая особая точка кривой носит название *узловой точки*. При перемещении точки по кривой она дважды проходит через узловую точку. Каждому прохождению соответствует своя касательная, определяющая направление движения точки в момент её прохождения через узловую точку. Аналитически узловая точка характеризуется равенствами (25) и (27) и неравенством (32).

Примером узловой точки может служить начало координат для декартова листа (черт. 76)

$$F = x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Действительно, при $x = 0$, $y = 0$ имеем:

$$F = 0;\ \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3ay = 0;\ \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3ax = 0;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x = 0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = -3a \neq 0;\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 6y = 0;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right]^2 = -9a^2 < 0.$$

Другим примером узловой точки является точка (0, 0) для строфоиды (черт. 77), что легко проверить вычислением.

Если уравнение (31) имеет мнимые корни, т. е. если

$$\Delta = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}\right]^2 > 0, \qquad (33)$$

то касательные к кривой в этой точке будут мнимыми. Чтобы выяснить расположение кривой вблизи такой точки, рассмотрим функцию $z = F(x, y)$. Равенства (27) и неравенство (33) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы эта функция имела в данной точке максимум или минимум. Поверхность, представляемая уравнением $z = F(x, y)$, в точке, соответствующей данной системе значений x и y, имеет наибольшую или наименьшую аппликату z по отношению ко в с е м достаточно близким точкам поверхности. Касательная плоскость к поверхности в данной точке параллельна плоскости xy, причём поверхность вблизи точки прикосновения вся лежит по одну сторону от касательной плоскости. Так как для данной точки $z = F(x, y) = 0$, то касательной плоскостью служит плоскость xy, и поверхность вблизи данной точки лежит по одну сторону от плоскости xy. Заметим теперь, что кривая (25) есть не что иное, как сечение поверхности $z = F(x, y)$ плоскостью xy. Из указанного выше расположения поверхности относительно плоскости xy следует, что вблизи данной точки не существует других точек кривой. В этом случае особая точка носит название *изолированной точки* кривой. Общий вид расположения кривой вблизи такой точки представлен на черт. 81 (стр. 394).

Случай, когда уравнение (31) имеет равные корни, т. е. когда по крайней мере одна из производных второго порядка $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}$ отлична от нуля, но

$$\Delta = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\,\partial y}\right]^2 = 0, \qquad (34)$$

труден для исчерпывающего исследования. Примером такой точки служит начало координат для полукубической параболы $y^2 - x^3 = 0$. Действительно, в этом случае при $x = 0$ и $y = 0$ имеем

$$F(x, y) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = -3x^2 = 0, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2y = 0;$$

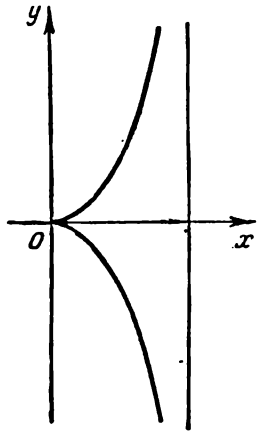
$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = -6x = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 2;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}\right]^2 = 0 \cdot 2 - 0^2 = 0.$$

Вблизи точки, где $\Delta = 0$, кривая имеет очень часто вид, представленный на черт. 78. В этом случае особая точка носит название *точки возврата*. Вообще же график кривой вблизи точки, в которой $\Delta = 0$, может иметь и более сложный вид. В этом можно убедиться, исследуя расположение поверхности $z = F(x, y)$ у точки, где

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \Delta = 0,$$

относительно её касательной плоскости в этой точке, что было сделано при отыскании максимума и минимума функции двух переменных (гл. V, § 2).



Черт. 78.

Пример. Рассмотрим кривую третьего порядка, носящую название *расходящейся параболы* и представляемую уравнением

$$y^2 = (x - a)(x - b)(x - c).$$

Пусть a, b и c попарно различны. Для определённости будем предполагать, что $a > b > c$. Найдём особые точки этой кривой. Составим уравнения (25) и (27) для исследуемой кривой:

$$F(x, y) = y^2 - (x - a)(x - b)(x - c) = 0,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = -(x - b)(x - c) - (x - a)(x - c) - (x - a)(x - b) = 0,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2y = 0.$$

Из последнего уравнения имеем $y = 0$. Подставив в первое уравнение значение $y = 0$, получаем:

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0.$$

Отсюда для x находим три значения:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c.$$

Ни одно из этих значений не удовлетворяет уравнению $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Отсюда следует, что рассматриваемая кривая особых точек не имеет (черт. 79).

Пусть теперь $a < b = c$.

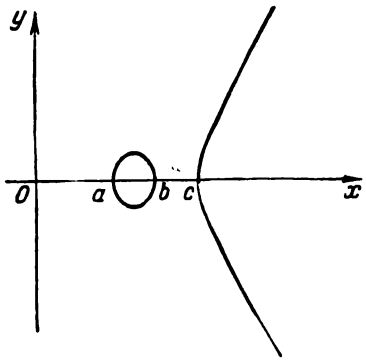
Уравнение $F = 0$ принимает вид

$$F = y^2 - (x-a)(x-b)^2 = 0. \tag{25'}$$

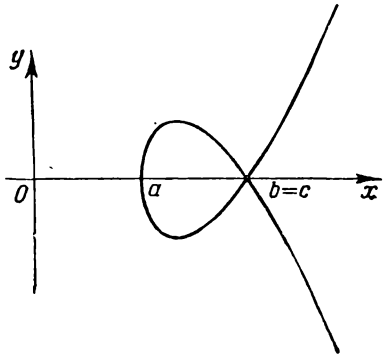
Уравнения (27) сводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned}(x-b)^2 + 2(x-a)(x-b) &= 0,\\ 2y &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{27'}$$

Решая совместно три последних уравнения, находим систему значений $x = b$, $y = 0$, удовлетворяющих всем трём уравнениям (25′) и (27′). Таким образом,



Черт. 79.



Черт. 80.

кривая (25′) имеет особую точку $(b, 0)$. Для определения её типа составим выражение

$$\Delta = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\right]^2.$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2(x-b) - 2(x-a) - 2(x-b),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2.$$

При $x = b$, $y = 0$ имеем:

$$\Delta = -2(b-a)\cdot 2 < 0.$$

Следовательно, исследуемая точка есть узловая точка кривой (черт. 80).

Пусть теперь $a = b < c$.

Уравнения, определяющие особую точку, приводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned}y^2 - (x-a)^2(x-c) &= 0,\\ -2(x-a)(x-c) - (x-a)^2 &= 0,\\ 2y &= 0.\end{aligned}\right.$$

Решая эту систему, находим: $x = a$, $y = 0$. Следовательно, кривая имеет особую точку $(a, 0)$. Составим выражение Δ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -2(x-a) - 2(x-c) - 2(x-a),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2.$$

причём при $x = a$, $y = 0$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = -2(a - c) > 0, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 2,$$

$$\Delta = 4(c - a) > 0.$$

Следовательно, исследуемая точка есть изолированная точка кривой (черт. 81).

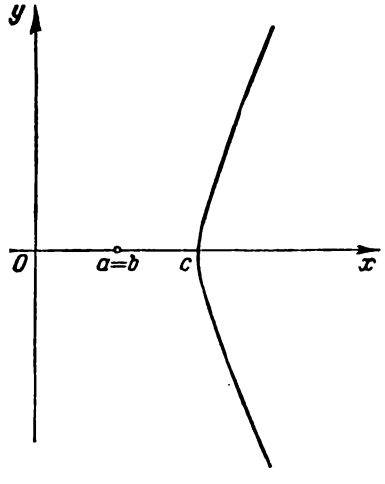
Положим теперь $a = b = c$. Уравнение кривой примет вид

$$y^2 - (x - a)^3 = 0.$$

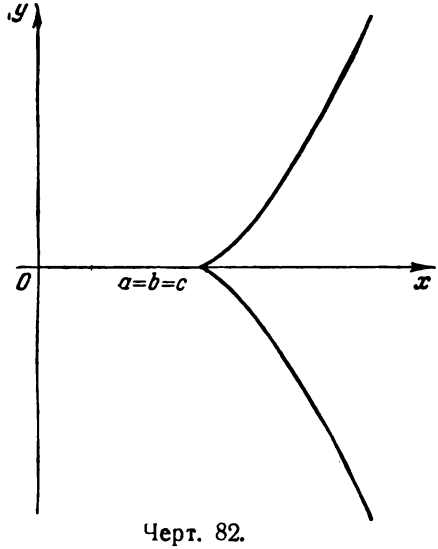
Для исследования кривой перенесём начало координат в точку $(a, 0)$. Тогда уравнение кривой получит вид

$$y^2 - x^3 = 0.$$

Мы исследовали эту кривую и видели, что она имеет точку возврата в начале координат. Следовательно, данная кривая имеет точку возврата $(a, 0)$ (черт. 82). Это же можно подтвердить и непосредственными вычислениями.



Черт. 81.



Черт. 82.

Рассмотренные нами три вида особых точек носят общее название *двукратных точек* по числу возможных в них касательных (различных, совпадающих или мнимых). Эти точки были получены в предположении, что по крайней мере одна из частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2}$$

отлична от нуля. Предположим теперь, что эти три производные в данной точке одновременно обращаются в нуль. Для общности будем считать, что в данной точке оказываются равными нулю все производные до некоторого порядка $p - 1$, но по крайней мере одна из про-

изводных порядка p отлична от нуля. В этом случае разложение (28) начинается с членов p-го порядка и, повторяя те же выкладки, что и выше, мы получим для определения углового коэффициента k касательной уравнение p-й степени. В такой точке возможно провести p касательных к кривой, но среди них могут быть совпадающие и мнимые. Точка кривой носит в этом случае название p-кратной точки.

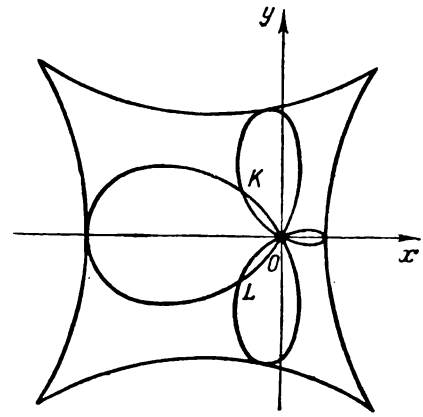
Пример. Рассмотрим кривую, представляемую уравнением

$$P(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + cx)^2 - a^2(x^2 - y^2)^2 = 0 \qquad (\alpha)$$

и носящую вследствие её вида название *жук* (черт. 83). Кривая эта является геометрическим местом оснований перпендикуляров, опущенных из начала координат на все касательные к некоторой астроиде, особым образом расположенной относительно осей координат. Для определения особых точек решаем совместно уравнение (α) и уравнения

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2x(x^2 + y^2 + cx)^2 + 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + cx)(2x + c) - 4a^2x(x^2 - y^2) = 0, \qquad (\beta)$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2y(x^2 + y^2 + cx)^2 + 4y(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + cx) + 4a^2y(x^2 - y^2) = 0. \qquad (\gamma)$$



Черт. 83.

Из (γ) находим одно из возможных значений y: $y = 0$. Подставляя это значение в (α) и (β), находим в обоих случаях $x = 0$; следовательно точка (0, 0) является особой точкой кривой. Для нахождения других решений системы умножим (α) на $-4x$, (β) — на $x^2 - y^2$ и результаты сложим:

$$-4x(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + cx)^2 + 2x(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + cx)^2 + 2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x^2 + y^2 + cx)(2x + c) = 0.$$

Вынося за скобки и приравнивая нулю множитель $x^2 + y^2 + cx$, получаем равенство

$$x^2 + y^2 + cx = 0. \qquad (\delta)$$

Подставляя это в (α), получим:

$$a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Отсюда

$$x = \pm y.$$

В силу этого уравнение (δ) даёт решение

$$x = -\frac{c}{2}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что системы значений x и y

$$1)\quad x=-\frac{c}{2},\quad y=+\frac{c}{2},$$

$$2)\quad x=-\frac{c}{2},\quad y=-\frac{c}{2}$$

удовлетворяют всем трём уравнениям (α), (β) и (γ). Более подробное исследование этих уравнений показывает, что других действительных решений, кроме найденных выше, эти уравнения не имеют. Данная кривая имеет, таким образом, три особые точки

$$O(0,\ 0),\quad K\left(-\frac{c}{2},\ +\frac{c}{2}\right),\quad L\left(-\frac{c}{2},\ -\frac{c}{2}\right).$$

Для определения характера этих точек вычислим частные производные высших порядков и составим выражение дискриминанта Δ. Для точек K и L получим $\Delta<0$. Следовательно, K и L являются узловыми точками кривой.

Для точки O обратятся в нуль все производные как второго, так и третьего порядков, тогда как среди производных четвёртого порядка будут отличные от нуля. Следовательно, точка O есть четырёхкратная точка кривой.

Рассмотренные выше кратные точки не исчерпывают собой всех возможных видов особых точек плоской кривой. В самом деле, исследуя уравнение $F(x,\ y)=0$, мы предполагали, что в исследуемой точке кривой функция $F(x,\ y)$ имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка n, причём, чтобы можно было выполнить разложение (28), n должно быть $\geqslant 2$. Для алгебраической кривой условие существования непрерывных частных производных всегда выполняется; следовательно, алгебраическая кривая никаких других особых точек, кроме точек различной кратности, иметь не может. Но в общем случае, когда условие существования частных производных до порядка не ниже второго не выполняется, могут представиться и более сложные случаи, именно, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ может вовсе не стремиться ни к какому пределу, или при различных способах приближения Δx к нулю может иметь различные пределы. В этих случаях мы будем иметь более сложные виды особых точек. Мы не будем исследовать всех могущих представиться здесь возможностей и ограничимся лишь рассмотрением примера особой точки этого рода.

Рассмотрим кривую

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\ \text{при}\ x\neq 0\ \text{и}\ y=0\ \text{при}\ x=0.$$

Эта кривая, по самому своему заданию, проходит через начало координат. Исследуем характер расположения кривой вблизи этой точки. Дадим x (при $x=0$) приращение Δx. Соответствующая величина Δy выразится так:

$$\Delta y=\frac{\Delta x}{1+e^{\frac{1}{\Delta x}}}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}}.$$

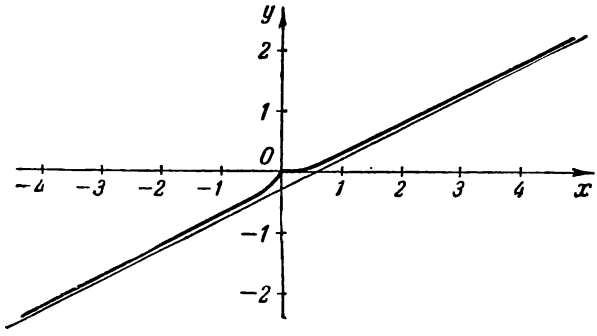
Если Δx стремится к нулю, принимая лишь положительные значения, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Если же Δx стремится к нулю, принимая лишь отрицательные значения, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Следовательно, в начале координат кривая имеет две касательные: ось Ox



Черт. 84.

и равноделящую координатного угла (черт. 84). Этот вид особой точки кривой носит название *точки перелома*.

§ 6. Прикосновение плоских кривых между собой.

Рассмотрим две произвольные кривые, имеющие общую точку $M(x, y)$. Допустим, что она не является особой точкой ни для одной из этих кривых и что касательные к обеим кривым в этой точке не параллельны оси y, причём углы наклона касательных к оси x непрерывно зависят от положения точек на кривых. В таком случае через точку M будет проходить лишь одна ветвь каждой кривой, и вблизи точки M ордината y каждой точки рассматриваемых кривых представится как однозначная функция абсциссы x.

Пусть для первой кривой

$$y = \varphi(x) \tag{35}$$

и для второй

$$y = \psi(x). \tag{36}$$

Будем предполагать, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вблизи точки M имеют непрерывные производные до некоторого порядка n. Дадим абсциссе x

какое-либо приращение Δx. Абсциссе $x+\Delta x$ соответствуют ординаты $\varphi(x+\Delta x)$ и $\psi(x+\Delta x)$ точек M' и M'' данных кривых. В силу сделанного предположения о функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, ординаты $\varphi(x+\Delta x)$ и $\psi(x+\Delta x)$ можно разложить по формуле Тэйлора:

$$\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x)+\frac{\Delta x}{1}\varphi'(x)+\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}\varphi''(x)+\ldots+\frac{\Delta x^n}{n!}\varphi^{(n)}(x+\theta_1\Delta x),$$

$$\psi(x+\Delta x)=\psi(x)+\frac{\Delta x}{1}\psi'(x)+\frac{\Delta x^2}{1\cdot 2}\psi''(x)+\ldots+\frac{\Delta x^n}{n!}\psi^{(n)}(x+\theta_2\Delta x),$$

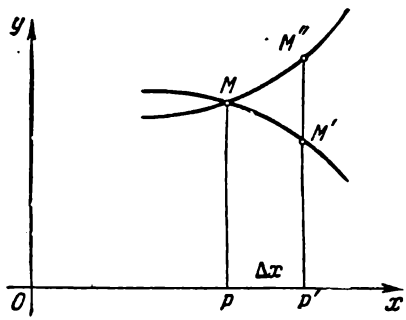
где θ_1 и θ_2 — положительные величины, меньшие единицы. Найдём величину разности ординат точек обеих кривых, соответствующих абсциссе $x+\Delta x$, т. е. величину отрезка $M'M''$ (черт. 85). Вычитая почленно предыдущие равенства первое из второго, получаем

$$M'M''=\frac{\Delta x}{1}[\psi'(x)-\varphi'(x)]+\frac{\Delta x^2}{2!}[\psi''(x)-\varphi''(x)]+\ldots+\frac{\Delta x^n}{n!}R, \quad (37)$$

где

$$R=\psi^{(n)}(x+\theta_2\Delta x)-\varphi^{(n)}(x+\theta_1\Delta x).$$

Если кривые (35) и (36) имеют в точке M различные касательные, то $\psi'(x)\neq\varphi'(x)$ и, следовательно, при бесконечно малом Δx величина $M'M''$ будет бесконечно малой величиной первого порядка, если принять за главное бесконечное малое Δx. Если кривые (35) и (36) соприкасаются в точке M так, что $\psi'(x)-\varphi'(x)=0$, и если при этом $\psi''(x)\neq\varphi''(x)$, то разложение (37) начнётся с членов, содержащих вторую степень Δx, следовательно, величина отрезка $M'M''$ будет бесконечно малой величиной второго порядка. Допустим теперь, вообще, что в точке M совпадают все производные функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ до некоторого порядка k, производные же порядка $k+1$ различны. В таком случае разложение (37) начнётся с членов, содержащих $(k+1)$-ю степень Δx, и, следовательно, отрезок $M'M''$ окажется бесконечно малой величиной $(k+1)$-го порядка. В этом случае принято говорить, что кривые (35) и (36) имеют в точке M *прикосновение k-го порядка*. Таким образом, *порядком прикосновения двух кривых* (35) *и* (36) *называют число совпавших в данной точке производных от ординат точек обеих кривых или порядок последних совпадающих в данной точке производных*. Пересечение двух кривых можно рассматривать, как прикосновение нулевого порядка.



Черт. 85.

Пример. Определим порядок прикосновения кривых

$$y_1 = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{и} \quad y_2 = 1 - x^2$$

в точке $x = 0$.

При $x = 0$ имеем:

$$y_1 = 1, \quad y_1' = 0, \quad y_1'' = -2, \quad y_1''' = 0, \quad y_1^{IV} = 24;$$
$$y_2 = 1, \quad y_2' = 0, \quad y_2'' = -2, \quad y_2''' = 0, \quad y_2^{IV} = 0.$$

Таким образом, в общей точке данных кривых совпадают производные первых трёх порядков, следовательно, данные кривые в точке $x = 0$ имеют прикосновение третьего порядка.

Найдём среди прямых, проходящих через точку (x_0, y_0) кривой

$$y = f(x), \tag{38}$$

ту, которая имеет с этой кривой наивысший возможный порядок прикосновения. Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0), есть

$$Y - y_0 = k(X - x_0), \tag{39}$$

где k — неопределённый пока угловой коэффициент. Для прямой (39) имеем

$$Y' = k, \quad Y'' = Y''' = \ldots = 0.$$

Следовательно, если $f'(x_0) \neq k$, т. е. прямая (39) — не касательная к кривой (38) в точке (x_0, y_0), то кривая (38) имеет в точке (x_0, y_0) с прямой (39) прикосновение нулевого порядка. Если $f'(x_0) = k$, а $f''(x_0) \neq 0$, то кривая (38) имеет со своей касательной (39) прикосновение первого порядка. Во всех же точках кривой, где $f''(x) = 0$, в частности в точках перегиба кривой, этот порядок не ниже второго. Таким образом, среди всех прямых, проходящих через заданную точку кривой (38), наибольший порядок прикосновения с кривой имеет касательная к кривой в этой точке.

Рассмотрим теперь кривую (38) и окружность

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2, \tag{40}$$

проходящую через точку (x_0, y_0) этой кривой, и постараемся определить центр $C(a, b)$ и радиус R окружности (40) так, чтобы эта окружность имела с кривой (38) прикосновение самого высокого (из возможных) порядка, причём вычислим порядок этого прикосновения.

Так как, по предположению, окружность (40) проходит через точку $M(x_0, y_0)$, то координаты x_0, y_0 точки M должны удовлетворять уравнению (40):

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2. \tag{40'}$$

Это равенство устанавливает то соотношение между координатами центра окружности (a, b) и её радиусом R, при наличии которого окружность (40) проходит через точку M.

Потребуем теперь, чтобы окружность (40) касалась кривой (38) в точке M. Для этого необходимо, чтобы производная y', найденная из уравнения окружности в точке M, совпадала с величиной $f'(x)$, найденной из уравнения (38). Дифференцируя (40), имеем

$$(x-a)+y'(y-b)=0. \tag{41}$$

Для точки M будем иметь

$$(x_0-a)+y_0'(y_0-b)=0, \tag{41'}$$

где

$$y_0'=f'(x_0).$$

Это равенство устанавливает новое соотношение между координатами a и b центра окружности (40).

Потребуем, наконец, чтобы в точке M совпадали не только первые, но и вторые производные ординат точки кривой (38) и окружности (40). Дифференцируя (41), получаем

$$1+y'^2+y''(y-b)=0. \tag{42'}$$

В точке M будем иметь

$$1+y_0'^2+y_0''(y_0-b)=0, \tag{42'}$$

где

$$y_0''=f''(x_0).$$

Соотношения (40'), (41') и (42') представляют три соотношения между координатами a и b центра окружности (30) и её радиусом R, при наличии которых окружность (40) имеет с кривой (38) в точке $M(x_0, y_0)$ прикосновение не ниже второго порядка. Эти равенства представляют собой три уравнения с тремя неизвестными a, b и R и определяют, при условии $y_0''\neq 0$, единственную окружность. Равенства (40'), (41') и (42') позволяют легко вычислить координаты её центра a и b и радиус R. Из (42') находим

$$y_0-b=-\frac{1+y_0'^2}{y_0''}.$$

Подставляя в (41'), получим

$$x_0-a=y_0'\frac{1+y_0'^2}{y_0''}.$$

Подставив эти выражения в (40'), будем иметь

$$R^2=y_0'^2\left(\frac{1+y_0'^2}{y_0''}\right)^2+\left(\frac{1+y_0'^2}{y_0''}\right)^2=\frac{(1+y_0'^2)^3}{y_0''^2}.$$

Из трёх последних уравнений найдём:

$$\left.\begin{aligned} a &= x_0 - y_0' \frac{1+y_0'^2}{y_0''}, \\ b &= y_0 + \frac{1+y_0'^2}{y_0''}, \\ R &= \left| \frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''} \right|. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Найденная окружность носит название *соприкасающейся окружности*. Она имеет с данной кривой прикосновение, вообще говоря, второго порядка. Легко заметить, что более высокий порядок прикосновения окружности (40) и кривой (38) может иметь место, вообще говоря, лишь для отдельных точек кривой. В самом деле, если мы потребуем, чтобы в точке M совпадали не только вторые, но и третьи производные ординат точек кривых (38) и (40), то получим, кроме соотношений (40′), (41′) и (42′), ещё одно соотношение между координатами центра a, b и радиусом R. Таким образом, три величины a, b и R должны будут удовлетворять четырём соотношениям, что возможно, вообще говоря, лишь для отдельных систем значений x_0, y_0, т. е. лишь для некоторых отдельных положений точки M на кривой (38).

Итак, соприкасающаяся окружность имеет с кривой порядок прикосновения наивысший по сравнению со всеми другими окружностями, касающимися кривой (38) в той же точке M.

Пример 1. Определить центр и радиус соприкасающейся окружности для параболы $y^2 = 2px$ в произвольной её точке (x, y).

Дифференцируя дважды уравнение данной параболы, получим

$$yy' = p, \quad y'^2 + yy'' = 0.$$

Выразив отсюда y' и y'', получим

$$y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Вставив в (43), будем иметь

$$a = x + \frac{y^2+p^2}{p}; \quad b = y - \frac{y^3+p^2y}{p^2}; \quad R = \frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

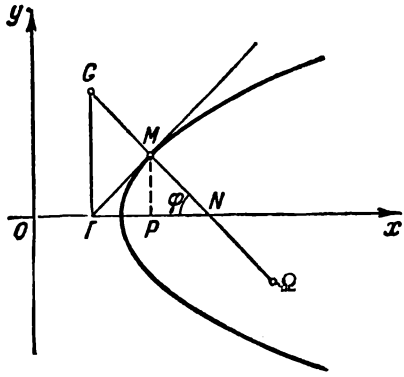
Исходя из последней формулы, легко дать весьма простой способ построения центра соприкасающейся окружности в произвольной точке параболы. С этой целью преобразуем выражение радиуса соприкасающейся окружности

$$R = \frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} = \sqrt{y^2+p^2}\left(1+\frac{y^2}{p^2}\right).$$

Но $\sqrt{y^2+p^2}$ есть длина нормали параболы MN (черт. 86) (так как $PN=p$; см. § 2); $\frac{y}{p}=\operatorname{tg}\varphi$, где $\varphi=\angle MNP$; следовательно,

$$R=MN(1+\operatorname{tg}^2\varphi)=\frac{MN}{\cos^2\varphi}.$$

Для построения этого отрезка проводим касательную MT, через точку T проводим перпендикуляр к оси параболы и продолжаем его до пересечения в точке G с продолжением нормали параболы. Из чертежа замечаем:



Черт. 86.

$$TN=\frac{MN}{\cos\varphi},\quad NG=\frac{TN}{\cos\varphi};$$

отсюда

$$NG=\frac{MN}{\cos^2\varphi}=R.$$

Для построения центра соприкасающейся окружности следует на продолжении нормали от точки N отложить отрезок $N\Omega=MG$, так как центр соприкасающейся окружности, очевидно, должен лежать на нормали к кривой.

Пример 2. Определить радиус соприкасающейся окружности для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в конце его малой оси.

Дифференцируя дважды уравнение эллипса, получим

$$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{yy''}{b^2}=0.$$

Для точки $(0,\ b)$, служащей концом малой оси, будем иметь

$$x=0,\quad y=b,\quad y'=0,\quad y''=-\frac{b}{a^2}.$$

Следовательно,

$$R=\left|\frac{(1+0)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{b}{a^2}}\right|=\frac{a^2}{b}.$$

Легко видеть, что для точки, служащей концом большой оси эллипса, будем иметь [1])

$$R=\frac{b^2}{a}.$$

---

[1]) В этом случае следует за независимую переменную принять y, а не x, ибо в указанной точке y' и y'' не существуют (обращаются в бесконечность).

Для построения центров окружностей, соприкасающихся с эллипсом в его вершинах, следует описать около эллипса прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса (черт. 87), и из какой-либо его вершины опустить перпендикуляр на диагональ прямоугольника. Этот перпендикуляр пересечёт оси эллипса в искомых центрах Ω_1 и Ω_2 соприкасающихся окружностей.

В самом деле, из черт. 87 непосредственно находим:

$$\frac{B\Omega_1}{BC}=\frac{BC}{AC} \text{ или } \frac{B\Omega_1}{a}=\frac{a}{b};$$

следовательно,

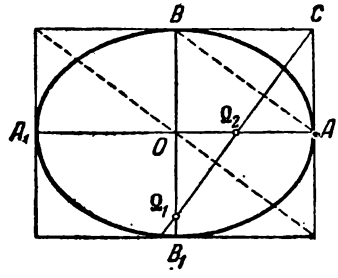
$$B\Omega_1=\frac{a^2}{b}.$$

Точно так же

$$\frac{A\Omega_2}{AC}=\frac{AC}{BC} \text{ или } \frac{A\Omega_2}{b}=\frac{b}{a};$$

следовательно,

$$A\Omega_2=\frac{b^2}{a}.$$

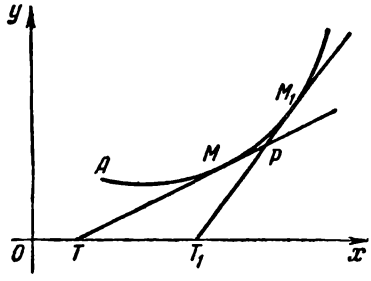


Черт. 87.

Найденными центрами соприкасающихся окружностей эллипса в его вершинах пользуются в черчении для приближённого построения эллипса.

§ 7. Кривизна плоской кривой.

Перейдём теперь к установлению способов измерения искривлённости плоской кривой в различных её точках. Для этого, прежде всего, установим понятие о средней кривизне кривой на данном участке дуги.



Черт. 88.

Пусть дана дуга $\overset{\frown}{MM_1}$ некоторой кривой (черт. 88). Проведём в концах этой дуги касательные к ней. Пусть P — точка пересечения этих касательных и τ — угол между ними, измеренный в радианах: $\tau=\angle TPT_1$. Отношение $\frac{\tau}{\overset{\frown}{MM_1}}$ назовём *средней кривизной* кривой на дуге $\overset{\frown}{MM_1}$.

Интуитивно ясно, что чем больше угол τ при данной длине дуги $\overset{\frown}{MM_1}$, тем сильнее искривлена эта дуга $\overset{\frown}{MM_1}$, и обратно. Данное определение средней кривизны отвечает, таким образом, нашему интуитивному представлению о кривизне кривой. С другой стороны, интуитивно ясно, что чем меньше длина дуги $\overset{\frown}{MM_1}$, тем лучше средняя кривизна характеризует степень искривления кривой вблизи точки M.

В соответствии с этим мы назовём *кривизной* кривой в точке M тот предел, к которому стремится средняя кривизна кривой на

дуге MM_1, когда точка M_1, перемещаясь по дуге кривой, стремится к точке M. Обозначая кривизну кривой в точке M через K, а длину дуги MM_1 через Δs, имеем:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\tau}{\Delta s}. \tag{44}$$

Посмотрим, как вычислить кривизну кривой в данной точке, если кривая дана уравнением

$$y = f(x). \tag{45}$$

Обозначим через α угол наклона к оси x касательной в точке M к данной кривой. С перемещением точки M по кривой угол α будет меняться, и так как положение точки M на кривой вполне определяется значением её абсциссы x [ибо ордината y при заданном x найдётся из уравнения кривой (45)], то угол α можно рассматривать как функцию x. Нетрудно дать выражение угла α в функции абсциссы x.

В самом деле, мы знаем, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = y',$$

следовательно,

$$\alpha = \operatorname{arctg} y', \tag{46}$$

или, в силу уравнения (45):

$$\alpha = \operatorname{arctg} f'(x). \tag{46'}$$

Будем далее отсчитывать дуги нашей кривой от некоторой точки $A(a, f(a))$. Тогда

$$s = \overset{\smile}{AM} = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{47}$$

(см. т. I, стр. 450). Если x при переходе от точки M к точке M_1 получает приращение Δx, то дуга s и угол α получают некоторые приращения Δs и $\Delta \alpha$, причём, очевидно, $\Delta s = \overset{\smile}{MM_1}$, а из треугольника TPT_1 имеем:

$$\Delta \alpha = \angle xT_1P - \angle xTP = \angle TPT_1 = \tau.$$

Следовательно, равенство (44) даёт:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\frac{\Delta \alpha}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}}.$$

Но так как Δx и Δs стремятся к нулю одновременно, то

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \frac{d\alpha}{dx}$$

и

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx},$$

а потому

$$K = \frac{d\alpha}{dx} : \frac{ds}{dx}. \tag{48}$$

Дифференцируя равенства (46) и (47), находим:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2} \text{ и } \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}.$$

Внося эти выражения в (48), получим:

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{49}$$

Пример 1. Найти кривизну прямой линии $y = kx + b$ в какой-либо точке.

Мы имеем: $y' = k$, $y'' = 0$, и формула (49) даёт:

$$K = \frac{0}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Итак, кривизна прямой линии всюду равна 0.

Пример 2. Найти кривизну окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Чтобы найти y' и y'', дифференцируем уравнение окружности. После одного дифференцирования будем иметь:

$$x + yy' = 0.$$

Дифференцируя ещё раз, получим:

$$1 + y'^2 + yy'' = 0.$$

Из этих равенств найдём:

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y'' = -\frac{1+y'^2}{y} = -\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3}.$$

Вставляя эти выражения в формулу (49), получим:

$$K = \frac{-\frac{r^2}{y^3}}{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r^2}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{r}.$$

Следовательно, кривизна окружности постоянна во всех её точках и по абсолютной величине равна обратной величине её радиуса. Это свойство окружности можно и непосредственно вывести из данного выше определения кривизны.

Пример 3. Найти кривизну параболы $y^2 = 2px$.

Дифференцируя это уравнение два раза, получаем:

$$yy' = p,$$

$$yy'' + y'^2 = 0.$$

Отсюда

$$y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{y'^2}{y} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Вставляя в формулу (49), найдём:

$$K = \frac{-\frac{p^2}{y^3}}{\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{p^2}{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-p^{\frac{1}{2}}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Это выражение показывает, что абсолютная величина кривизны параболы имеет наибольшее значение в вершине параболы и убывает по мере удаления точки по кривой.

§ 8. Радиус кривизны. Центр кривизны. Круг кривизны.

Радиусом кривизны кривой в данной точке называют величину, обратную кривизне кривой. Обозначая радиус кривизны через ρ, имеем $\rho = \frac{1}{K}$ и в силу формулы (49):

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \tag{50}$$

Примеры предыдущего параграфа показывают, что радиус кривизны окружности по абсолютной величине равен радиусу самой окружности. Радиус кривизны параболы $\rho = -\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$. Он имеет наименьшее значение в вершине параболы и возрастает по мере удаления точки по кривой.

Точку C, получающуюся, если отложить на нормали в сторону вогнутости кривой величину радиуса кривизны, называют *центром кривизны* кривой, а окружность с центром в центре кривизны и радиусом, равным радиусу кривизны, — *кругом* (точнее — *окружностью*) *кривизны* кривой.

Сравнивая формулу (50) и формулы (43) § 6, замечаем, что круг кривизны кривой есть не что иное, как соприкасающаяся окружность.

Формулами (50) и (49) можно пользоваться не только в том случае, когда кривая представлена уравнением, разрешённым относительно ординаты, но и тогда, когда кривая дана общим уравнением $f(x, y) = 0$ или уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ (если только эти уравнения определяют y как функцию от x). Метод, который применяется в случае общего уравнения, мы уже применяли в примерах 2 и 3 предыдущего параграфа.

Рассмотрим случай параметрического представления кривой. Для примера, найдём радиус кривизны циклоиды

$$x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi).$$

Чтобы вычислить радиус кривизны, нам нужно найти величины

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

и

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Дифференцируем уравнения циклоиды:

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi,$$
$$dy = a\sin\varphi\,d\varphi.$$

Деля второе равенство на первое, получим:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Далее

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)}{dx};$$

но

$$d\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{1}{2\sin^3\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi,$$

$$dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi = 2a\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi;$$

деля первое на второе, получим

$$\frac{d\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)}{dx} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{\varphi}{2}}.$$

Таким образом

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{\varphi}{2}}.$$

Вставляя эти выражения для $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ в формулу (50), получим:

$$\rho = \frac{\left(1 + \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{4a\sin^4\frac{\varphi}{2}}} = -4a\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Сравнивая этот результат с найденным в § 2 выражением для длины нормали циклоиды, приходим к заключению, что радиус кривизны циклоиды равен по абсолютной величине удвоенной нормали кривой: $\rho = -2n$.

Легко получить и общую формулу для радиуса кривизны кривой в том случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями. Пусть

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{51}$$

— параметрические уравнения кривой, причём $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ одновременно в нуль не обращаются. Тогда равенства (51) можно рассматривать как уравнения, устанавливающие функциональную зависимость между x и y при посредстве вспомогательного параметра t. Пользуясь этим равенством, можно вычислить производные $y'_x = \frac{dy}{dx}$ и $y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ $\left(\text{или } x'_y = \frac{dx}{dy} \text{ и } x''_{y^2} = \frac{d^2x}{dy^2}\right)$.

Из равенств (51) дифференцированием находим:

$$dy = \psi'(t)\,dt, \quad dx = \varphi'(t)\,dt,$$

или

$$dy = y'\,dt, \quad dx = x'\,dt;$$

следовательно,

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'}{x'}. \tag{52}$$

Далее,

$$y''_{x^2} = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dx} = \frac{\frac{x'y'' - x''y'}{x'^2}\,dt}{x'\,dt} = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^3}. \tag{53}$$

Подставляя эти величины в формулу (50), получим:

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}. \tag{50'}$$

К этой же формуле мы пришли бы, рассматривая x, как функцию от y.

Пример. Найдём радиус кривизны эллипса, заданного параметрическими уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \tag{α}$$

в произвольной его точке.

Дифференцируя уравнения (α), получим:

$$x' = -a\sin t, \quad y' = b\cos t;$$
$$x'' = -a\cos t, \quad y'' = -b\sin t.$$

Подставляя в формулу (50'), найдём:

$$\rho = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Значения $t=0$ и $t=\frac{\pi}{2}$ соответствуют вершинам эллипса. При $t=0$

$$\rho=\frac{b^2}{a},$$

при $t=\frac{\pi}{2}$

$$\rho=\frac{a^2}{b}.$$

Эти величины совпадают с найденными ранее радиусами соприкасающихся окружностей в вершинах эллипса.

§ 9. Эволюта кривой.

Если для каждой точки кривой построить центр её кривизны в этой точке, то все эти центры кривизны расположатся на плоскости по некоторому определённому закону и заполнят собой некоторую кривую — геометрическое место центров кривизны данной кривой. Эта кривая носит название *эволюты* данной кривой. Чтобы установить взаимоотношение, которое имеет место между кривой и её эволютой, составим уравнение эволюты.

Если уравнение кривой дано в виде

$$y=f(x), \tag{54}$$

то координаты центра её кривизны можно найти по формулам (43) § 6, как координаты центра соприкасающейся окружности. Обозначая эти координаты для произвольной точки $M(x, y)$ данной кривой через ξ и η, будем иметь

$$\xi=x-y'\frac{1+y'^2}{y''},\quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{55}$$

Если кривая дана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то, выражая $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ через производные x', y', x'', y'' от x и y по параметру t по формулам (52) и (53) предыдущего параграфа, мы получим для координат ξ и η следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},\\ \eta&=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}.\end{aligned}\right\} \tag{55'}$$

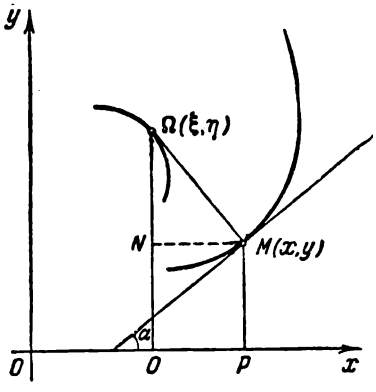
Равенства (55′) можно, таким образом, рассматривать, как параметрические уравнения эволюты, выражающие текущие координаты ξ и η точек эволюты через параметр t.

Уравнениям (55′) можно придать иную форму, более удобную для установления свойств эволюты.

Замечая, что $\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$ и $y' = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол касательной к кривой с положительным направлением оси x, имеем:

$$\frac{1+y'^2}{y''} = \frac{\rho}{\sqrt{1+y'^2}} = \rho\cos\alpha.$$

Заменяя в равенствах (55) величину $\frac{1+y'^2}{y''}$ через $\rho\cos\alpha$ и y' — через $\operatorname{tg}\alpha$, получим:



Черт. 89.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \rho\sin\alpha, \\ \eta &= y + \rho\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Те же формулы можно получить и непосредственно из черт. 89.

Пользуясь равенствами (56), можно установить важные свойства эволюты. Дифференцируя равенства (56), находим:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= dx - d\rho\cdot\sin\alpha - \rho\cos\alpha\,d\alpha, \\ d\eta &= dy + d\rho\cdot\cos\alpha - \rho\sin\alpha\,d\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Вычислим отдельно величины $\rho\cos\alpha\,d\alpha$ и $\rho\sin\alpha\,d\alpha$. Замечая, что $y' = \operatorname{tg}\alpha$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, $d\alpha = d\operatorname{arctg} y' = \frac{y''}{1+y'^2}dx$, имеем:

$$\rho\cos\alpha\,d\alpha = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\cdot\frac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{y''}{1+y'^2}dx = dx;$$

точно так же найдём:

$$\rho\sin\alpha\,d\alpha = dy.$$

Внося эти величины в уравнения (57), получим:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= -d\rho\sin\alpha, \\ d\eta &= d\rho\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Деля почленно второе из равенств (58) на первое, получаем:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{y'}. \qquad (59)$$

Так как $\frac{d\eta}{d\xi}$ есть угловой коэффициент касательной к эволюте, то из равенства (59) следует, что касательная к эволюте параллельна нормали к кривой. Но точка Ω эволюты лежит на нормали к кривой,

следовательно, *нормаль к кривой в каждой её точке служит касательной к эволюте в соответствующей точке эволюты.*

Определим теперь длину дуги эволюты между какими-либо двумя её точками Ω_1 и Ω_2 (черт. 90). Обозначая эту дугу, отсчитанную от некоторой точки Ω_0, через σ, будем иметь: $d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ и в силу (58)

$$d\sigma = \pm d\rho. \tag{60}$$

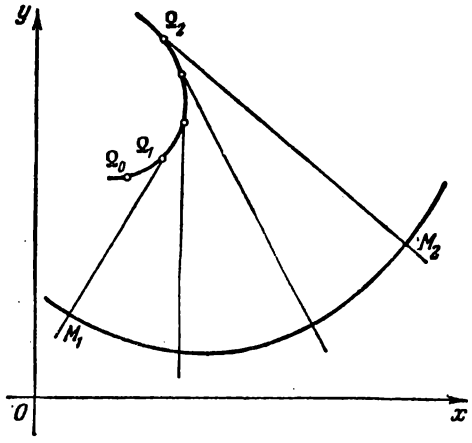
Пусть точкам Ω_1 и Ω_2 эволюты соответствуют значения σ_1 и σ_2 дуги σ, а соответствующим точкам M_1 и M_2 кривой — значения ρ_1 и ρ_2 радиуса кривизны ρ. Интегрируя равенство (60) в пределах от σ_1 до σ_2, получим:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma = \pm \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho$$

или, выполняя интегрирования,

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \pm(\rho_2 - \rho_1)\ ^1), \tag{61}$$

т. е. длина дуги эволюты между двумя какими-либо её точками равна разности радиусов кривизны кривой в точках, соответствующих концам дуги эволюты. Это свойство эволюты имеет простое кинематическое истолкование.



Черт. 90.

Если точку M_2 оставить неподвижной и перемещать по кривой точку M_1, то соответствующая точка Ω_1 эволюты будет перемещаться по эволюте, причём во время всего процесса перемещения будет соблюдаться равенство $\overset{\frown}{\Omega_1\Omega_2} = \pm(M_2\Omega_2 - M_1\Omega_1)$. Это равенство показывает, что перемещение точки M_1 по кривой может быть осуществлено путём разматывания или наматывания туго натянутой нити, навёрнутой на эволюту. Этим свойством эволюты и объясняется её название: эволюта — «развёртка». Данная кривая по отношению к своей эволюте носит название *эвольвенты* — «развёртывающей».

Пример. Найти эволюту эллипса

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

Составим параметрические уравнения эволюты по формулам (55′). Из уравнений эллипса имеем

$$x' = -a\sin t, \quad y' = b\cos t,$$
$$x'' = -a\cos t, \quad y'' = -b\sin t.$$

---

[1]) Двойной знак объясняется тем, что при возрастании дуги эволюты σ радиус кривизны кривой ρ может и возрастать и убывать.

Таким образом, уравнения (55′) дают:

$$\xi = a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}\, b\cos t,$$

$$\eta = b\sin t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}\, a\sin t,$$

или

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t.$$

Полагая

$$\frac{a^2 - b^2}{a} = \lambda, \quad \frac{a^2 - b^2}{b} = \mu,$$

имеем:

$$\xi = \lambda\cos^3 t, \quad \eta = -\mu\sin^3 t,$$

или

$$\frac{\xi}{\lambda} = \cos^3 t, \quad \frac{\eta}{\mu} = -\sin^3 t.$$

Таковы параметрические уравнения эволюты. Возводя почленно эти равенства в степень $\frac{2}{3}$ и складывая, получим уравнение эволюты эллипса в декартовых координатах:

$$\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

§ 10. Огибающая семейства кривых.

Если уравнение кривой, кроме координат x и y, содержит ещё некоторые постоянные величины, то эти величины влияют на форму кривой. Давая этим постоянным различные значения, мы будем получать различные кривые. Например, уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ содержит две постоянные величины a и b, представляющие геометрически длины осей этого эллипса. Давая этим величинам a и b различные значения, мы будем получать эллипсы разной формы и размеров.

Постоянные величины, входящие в уравнения кривой и могущие принимать произвольные (в известных пределах) значения, называют *параметрами*. Придавая параметрам всевозможные значения, мы получаем бесчисленное множество кривых, образующих так называемое *семейство кривых*. Так, в предыдущем примере мы имеем семейство эллипсов, зависящих от двух параметров.

Пусть дано семейство кривых, зависящих от одного параметра. Обозначая параметр буквой α, мы можем представить уравнение этого семейства в виде

$$f(x, y, \alpha) = 0. \tag{62}$$

Каждому значению параметра α соответствует своя кривая семейства.

Если кривые семейства располагаются на плоскости так, что все они касаются одной и той же кривой, причём каждая точка этой кривой есть точка соприкосновения с одной и только одной из кривых семейства, то такая кривая носит название *огибающей* данного семейства кривых. Чтобы найти уравнение огибающей, заметим, что каждая её точка принадлежит одной из кривых семейства, именно той кривой, которой огибающая касается в этой точке. Если ещё предположить, что каждая кривая семейства касается огибающей в одной точке, то отсюда будет следовать, что координаты каждой точки огибающей удовлетворяют уравнению (62), но величина α, входящая в это уравнение, для различных точек огибающей имеет различные значения, а именно, значение α в какой-либо точке огибающей является значением параметра α семейства (62) для той кривой, которая касается огибающей в этой точке. Таким образом, координаты x, y точек огибающей можно рассматривать как некоторые функции от α: $x=\varphi(\alpha)$, $y=\psi(\alpha)$, удовлетворяющие уравнению (62).

При нахождении второго уравнения, которому должны удовлетворять координаты точек огибающей, мы будем опираться на основное свойство огибающей: касательная к огибающей в произвольной её точке должна совпадать с касательной к кривой семейства, проходящей через эту точку. Но согласно § 1 касательная к кривой семейства (2) выражается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial f}{\partial y}(Y-y)=0,$$

а касательная к огибающей — уравнением

$$-\frac{dy}{d\alpha}(X-x)+\frac{dx}{d\alpha}(Y-y)=0$$

(предполагая, что производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{dx}{d\alpha}$, $\frac{dy}{d\alpha}$ существуют, причём ни первые две, ни последние две не обращаются одновременно в нуль). Так как эти уравнения должны выражать одну и ту же прямую, то их коэффициенты должны быть пропорциональны, откуда

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha}=\frac{\partial f}{\partial y}\left(-\frac{dy}{d\alpha}\right)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha}=0. \tag{63}$$

С другой стороны, подстановка функций $x=\varphi(\alpha)$, $y=\psi(\alpha)$ в уравнение (62) обращает его в тождество. Дифференцируя это тождество по α, находим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0. \tag{64}$$

Вычитая (63) из (64), получим:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \tag{65}$$

Этому уравнению совместно с уравнением (62) и должны удовлетворять координаты точек огибающей.

Чтобы получить обычное уравнение в декартовых координатах, которому должна удовлетворять огибающая, следует исключить α из уравнений (62) и (65).

Пример 1. Найти огибающую семейства окружностей

$$x^2 + (y - \alpha)^2 = \frac{\alpha^2}{2}. \tag{*}$$

Дифференцируя это уравнение по α, находим:

$$-2(y - \alpha) = \alpha, \text{ откуда } \alpha = 2y.$$

Внося это выражение α в уравнение семейства, получим:

$$x^2 + (y - 2y)^2 = \frac{4y^2}{2}$$

или

$$x^2 + y^2 = 2y^2 \quad \text{или} \quad x^2 - y^2 = 0.$$

Это — уравнение пары равноделящих координатных углов.

Легко проверить, что эти прямые действительно служат огибающими семейства (*). В самом деле, центр каждой окружности этого семейства имеет координаты $(0, \alpha)$ и отстоит от указанных равноделящих на расстояние $\frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}$, т. е. как раз на величину радиуса этой окружности.

Наше семейство представляет таким образом семейство окружностей, центры которых находятся на оси y и которые касаются равноделящих координатных углов.

Пример 2. Найти огибающую семейства парабол

$$y = \alpha x - \frac{x^2}{2c}(1 + \alpha^2). \tag{**}$$

Все параболы этого семейства проходят через начало координат, и оси их параллельны оси y. Параметр α геометрически означает угловой коэффициент касательной к параболе в начале координат. Действительно, из данного уравнения имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha - \frac{x}{c}(1 + \alpha^2),$$

откуда

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \alpha.$$

Для получения уравнения огибающей этого семейства дифференцируем данное уравнение по α:

$$x - \frac{x^2}{2c} \cdot 2\alpha = 0,$$

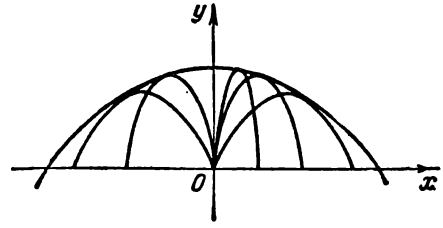
откуда $\alpha = \frac{c}{x}$. Внося это в уравнение семейства, получим:

$$y = \frac{c}{x} \cdot x - \frac{x^2}{2c}\left(1 + \frac{c^2}{x^2}\right)$$

или

$$y = \frac{c}{2} - \frac{x^2}{2c}.$$

Это уравнение представляет параболу с вершиной на оси y в точке $\left(0, \frac{c}{2}\right)$ и пересекающую ось x в точках $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ (черт. 91). Предоставляем читателю проверить, что эта парабола (за вычетом её вершины) действительно является огибающей семейства (**).



Черт. 91.

Данный выше вывод уравнения огибающей был проведён в предположении, что огибающая семейства (62) существует. Такое предположение оправдывается не всегда: существуют семейства кривых, не имеющие огибающей, как, например, семейство концентрических окружностей. В таких случаях исключение α из уравнений (62) и (65) не будет давать уравнения огибающей. Возьмём, например, семейство концентрических окружностей $x^2 + y^2 = \alpha^2$. Дифференцируя по α, получим: $2\alpha = 0$. Исключая α из двух последних равенств, получим $x^2 + y^2 = 0$. Действительные решения этого уравнения дают начало координат.

Если кривые семейства (62) имеют кратные точки и геометрическое место кратных точек всех кривых семейства может быть задано уравнениями вида $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$, где φ и ψ — дифференцируемые функции, то это геометрическое место также будет удовлетворять системе уравнений (62) и (65). В самом деле, так как каждая точка кривой g принадлежит в то же время одной из кривых семейства (62), то подстановка функций $x = \varphi(\alpha)$, $y = \psi(\alpha)$ в уравнение (62) обращает его в тождество. Дифференцируя это тождество по α, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Но так как кривая g состоит из кратных точек кривых семейства (62), то для всех её точек выполняются равенства

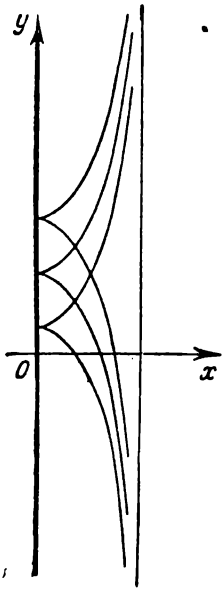
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

и предыдущее уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Следовательно, кривая g — геометрическое место кратных точек кривых семейства (62) — удовлетворяет той же системе уравнений (62) и (65), что и огибающая.

Из изложенного выше следует, что кривая, определяемая уравнениями (62) и (65), может содержать огибающую, если она существует, может содержать также геометрическое место кратных точек кривых, если кривые семейства имеют кратные точки, и может не давать ни того, ни другого, если кривые семейства (62) не имеют особых точек, а само семейство не имеет огибающей.



Черт. 92.

Пример 1. Рассмотрим семейство кривых с параметром α, определяемое уравнением:

$$x[x^2+(y-\alpha)^2]=2r(y-\alpha)^2.$$

Дифференцируя по α, получим:

$$2x(y-\alpha)=4r(y-\alpha),$$

или

$$(x-2r)(y-\alpha)=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$x-2r=0 \quad \text{и} \quad y-\alpha=0.$$

Уравнение $x-2r=0$ представляет прямую, параллельную оси y, точки которой не принадлежат кривым данного семейства (это — общая асимптота всех кривых семейства). Уравнение $y-\alpha=0$ даёт $\alpha=y$; подставляя это значение α в данное уравнение, получаем: $x=0$; это — геометрическое место точек возврата кривых семейства (черт. 92).

Пример 2. Рассмотрим семейство кривых

$$(y-\alpha)^2=(x-\alpha)^3. \qquad \text{(a)}$$

Дифференцируя по α, получим

$$2(y-\alpha)=3(x-\alpha)^2. \qquad \text{(b)}$$

Деление равенства (а) на (б) приведёт к уравнению

$$\frac{y-\alpha}{2}=\frac{x-\alpha}{3},$$

или

$$3(y-\alpha)=2(x-\alpha),$$

откуда

$$\alpha=3y-2x.$$

Подставляя это значение α в равенство (б), получим

$$2(2x-2y)=3(3x-3y)^2, \text{ или}$$

$$\frac{4}{27}(x-y)=(x-y)^2.$$

Это уравнение распадается на два:

$$x-y=0 \quad \text{и} \quad x-y=\frac{4}{27}.$$

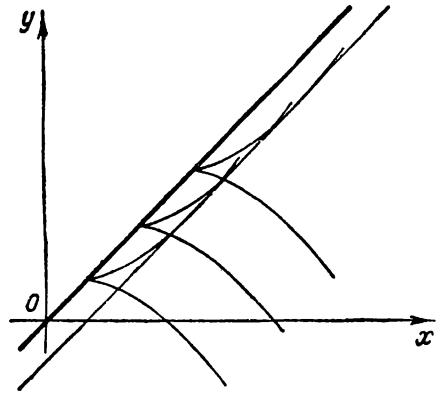
Первое из этих уравнений представляет геометрическое место точек возврата кривых семейства, второе — даёт огибающую семейства (черт. 93).

Возьмём теперь две кривые, соответствующие двум значениям параметра α и $\alpha+\Delta\alpha$. Уравнения этих кривых будут

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0, \tag{62}$$

$$f(x,\ y,\ \alpha+\Delta\alpha)=0. \tag{66}$$

Допустим, что эти кривые пересекаются, и найдём точку их пересечения. Для этого надо решить совместно уравнения (62) и (66). Это совместное решение даёт, вообще говоря, одну или несколько систем значений x и y, которые и будут служить координатами точек пересечения наших кривых. Если мы теперь будем уменьшать величину $\Delta\alpha$, приближая её к нулю, то точки пересечения наших кривых будут перемещаться по кривой (62), приближаясь, вообще говоря, к некоторым предельным положениям на кривой (62). Эти предельные положения точек пересечения кривых (62) и (66) называют предельными точками кривой (62).



Черт. 93.

Чтобы найти предельные точки кривой, надо из уравнений (62) и (66) найти значения x и y и вычислить пределы этих значений, когда $\Delta\alpha$ стремится к нулю.

Систему уравнений (62) и (66) можно заменить равносильной ей системой

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0 \tag{62}$$

и

$$f(x,\ y,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ y,\ \alpha)=0, \tag{67}$$

где уравнение (67), очевидно, является следствием уравнений (62) и (66), так как получается почленным вычитанием этих уравнений первого из второго. К левой части уравнения (67) можно применить теорему о конечном приращении:

$$f(x,\ y,\ \alpha+\Delta\alpha)-f(x,\ y,\ \alpha)=\Delta\alpha f'_{\alpha}(x,\ y,\ \alpha+\theta\Delta\alpha),$$

где $0<\theta<1$ и f'_α означает производную функции f по α. В силу этого равенства уравнение (67) можно заменить следующим:

$$f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)=0. \tag{67'}$$

Для нахождения координат предельных точек кривой (62) надо, таким образом, найти x и y из уравнений (62) и (67') и перейти к пределу при $\Delta\alpha$, стремящемся к нулю.

Но если f'_α есть функция, непрерывная относительно своих аргументов, то такой переход к пределу можно совершить прямо в равенствах (62) и (67'). Замечая, что $\lim f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha+\theta\Delta\alpha)=f'_\alpha(x,\ y,\ \alpha)$, мы видим, что координаты предельных точек кривой (62), в случае, когда такие точки существуют, должны удовлетворять уравнениям

$$f(x,\ y,\ \alpha)=0, \tag{62}$$

$$\frac{\partial f(x,\ y,\ \alpha)}{\partial\alpha}=0. \tag{68}$$

Мы пришли к той же системе уравнений, что и полученная выше при определении огибающей семейства.

§ 11. Касательная прямая к пространственной кривой. Нормальная плоскость.

Кривая линия в пространстве представляется, как мы знаем (т. I, стр. 182), двумя уравнениями между координатами x, y, z точки пространства:

$$F_1(x,\ y,\ z)=0,\quad F_2(x,\ y,\ z)=0. \tag{69}$$

Можно представить пространственную кривую и уравнениями в параметрической форме, подобно тому, как мы это делали в случае плоской кривой (т. I, стр. 442). Если одну из координат, например x, представить в виде некоторой функции параметра t, $x=\varphi(t)$, то, подставляя это выражение в уравнения (69) и разрешая их относительно y и z, мы выразим y и z также в виде некоторых функций того же параметра:

$$y=\psi(t),\quad z=\chi(t).$$

Наша кривая представится в этом случае уравнениями в параметрической форме:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t). \tag{70}$$

Если из уравнений (70) мы исключим параметр t, то получим два уравнения между координатами x, y, z, т. е. вернёмся к первоначальному представлению кривой двумя уравнениями.

Будем предполагать в дальнейшем, что кривая дана параметрическими уравнениями (70), в которых функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ суть

функции непрерывные, допускающие производные до третьего порядка включительно, причём $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ не обращаются одновременно в нуль. Возьмём на кривой две точки M и M', соответствующие значениям параметра t и $t+\Delta t$. Координаты этих точек пусть будут x, y, z и $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$. Уравнения прямой, проходящей через эти точки, т. е. хорды MM', очевидно, имеют вид

$$\frac{X-x}{\Delta x}=\frac{Y-y}{\Delta y}=\frac{Z-z}{\Delta z}, \tag{71}$$

где X, Y, Z — текущие координаты.

Если мы будем уменьшать величину Δt, приближая её к нулю, то точка M' будет перемещаться по данной кривой, приближаясь к точке M. Прямая (71) будет при этом также менять своё положение в пространстве, стремясь в силу сделанных предположений о функциях $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ к некоторому предельному положению. В самом деле, деля все знаменатели в уравнениях (71) на Δt, получим:

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Переходя к пределу при Δt, стремящемся к нулю, будем иметь:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}}=\frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}. \tag{72}$$

Это предельное положение секущей MM', когда точка M' стремится к M, называют касательной к кривой в точке M.

Уравнения (72) можно заменить, очевидно, следующими:

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}.$$

Обозначая через α, β, γ углы, составленные касательной с осями координат, имеем:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

и так как $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=ds$, где ds — элемент дуги пространственной кривой (70) (т. I, стр. 454), то

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}. \tag{73}$$

Прямую, перпендикулярную к касательной и проходящую через точку прикосновения, называют нормалью к кривой. Очевидно, что в каждой точке пространственной кривой можно провести бесчисленное множество нормалей. Все они лежат в одной плоскости, перпендикулярной к касательной. Эту плоскость называют *нормальной плоскостью*. Уравнение нормальной плоскости, как плоскости, перпендикулярной к прямой (72), есть

$$(X-x)\frac{dx}{dt}+(Y-y)\frac{dy}{dt}+(Z-z)\frac{dz}{dt}=0, \tag{74}$$

или, обозначая производные $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ соответственно через x', y', z':

$$(X-x)x'+(Y-y)y'+(Z-z)z'=0. \tag{74'}$$

§ 12. Соприкасающаяся плоскость. Главная нормаль и бинормаль.

Соприкасающейся плоскостью к пространственной кривой называют предельное положение плоскости, проходящей через три бесконечно близкие точки кривой.

Составим уравнение соприкасающейся плоскости. Пусть кривая дана параметрическими уравнениями

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\quad z=\chi(t), \tag{75}$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные производные первого и второго порядков. Возьмём на этой кривой три точки M, M' и M'', соответствующие значениям параметра t, t' и t''. Уравнение всякой плоскости имеет вид:

$$AX+BY+CZ+D=0. \tag{76}$$

Мы должны определить коэффициенты A, B, C и D так, чтобы плоскость (76) прошла через точки M, M' и M''. Очевидно, мы должны для этого определить A, B, C и D из уравнений

$$\left.\begin{aligned} A\varphi(t)+B\psi(t)+C\chi(t)+D&=0,\\ A\varphi(t')+B\psi(t')+C\chi(t')+D&=0,\\ A\varphi(t'')+B\psi(t'')+C\chi(t'')+D&=0. \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Перейдя затем к пределу при t' и t'', стремящихся к t, мы и получим коэффициенты уравнения соприкасающейся плоскости.

Обозначая $A\varphi(t)+B\psi(t)+C\chi(t)+D$ через $F(t)$, мы можем предыдущие равенства представить в форме:

$$F(t)=0,\quad F(t')=0 \text{ и } F(t'')=0. \tag{78}$$

Эти равенства показывают, что функция $F(t)$ обращается в нуль при трёх значениях параметра t, t' и t'', а потому в силу теоремы Ролля

первая производная $F'(t)$ должна дважды обратиться в нуль при значениях параметра t_1 и t_2, где $t<t_1<t'$ и $t'<t_2<t''$ (если $t<t'<t''$), т. е.

$$F'(t_1)=0, \quad F'(t_2)=0,$$

а из этих равенств, в силу той же теоремы, следует, что вторая производная $F'(t)$ должна обратиться в нуль при $t=t_2'$, где $t_1<t_2'<t_2$, т. е.

$$F''(t_2')=0.$$

Таким образом, равенства (78) можно заменить следующими:

$$F(t)=0, \ F'(t_1)=0, \ F''(t_2')=0. \tag{79}$$

Будем теперь приближать точки M' и M'' к точке M. Значения t' и t'' будут при этом стремиться к t, к тому же пределу будут, очевидно, стремиться и величины t_1 и t_2'. А потому в пределе, при t' и t'', стремящихся к t, равенства (79) дадут:

$$F(t)=0, \quad F'(t)=0, \quad F''(t)=0. \tag{79'}$$

Можно показать, что при некоторых дополнительных условиях, на которых мы не будем останавливаться, отношения коэффициентов A, B, C, D будут стремиться к определённым пределам, удовлетворяющим предельным равенствам (79') или в раскрытой форме:

$$\begin{aligned} A\varphi(t)+B\psi(t)+C\chi(t)+D&=0,\\ A\varphi'(t)+B\psi'(t)+C\chi'(t)&=0,\\ A\varphi''(t)+B\psi''(t)+C\chi''(t)&=0, \end{aligned}$$

или, что то же:

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0,\\ Ax'+By'+Cz'&=0,\\ Ax''+By''+Cz''&=0. \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Определив из этих равенств отношения коэффициентов A, B, C и D и подставив результат в уравнение (76), мы получим уравнение соприкасающейся плоскости. Вычитая первое из равенств (80) из уравнения (76), получим уравнение соприкасающейся плоскости в виде

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

причём отношения коэффициентов A, B, C найдутся из двух последних равенств (80):

$$A:B:C=(y'z''-z'y''):(z'x''-x'z''):(x'y''-y'x''). \tag{81}$$

Из определения соприкасающейся плоскости непосредственно ясно, что эта плоскость проходит через касательную прямую. Этот же факт подтверждается вторым из равенств (80).

Ту из нормалей пространственной кривой, которая лежит в соприкасающейся плоскости, называют *главной нормалью* кривой. Нормаль к кривой, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости, называют *бинормалью*. Направляющие косинусы λ, μ и ν бинормали, очевидно, найдутся из равенств:

$$\lambda : \mu : \nu = (y'z'' - z'y'') : (z'x'' - x'z'') : (x'y'' - y'x'').$$

Направляющие косинусы l, m, n главной нормали мы найдём из условий её перпендикулярности к касательной прямой и к бинормали. Эти условия дают:

$$lx' + my' + nz' = 0,$$
$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$l : m : n = (\nu y' - \mu z') : (\lambda z' - \nu x') : (\mu x' - \lambda y'). \qquad (82)$$

Особенно простые выражения для l, m и n мы получаем в том случае, когда за параметр принята длина дуги кривой. В самом деле, в этом случае имеем:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Дифференцируя это равенство, находим:

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

Это равенство, вместе с третьим из равенств (80), показывает, что прямая с угловыми коэффициентами x'', y'', z'' перпендикулярна к касательной и к бинормали, т. е. есть главная нормаль, а потому

$$l : m : n = x'' : y'' : z''. \qquad (83)$$

Плоскость, проходящую через бинормаль и касательную прямую, называют *спрямляющей плоскостью*. Её уравнение, очевидно, есть

$$l(X - x) + m(Y - y) + n(Z - z) = 0.$$

Спрямляющая, соприкасающаяся и нормальная плоскости образуют прямой трёхгранный угол, рёбрами которого являются касательная, главная нормаль и бинормаль кривой. Направления этих прямых носят название *главных направлений* в данной точке кривой.

Пример. Цилиндрической винтовой линией называют линию, лежащую на поверхности прямого круглого цилиндра и пересекающую все его образующие под постоянным углом. Винтовую линию можно образовать из гипотенузы прямоугольного треугольника ABC, навивая его на цилиндр так, чтобы катет AC навивался на основание цилиндра. Примем ось цилиндра за ось z, и пусть вершина A нашего треугольника совпадает с точкой встречи цилиндра с осью x (черт. 94).

Примем за параметр t угол плоскости, проходящей через какую-либо точку M винтовой линии и ось z, с плоскостью zx и обозначим через r радиус цилиндра, а через α — угол CAB нашего треугольника; тогда уравнения винтовой линии будут

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t,$$

$$z = kt,$$

где

$$k = r\operatorname{tg}\alpha.$$

Найдём для этой линии угловые коэффициенты касательной, бинормали и главной нормали. Дифференцируя уравнения кривой два раза, получим:

$$x' = -r\sin t, \quad y' = r\cos t, \quad z' = k,$$

$$x'' = -r\cos t, \quad y'' = -r\sin t, \quad z'' = 0.$$

Угловые коэффициенты касательной суть

$$x' : y' : z' = -r\sin t : r\cos t : k.$$

Угловые коэффициенты бинормали суть:

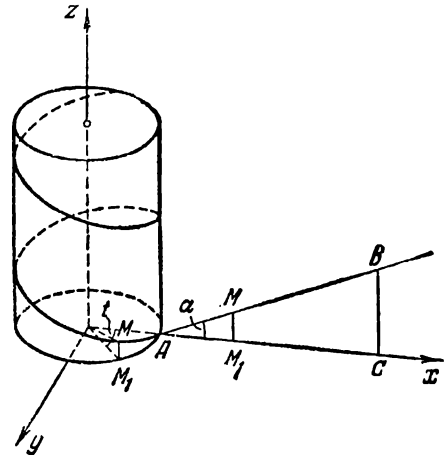
$$(y'z'' - z'y'') : (z'x'' - x'z'') :$$

$$: (x'y'' - y'x'') = k\sin t : -k\cos t : r,$$

или

$$\lambda : \mu : \nu = k\sin t : -k\cos t : r.$$

Отсюда следует, что бинормаль образует с осью z, и значит с образующими цилиндра постоянный угол.



Черт. 94.

Угловые коэффициенты главной нормали найдём по формулам (82):

$$l : m : n =$$

$$= (r^2\cos t + k^2\cos t) : (k^2\sin t + r^2\sin t) : (kr\sin t\cos t - kr\sin t\cos t),$$

следовательно,

$$l = \cos t, \quad m = \sin t, \quad n = 0;$$

эти равенства показывают, что главная нормаль винтовой линии пересекает ось z и перпендикулярна к ней.

§ 13. Кривизна и кручение пространственной кривой.

Для кривизны пространственной кривой можно дать то же определение, которое мы давали и для кривизны плоской кривой. Мы назовём *кривизной* кривой в данной точке тот предел, к которому стремится отношение угла τ между касательными в двух близких точках кривой M и M' к длине дуги $\overset{\frown}{MM'}$, когда точка M' стремится по кривой к точке M и, следовательно, дуга $\overset{\frown}{MM'}$ стремится к нулю.

Обозначая кривизну буквою K и длину дуги $\overset{\smile}{MM}$ через Δs, имеем:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\tau}{\Delta s}. \tag{84}$$

Для вычисления кривизны кривой в данной точке, обозначим косинусы углов касательной с осями координат в точке M через α, β, γ, а в точке M' — через $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$, $\gamma + \Delta\gamma$. Угол τ между этими касательными мы найдём по формуле:

$$\cos\tau = \alpha(\alpha + \Delta\alpha) + \beta(\beta + \Delta\beta) + \gamma(\gamma + \Delta\gamma).$$

Но

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

и

$$(\alpha + \Delta\alpha)^2 + (\beta + \Delta\beta)^2 + (\gamma + \Delta\gamma)^2 = 1;$$

из двух последних равенств получим:

$$2[\alpha(\alpha + \Delta\alpha) + \beta(\beta + \Delta\beta) + \gamma(\gamma + \Delta\gamma)] = 2 - (\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2)$$

или

$$2\cos\tau = 2 - (\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2).$$

Отсюда

$$2(1 - \cos\tau) = \Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2$$

или

$$2\sin\frac{\tau}{2} = \sqrt{\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2}.$$

Далее,

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\tau}{2}}{\Delta s} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\frac{\tau}{2}}{\sin\frac{\tau}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \frac{2\sin\frac{\tau}{2}}{\Delta s}$$

или

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sqrt{\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2}}{\Delta s} = \frac{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}}{s'}, \tag{85}$$

где α', β', γ', s' суть производные функций α, β, γ, s по параметру t.

В частности, если за параметр t принята длина дуги s, то мы имеем

$$s' = 1, \quad \alpha' = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \beta' = \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \gamma' = \frac{d^2z}{ds^2},$$

и формула (85) даёт:

$$K = \sqrt{\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{d^2z}{ds^2}}.$$

Величину $R = \frac{1}{K}$ называют *радиусом кривизны* кривой в точке M.

Кроме кривизны, для пространственной кривой устанавливают ещё понятие *кручения*, или второй кривизны, которое должно характе-

ризовать степень отклонения пространственной кривой от плоской линии. Чтобы охарактеризовать это отклонение, заметим, что для плоской линии соприкасающаяся плоскость, как следует из её определения, совпадает с плоскостью этой линии. Чем более отклоняется наша линия от плоской на данном участке дуги $\overset{\smile}{MM'}$, тем на больший угол отклоняется соприкасающаяся плоскость при переходе от точки M к точке M'. Поэтому за меру кручения кривой в данной точке принимается предел отношения угла между соприкасающимися плоскостями в точках M и M' к длине дуги $\overset{\smile}{MM'}$, когда эта последняя стремится к нулю. Замечая, что угол между соприкасающимися плоскостями измеряется углом между бинормалями, и обозначая этот угол через φ, величину кручения — через $\frac{1}{T}$ и длину дуги $\overset{\smile}{MM'}$ — через Δs, имеем

$$\frac{1}{T} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s}.$$

Величина T носит название *радиуса кручения*. Если обозначить через λ, μ, ν косинусы углов бинормали с осями координат, то для вычисления величины кручения придётся текстуально повторить те же вычисления, которые мы делали при вычислении кривизны.

Эти вычисления дадут нам:

$$\frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}}{s'}. \tag{86}$$

Пример. Рассмотрим винтовую линию

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = kt.$$

Мы имеем:

$$\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = -\frac{r\sin t}{\sqrt{r^2 + k^2}},$$

$$\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{r\cos t}{\sqrt{r^2 + k^2}},$$

$$\gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}};$$

$$\alpha' = -\frac{r\cos t}{\sqrt{r^2 + k^2}}, \qquad \beta' = -\frac{r\sin t}{\sqrt{r^2 + k^2}}, \qquad \gamma' = 0;$$

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \frac{r^2}{r^2 + k^2}.$$

Далее,

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 + k^2,$$

а потому

$$\frac{1}{R} = \frac{r}{r^2 + k^2},$$

т. е. кривизна винтовой линии постоянна.

Вычислим кручение винтовой линии.

Мы имеем по предыдущему (стр. 423):

$$\lambda : \mu : \nu = k \sin t : (-k \cos t) : r;$$

отсюда

$$\lambda = \frac{k \sin t}{\sqrt{k^2 + r^2}}, \qquad \mu = -\frac{k \cos t}{\sqrt{k^2 + r^2}}, \qquad \nu = \frac{r}{\sqrt{k^2 + r^2}}.$$

Следовательно,

$$\lambda' = \frac{k \cos t}{\sqrt{k^2 + r^2}}, \qquad \mu' = \frac{k \sin t}{\sqrt{k^2 + r^2}}, \qquad \nu' = 0,$$

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \frac{k^2}{k^2 + r^2},$$

а потому по формуле (86) находим:

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{k^2 + r^2}.$$

Следовательно, кручение винтовой линии есть также величина постоянная.

§ 14. Системы поверхностей в пространстве.

Уравнение между тремя координатами в пространстве представляет, вообще говоря, некоторую поверхность. Если это уравнение, кроме текущих координат, содержит параметры α, β, ..., могущие принимать различные значения, то при различных значениях этих параметров мы будем получать различные поверхности. Совокупность всех поверхностей, соответствующих всевозможным значениям параметров, носит название *семейства поверхностей*, зависящего от этих параметров.

Рассмотрим семейство поверхностей с одним параметром

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \tag{87}$$

где α — параметр семейства, F — функция, допускающая непрерывные частные производные первого порядка по всем аргументам. Возьмём две поверхности этого семейства, соответствующие значениям параметра α и $\alpha + \Delta\alpha$. Их уравнения

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{87}$$

и

$$F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0. \tag{88}$$

Если эти две поверхности пересекаются, то линия их пересечения представляется совокупностью уравнений (87) и (88). Вычитая из второго уравнения первое, получим:

$$F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, z, \alpha) = 0. \tag{89}$$

Система уравнений (87) и (88) равносильна системе уравнений (87) и (89); уравнение (89) можно заменить следующим:

$$F'_\alpha(x, y, z, \alpha + \theta\,\Delta\alpha) = 0, \tag{90}$$

где $0 < \theta < 1$.

Уравнения (87) и (90) представляют линию пересечения поверхностей (87) и (88). Будем теперь искать предельное положение этой линии пересечения при $\Delta\alpha \to 0$.

Предполагая функцию F'_α непрерывной относительно всех своих аргументов и искомое предельное положение существующим, мы можем совершить переход к пределу непосредственно в уравнении (90). Таким образом, предельная линия должна удовлетворять уравнениям

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, \alpha) &= 0, \\ \frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Эта линия носит название *характеристики* семейства. Геометрическое место характеристик семейства образует некоторую поверхность, которая, как мы покажем, при некоторых условиях (неявно используемых в доказательстве) касается каждой поверхности семейства вдоль её характеристики и потому носит название *огибающей семейства поверхностей*. Уравнение этой огибающей мы, очевидно, получим, исключая параметр α из уравнений (91).

Чтобы доказать, что огибающая касается всех поверхностей семейства, покажем, что нормаль огибающей семейства в произвольной её точке совпадает с нормалью к соответствующей поверхности семейства. В § 9 гл. IV были найдены косинусы углов нормали к поверхности с осями координат:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \tag{92}$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Чтобы найти величины p и q, дифференцируем равенство (87) сначала по x, потом по y, считая α постоянным:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Из этих равенств определим p и q.

Косинусы углов нормали к огибающей с осями координат выразятся теми же формулами (92), в которых частные производные p и q получатся дифференцированием уравнения (87) в предположении,

что α есть функция от x и y, определяемая равенствами (91). Дифференцируя (87) в этом предположении сначала по x, потом по y, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}p+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}q+\frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}=0.$$

Но в силу второго из равенств (91) эти уравнения равносильны уравнениям (93). Отсюда вытекает совпадение нормали к огибающей в каждой её точке с нормалью к поверхности семейства (87), проходящей через эту точку.

Совокупность всех характеристик образует на огибающей поверхности семейство линий, зависящее от одного параметра. В самом деле, каждому значению параметра α соответствует своя поверхность семейства (87) и на ней своя характеристика. Относительно этого семейства линий на огибающей поверхности можно поставить тот же вопрос, какой мы ставили относительно семейства кривых на плоскости: найти на огибающей поверхности линию, которая касалась бы всех характеристик, т. е. каждая точка которой была бы точкой прикосновения к ней одной из характеристик. Эта линия носит название *ребра возврата* огибающей поверхности. Такой линии, вообще говоря, может и не существовать (так же как и для семейства плоских кривых), но в том случае, когда она существует, можно дать весьма простой способ её отыскания. В самом деле, координаты каждой точки ребра возврата удовлетворяют уравнениям (91), так как эта точка лежит на огибающей поверхности. Но различным точкам ребра возврата соответствуют различные значения α. Следовательно, ребро возврата представляется теми же уравнениями (91), что и характеристика, но в этих уравнениях α должно рассматриваться, как некоторая функция координат x, y и z. Чтобы определить эту функцию, остаётся потребовать, чтобы касательная к ребру возврата в каждой её точке совпадала с касательной к характеристике, проходящей через эту точку.

Угловые коэффициенты касательной к кривой, как мы знаем, пропорциональны дифференциалам dx, dy и dz. При этом для касательной к характеристике эти дифференциалы должны быть найдены из уравнений (91) при постоянном α, а для касательной к ребру возврата dx, dy и dz найдутся из уравнений (91), в которых α есть некоторая функция координат x, y и z. Для касательной к характеристике имеем, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,\\&\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\,\partial x}dx+\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\,\partial y}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\,\partial z}dz=0.\end{aligned}\right\}\qquad(94)$$

Отсюда найдём отношения $dx:dy:dz$.

Для касательной к ребру возврата отношения $dx : dy : dz$ найдутся из уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial \alpha}d\alpha=0,\\ &\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\,\partial x}dx+\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\,\partial y}dy+\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha\,\partial z}dz+\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}d\alpha=0. \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

В первом из равенств (95) член $\frac{\partial F}{\partial \alpha}d\alpha$ исчезает в силу второго из равенств (91). Далее, отношения $dx : dy : dz$ в обоих случаях должны быть, по условию, одинаковы, следовательно, равенства (94) и (95) должны иметь место при одних и тех же значениях этих отношений. Вычитая из второго равенства системы (95) второе равенство системы (94), получим:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}=0. \tag{96}$$

Таким образом, ребро возврата должно удовлетворять уравнениям (91) и (96), т. е. уравнениям

$$F(x,\ y,\ z,\ \alpha)=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial \alpha}=0,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}=0.$$

Не вдаваясь в более подробное исследование всех могущих здесь представиться возможностей, мы ограничимся рассмотрением нескольких примеров нахождения огибающих различных семейств поверхностей и их рёбер возврата.

Пример 1. Рассмотрим семейство сфер постоянного радиуса R, центры которых лежат в плоскости xOy на окружности радиуса r ($r > R$) с центром в начале координат. Уравнение семейства представится в виде

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=R^2, \tag{97}$$

где α и β связаны соотношением

$$\alpha^2+\beta^2=r^2. \tag{98}$$

Дифференцируя (97) по α, получаем:

$$(x-\alpha)+(y-\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}=0.$$

Из равенства (98) имеем

$$\alpha+\beta\frac{d\beta}{d\alpha}=0.$$

Исключив из двух последних равенств $\frac{d\beta}{d\alpha}$, получим

$$\frac{x-\alpha}{\alpha}=\frac{y-\beta}{\beta},$$

откуда

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}. \tag{99}$$

Остаётся исключить α и β из равенств (97), (98) и (99). Положим

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{1}{u};$$

тогда

$$\alpha = ux, \quad \beta = uy$$

и в силу (98)

$$u^2 = \frac{r^2}{x^2 + y^2}. \tag{100}$$

Уравнение (97) даёт:

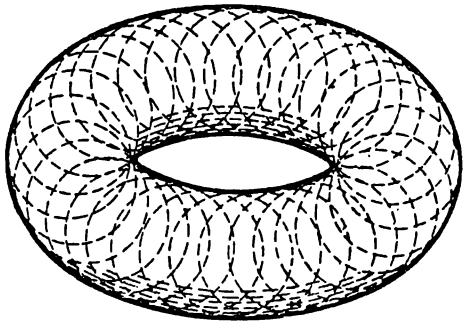
$$(x^2 + y^2)(1 - u)^2 + z^2 - R^2 = 0. \tag{101}$$

Исключив u из (100) и (101), после упрощений получим:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + r^2 - R^2)^2 - 4r^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Поверхность, представляемая этим уравнением, носит название *тор*.

Характеристиками здесь являются те большие круги сфер (97), плоскости которых проходят через ось z. Вся поверхность тора образуется, таким образом, вращением окружности радиуса R вокруг не пересекающей её оси, лежащей в её плоскости. Очевидно, что характеристики в данном случае (т. е. при $r > R$) не имеют общих точек и на торе не существует линии, которая касалась бы всех характеристик, т. е. не существует ребра возврата (черт. 95).



Черт. 95.

Если $r < R$, то все характеристики и, следовательно, все сферы семейства будут проходить через две фиксированные точки на оси z:

$$(0,\ 0,\ \pm\sqrt{R^2 - r^2}).$$

Следовательно, вместо ребра возврата мы будем иметь две точки.

При $r = R$ обе эти точки сливаются в одну (начало координат).

Пример 2. Рассмотрим семейство плоскостей

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{102}$$

где A, B, C и D — произвольные непрерывные функции параметра α, допускающие непрерывные же производные по α до второго порядка.

Дифференцируя (102) по α, получим:

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0. \tag{103}$$

Исключив α из уравнений (102) и (103), получим уравнение искомой огибающей. При заданном фиксированном значении α уравнения (102) и (103) представляют характеристику. Так как оба эти уравнения — линейные, то характеристиками служат прямые линии. Следовательно, искомая огибающая есть некоторая линейчатая поверхность. Она носит название *развёртывающейся поверхности*. При непрерывном изменении параметра α плоскость (102) непрерывно перемещается в пространстве, касаясь огибающей вдоль характеристики. При перемещении плоскости (102) перемещается и характеристика и своим движением образует развёртывающуюся поверхность.

Дифференцируя по α равенство (103), получаем

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0. \tag{104}$$

Уравнения (102), (103) и (104) по исключении из них параметра α дадут уравнения ребра возврата развёртывающейся поверхности. Разрешая уравнения (102), (103) и (104) относительно x, y и z, можно выразить их через α и получить параметрические уравнения ребра возврата

$$x = \varphi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha), \quad z = \chi(\alpha).$$

Не выполняя практически этого разрешения, можно считать координаты точек ребра возврата x, y и z неявными функциями параметра α, определяемыми системой уравнений (102), (103) и (104). Пользуясь этими уравнениями, можно установить расположение плоскостей семейства (102) относительно ребра возврата. Докажем, что плоскости семейства (102) являются соприкасающимися плоскостями ребра возврата.

Так как и соприкасающаяся плоскость и плоскость семейства (102) имеют общую точку на ребре возврата, то для их совпадения достаточно их параллельности. Уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид (§ 12):

$$(y'z'' - y''z')(X - x) + (z'x'' - z''x')(Y - y) + (x'y'' - x''y')(Z - z) = 0.$$

Вычислим производные x', y', z', x'', y'', z''. Как мы уже указали, для точек ребра возврата мы можем считать x, y и z неявными функциями от α, определяемыми уравнениями (102), (103) и (104). Дифференцируя в этом предположении (102), получим:

$$Ax' + By' + Cz' + A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Отсюда в силу (103)

$$Ax' + By' + Cz' = 0. \tag{105}$$

Дифференцируя (103), имеем

$$A'x' + B'y' + C'z' + A''x + B''y + C''z + D'' = 0.$$

Отсюда в силу (104)

$$A'x' + B'y' + C'z' = 0. \tag{106}$$

Наконец, дифференцируя (105), имеем

$$Ax'' + By'' + Cz'' + A'x' + B'y' + C'z' = 0.$$

Отсюда в силу (106)

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \tag{107}$$

Из равенств (105) и (107) находим

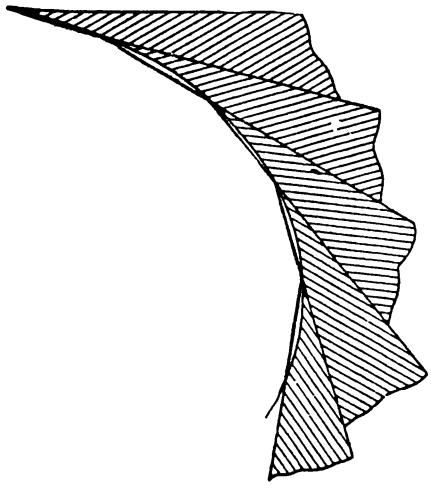
$$A : B : C = (y'z'' - y''z') : (z'x'' - z''x') : (x'y'' - x''y'),$$

что и доказывает наше утверждение.

Нетрудно показать, что и обратно: совокупность всех соприкасающихся плоскостей произвольной пространственной кривой образует семейство плоскостей с одним параметром, огибающей которого является развёртывающаяся поверхность — геометрическое место всех касательных к данной кривой. В самом деле, составив уравнение семейства соприкасающихся плоскостей данной кривой, легко убедиться в том, что характеристиками этого семейства служат касательные к данной кривой. Отметим важное свойство, которым обладает развёртывающаяся поверхность по отношению к своим касательным плоскостям. Мы видели выше, что для произвольного семейства поверхностей с одним параметром каждая поверхность семейства касается огибающей вдоль характеристики. Следовательно, плоскость семейства (102) касается развёртывающейся поверхности вдоль всей образующей. Другими

словами, во всех точках одной и той же прямолинейной образующей развёртывающейся поверхности касательная плоскость к этой поверхности одна и та же. Это свойство характеризует развёртывающуюся поверхность среди всех вообще линейчатых поверхностей.

Название «развёртывающаяся поверхность» объясняется тем, что каждую такую поверхность, если она будет осуществлена из гибкого и нерастяжимого материала, можно непрерывным изгибанием без складок и разрывов развернуть на плоскость.



Черт. 96.

В этом можно убедиться, хотя и не вполне строго, следующими рассуждениями. Возьмём произвольную пространственную кривую и впишем в неё какую-либо ломаную линию. Продолжим неограниченно звенья этой ломаной, через каждую пару продолженных соседних звеньев проведём плоскость и ограничим её лишь частью, лежащей между двумя последовательными секущими (черт. 96). В результате мы получим некоторую поверхность, состоящую из последовательности плоских пластинок. Вращая каждую пластинку около её ребра, можно заставить все пластинки совместиться в одной плоскости, т. е. эту поверхность можно развернуть на плоскость. Увеличивая число звеньев ломаной так, чтобы длины всех звеньев стремились к нулю, легко заметить, что все продолженные звенья, т. е. секущие, будут стремиться к касательным к кривой, а наша пластинчатая поверхность — к развёртывающейся поверхности. При этом свойство пластинчатой поверхности развёртываться на плоскость будет сохраняться в течение всего процесса увеличения числа звеньев. Можно предвидеть, что это свойство сохраняется и в пределе, т. е. для развёртывающейся поверхности. Строгое доказательство этого свойства развёртывающихся поверхностей даётся в курсах теории поверхностей.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Кривую, данную параметрическими уравнениями

$$x = \frac{3a\lambda}{1+\lambda^3}, \qquad y = \frac{3a\lambda^2}{1+\lambda^3},$$

называют декартовым листом. Написать уравнение касательной к этой кривой в точке, определённой значением $\lambda = \lambda_0$.

Отв. $(\lambda^4 - 2\lambda)x - (2\lambda^3 - 1)y + 3a\lambda^2 = 0$.

При λ, стремящемся к -1, x и y стремятся к ∞, а уравнение касательной при $\lambda = -1$ обращается в $x + y + a = 0$ и представляет касательную в бесконечно удалённой точке, т. е. асимптоту кривой.

2. Называя сопряжёнными те точки строфоиды

$$\rho = a\frac{1 \pm \sin\varphi}{\cos\varphi},$$

которые соответствуют различным знакам $\pm$ в числителе при одинаковом значении φ, найти: а) геометрическое место точек пересечения касательных

к строфоиде в парах сопряжённых точек; б) геометрическое место точек пересечения нормалей в парах сопряжённых точек.

Отв. а) циссоида Диоклеса: $y^2(2a-x)=(x-a)^3$; б) парабола.

3. Найти подкасательную кривой $x(x^2+y^2)=2ry^2$ (циссоиды Диоклеса).

Отв. $s_t=\dfrac{x(2r-x)}{3r-x}$, т. е. s_t есть четвёртая пропорциональная к трём известным отрезкам. Ферма принадлежит построение касательных к циссоиде, основывающееся на этом свойстве.

4. Найти длину касательной к кривой (трактрисе)

$$x=a\ln\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}+a\cos\lambda;\quad y=a\sin\lambda.$$

Отв. $t=a$.

5. Вычислить длину отрезка касательной к астроиде $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, заключённого между осями координат.

Отв. a.

6. На кривой $x^2y=a^2(a-y)$ (аньезиана) найти точку, в которой поднормаль имеет наибольшую величину.

Отв. $x=a,\ y=\dfrac{a}{2}$.

7. Найти полярную поднормаль кривой $\rho=\dfrac{l}{\cos\varphi}+a$ (конхоида Никомеда).

Отв. $\Sigma_n=\dfrac{l\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$. Вывести отсюда способ построения касательной к конхоиде.

8. Найти геометрическое место концов полярных подкасательных и поднормалей логарифмической спирали $r=e^{k\varphi}$.

Отв. Логарифмическая спираль, совпадающая с данной.

9. Найти геометрическое место концов полярных поднормалей кривой $r=a-b\varphi^2$ (спираль Галилея).

Отв. Спираль Архимеда.

10. Найти геометрическое место концов полярных поднормалей «параболической» спирали $(r-a)^2=2ap\varphi$.

Отв. $r^2\left(\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{ap}{2}$ (жезл).

11. Найти геометрическое место концов полярных: а) подкасательных; б) поднормалей кривой $\rho=a\dfrac{1\pm\sin\varphi}{\cos\varphi}$ (строфоиды).

Отв. а) Кардиоида $\rho=a(1\pm\sin\varphi)$; б) две параболы: $x^2\pm2ay^2-a^2=0$.

Найти особые точки и асимптоты кривых:

12. $x^2-ax^2y-by^3=0$.

Отв. Тройная точка в начале координат.

13. $x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$.

Отв. Три двойные точки $(a,\ 0)$, $(-a,\ 0)$, $(0,\ -a)$.

14. $y^3(2x-a)+a^2x^2-x^4=0$.

Отв. В начале координат точка возврата.

Уравнения асимптот $x=\dfrac{a}{2}$, $y=2^{-\frac{1}{3}}\left(x+\dfrac{a}{6}\right)$.

15. $y(x^2-a^2)=a(x^2+a^2)$.

Отв. Уравнения асимптот $x=\pm a$, $y=a$.

16. $a^2y^2 - x^2y^2 - a^2x^2 = 0$.

Отв. Двойная точка (0, 0). Асимптоты: $x = \pm a$.

17. Найти радиус кривизны кривой

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

(лемниската Бернулли).

Отв. $\rho = \dfrac{2a^2}{3\sqrt{x^2 + y^2}}$.

18. Вычислить радиус кривизны кривой, данной параметрическими уравнениями $x = a(2\cos\lambda + \cos 2\lambda)$, $y = a(2\sin\lambda - \sin 2\lambda)$ (кривая Штейнера).

Отв. $|\rho| = 8a\sin\dfrac{3\lambda}{2}$.

19. Найти огибающую семейства прямых $(1 + 7\alpha^2)x - 6\alpha^3 y - 2r = 0$.

Отв. $y^2 = \dfrac{7^3 x^2}{3^5(2r - x)}$ (циссоида Диоклеса).

20. Найти огибающую семейства парабол с общей осью и общей директрисой.

Отв. Пара прямых, делящих пополам углы между директрисой и осью.

21. Найти огибающую семейства эллипсов с постоянной суммой осей:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(L - a)^2} = 1.$$

Отв. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = L^{\frac{2}{3}}$ (астроида).

22. Концы отрезка постоянной длины a скользят по осям координат. Какую кривую огибает этот отрезок при таком движении?

Отв. Астроиду: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

23. Найти огибающую семейства окружностей, построенных на радиусах-векторах параболы, как на диаметрах.

Отв. Касательная в вершине параболы.

24. Найти огибающую семейства окружностей, построенных на радиусах-векторах эллипса, как на диаметрах.

Отв. Окружность, описанная около эллипса.

25. Ко всем точкам кривой, данной параметрическими уравнениями в полярных координатах (r, φ)

$$r^2 = a^2(5 + 4\cos 3\lambda), \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\lambda - \sin 2\lambda}{2\cos\lambda + \cos 2\lambda}$$

(кривая Штейнера, задача 18), проведены радиусы-векторы из полюса и на них, как на диаметрах, построены окружности. Найти огибающую семейства этих окружностей.

Отв. $r = a\cos 3\varphi$ (трёхлепестковая роза).

26. Определить кривизну и кручение конического винта

$$x = t\cos(m\ln t), \quad y = t\sin(m\ln t), \quad z = nt.$$

Отв. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{mp^2\sqrt{1 + m^2}}{t}$, $\dfrac{1}{T} = \dfrac{mnp^2}{t}$; отсюда $\dfrac{1}{R} : \dfrac{1}{T} = \text{const}$.

27. Найти геометрическое место главных нормалей цилиндрического винта

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = kt.$$

Отв. $z = k\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ (геликоид).

ГЛАВА XII.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

§ 1. Общие понятия.

Отыскание неизвестной функции одного аргумента по данной её производной составляет, как мы знаем, основную задачу интегрального исчисления. Если обозначить данную функцию через $f(x)$, то задача интегрального исчисления состоит в отыскании функции y, удовлетворяющей соотношению

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1}$$

Эту задачу можно обобщить следующим образом.

Прежде всего производная $\frac{dy}{dx}$ неизвестной функции может быть задана выражением вида $f(x, y)$, содержащим не только аргумент x, но и самую неизвестную функцию y. Такое выражение производной мы получали, например, при дифференцировании неявных функций. В таком случае задача будет состоять в отыскании функции y, удовлетворяющей соотношению

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Можно поставить и более общую задачу отыскания функции y одного аргумента x, удовлетворяющей соотношению, которое содержит x, неизвестную функцию y и ряд её производных: y', y'', ..., $y^{(n)}$, т. е. соотношению вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{3}$$

Такое соотношение носит название *дифференциального уравнения*. Равенства (1) и (2) суть частные виды дифференциальных уравнений. Найти все функции y, удовлетворяющие данному дифференциальному уравнению, — значит *проинтегрировать* это уравнение.

Порядок наивысшей производной, входящей в данное уравнение, называют *порядком уравнения*. Таким образом, уравнения (1) и (2) суть уравнения первого порядка, уравнение (3) — n-го порядка.

Функцию y, удовлетворяющую данному дифференциальному уравнению, называют *решением* этого уравнения; если же эта функция будет определена, как неявная функция x, уравнением вида $\varphi(x, y) = 0$, то это уравнение называют *интегралом дифференциального уравнения* (3). Изучение способов отыскания функций, удовлетворяющих данному дифференциальному уравнению, и составляет задачу настоящей главы.

§ 2. Общий и частный интегралы дифференциального уравнения.

Мы знаем, что задача неопределённого интегрирования имеет бесчисленное множество решений, так как для каждой непрерывной функций существует бесчисленное множество первообразных функций, разнящихся одна от другой на постоянное число.

Но эта задача есть, в то же время, задача интегрирования простейшего дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{4}$$

Общее решение уравнения (4) даётся формулой

$$y = \int f(x)\,dx + C, \tag{5}$$

где под $\int f(x)\,dx$ понимается о д н а из первообразных функций $f(x)$; решение содержит одно произвольное постоянное C.

Посмотрим теперь, в какой мере неопределённа общая задача интегрирования дифференциального уравнения n-го порядка

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{3}$$

и сколько постоянных содержит общее решение этого уравнения. С этой целью поступим следующим образом.

Возьмём какую-либо функцию y, зависящую не только от аргумента x, но и от нескольких, например m, произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$. Ради общности определим y как неявную функцию от x и постоянных $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$:

$$f(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_m) = 0. \tag{6}$$

При различных частных значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_m$ равенство (6) определяет вообще различные функции y. Постараемся найти такое соотношение между аргументом x, неизвестной функцией y и различными её производными $y', y'', y''', \ldots$, которому удовлетворяли бы все функции y, определяемые равенством (6), при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_m$. Такое соотношение, очевидно, вовсе не должно содержать этих постоянных. Продиффе-

ренцировав (6) m раз, мы получим ряд новых равенств:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0,\\ &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{\partial^m f}{\partial x^m}+\ \ldots\ +\frac{\partial f}{\partial y}y^{(m)}=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Равенства (7) содержат, вообще говоря, постоянные C_1, C_2, C_3, ..., C_m, и им удовлетворяет любая функция y, определяемая равенством (6). Чтобы получить теперь соотношение между x, y и производными y', y'', y''', ..., не содержащее постоянных C_1, C_2, ..., C_m, мы должны исключить из $m+1$ равенств (6) и (7) m постоянных C_1, C_2, ..., C_m; в результате исключения мы и получим искомое соотношение вида

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(m)})=0, \tag{8}$$

справедливое для любой функции y, определённой равенством (6). Равенство (8) есть, как мы видим, дифференциальное уравнение m-го порядка [1]), причём решениями его служат все функции y, определяемые равенством (6) при всевозможных значениях постоянных C_1, C_2, ..., C_m. В силу этого свойства мы назовём (6) общим интегралом уравнения (8). В соответствии с этим общим интегралом произвольного дифференциального уравнения (3) мы будем называть такое соотношение между x, y и n постоянными C_1, C_2, ..., C_n, которое после n-кратного дифференцирования и исключения постоянных C_1, C_2, ..., C_n приводит нас к данному дифференциальному уравнению (причём меньшее, чем n, число дифференцирований ещё недостаточно для исключения в с е х постоянных C_1, C_2, ..., C_n).

Давая постоянным C_1, C_2, ..., C_n отдельные частные значения, мы будем получать так называемые *частные интегралы*. Нетрудно видеть, какой геометрический смысл имеют общий и частные интегралы дифференциального уравнения.

Пусть общий интеграл уравнения (3) имеет вид:

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)=0. \tag{9}$$

Будем рассматривать x и y как декартовы координаты точки на плоскости, а C_1, C_2, ..., C_n — как произвольные параметры; тогда уравнение (9) представит семейство плоских кривых, зависящее от n параметров. При частных значениях постоянных C_1, C_2, ..., C_n мы будем получать отдельные кривые этого семейства. Эти кривые называют *интегральными кривыми*; уравнения их суть частные инте-

[1]) Мы предполагаем, что без помощи последнего из равенств (7) в с е постоянные C_1, C_2, ... C_m ещё не исключаются.

гралы данного дифференциального уравнения (3). В силу этого уравнение (3) часто называют дифференциальным уравнением семейства кривых, представляемых общим интегралом (9).

Ставя задачу интегрирования дифференциального уравнения, мы и будем понимать её как задачу отыскания общего интеграла этого уравнения. При этом мы молчаливо предполагаем, что такой общий интеграл существует. При известных ограничениях, налагаемых на функцию F, можно действительно показать, что уравнение (3) имеет бесчисленное множество интегралов, удовлетворяющих некоторым наперёд задаваемым условиям. Доказательство этого предложения для уравнений первого порядка будет дано ниже (см. § 9).

Кроме общего и частных интегралов дифференциального уравнения, как мы увидим ниже, могут существовать так называемые *особые интегралы*, которые нельзя получить из общего ни при каких частных значениях произвольных постоянных. Возможность и причину существования таких интегралов мы выясним впоследствии.

Пример 1. Возьмём уравнение

$$y'' + a^2 y = 0. \tag{10}$$

Это уравнение — второго порядка, его общий интеграл имеет вид

$$y = C_1 \sin(ax + C_2). \tag{11}$$

Действительно, чтобы (11) было общим интегралом уравнения (10), нужно, чтобы после двукратного дифференцирования (11) и исключения постоянных C_1 и C_2 мы получили уравнение (10). Дифференцируя (11) два раза, получим: $y' = aC_1 \cos(ax + C_2)$ и $y'' = -a^2 C_1 \sin(ax + C_2)$. Сложив последнее равенство с равенством (11), умноженным на a^2, получим: $y'' + a^2 y = 0$, т. е. уравнение (10). Можно показать, что в с я к и й интеграл уравнения (10) получается из общего интеграла (11) при надлежащем выборе значений постоянных C_1 и C_2.

Пример 2. Найдём дифференциальное уравнение семейства всех окружностей постоянного радиуса R. Уравнение этого семейства имеет вид

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2. \tag{12}$$

Оно содержит два произвольных параметра C_1 и C_2 — координаты центра окружности. В силу предыдущего мы должны найти такое дифференциальное уравнение, для которого равенство (12) являлось бы общим интегралом. Так как равенство (12) содержит два произвольных постоянных, то искомое уравнение должно быть второго порядка, для получения его нужно дважды продифференцировать (12) по x и исключить постоянные C_1 и C_2.

Дифференцируя два раза, последовательно находим:

$$(x - C_1) + y'(y - C_2) = 0, \tag{13}$$

$$1 + y'^2 + y'(y - C_2) = 0. \tag{14}$$

Остаётся исключить C_1 и C_2 из (12), (13) и (14). Из (14) имеем:

$$y - C_2 = -\frac{1 + y'^2}{y''};$$

подставляя в (13), найдём:

$$x - C_1 = y' \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Вставляя $x - C_1$ и $y - C_2$ в (12), получим искомое дифференциальное уравнение

$$y'^2 \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = R^2,$$

или

$$\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = R^2. \tag{15}$$

Нетрудно заметить, что (15) выражает некоторое геометрическое свойство, присущее всем кривым семействам (12). В самом деле, левая часть равенства (15) представляет квадрат радиуса кривизны кривой. Следовательно, уравнение (15) выражает тот факт, что все кривые семейства (12) имеют постоянную кривизну $\frac{1}{R}$, одинаковую для всех кривых семейства.

Пример 3. Найдём дифференциальное уравнение семейства окружностей постоянного радиуса R, центры которых лежат на оси x. Это семейство кривых зависит только от одного параметра — абсциссы центра окружности. Уравнение этого семейства имеет вид

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2. \tag{16}$$

Так как уравнение (16) содержит только одно произвольное постоянное C, то нужно продифференцировать это уравнение один раз и из полученных равенств исключить C. Дифференцируя (16), имеем:

$$x - C + yy' = 0;$$

отсюда

$$x - C = -yy'.$$

Вставляя это в (16), получим искомое дифференциальное уравнение нашего семейства:

$$y^2 + y^2y'^2 = R^2. \tag{17}$$

Опять нетрудно заметить, что оно выражает некоторое геометрическое свойство, присущее всем кривым данного семейства. В самом деле, из равенства (17) имеем

$$|y|\sqrt{1+y'^2} = R;$$

но $|y|\sqrt{1+y'^2} = n$, где n — длина нормали кривой (см. стр. 379); следовательно, уравнение (17) выражает тот факт, что все кривые данного семейства имеют нормаль постоянной длины, равной R.

Нетрудно заметить, что (17) кроме общего интеграла (16) имеет ещё два особых решения, которые нельзя получить из (16) ни при каком C.

Эти особые решения суть

$$y = +R \quad \text{и} \quad y = -R.$$

В самом деле, если $y = \pm R$, то $y' = 0$ и подстановка этих значений в уравнение (17) приводит к тождеству

$$R^2 + R^2 \cdot 0 = R^2.$$

Геометрически этим особым решениям соответствуют две прямые, параллельные оси x и отстоящие от неё на расстояние R. Ясно, что эти прямые не входят в состав семейства окружностей (16).

Пример 4. В двух последних примерах мы имели дифференциальные уравнения, непосредственно выражавшие определённые свойства интегральных кривых. Ясно, что и обратно, отыскание кривых, обладающих тем или иным заданным свойством, может привести нас к интегрированию дифференциального уравнения, интегралами которого будут уравнения искомых

кривых. Если бы мы искали, например, все кривые с постоянной нормалью, то получили бы уравнение (17). Точно так же отыскание кривых постоянной кривизны $\frac{1}{R}$ приведёт нас к интегрированию уравнения (15).

Найдём, для примера, все кривые, для которых поднормаль во всех точках постоянна и равна p. Так как поднормаль s_n представляется формулой $s_n = yy'$, то для искомой кривой мы должны иметь:

$$yy' = p. \tag{18}$$

Это равенство есть дифференциальное уравнение первого порядка. Общим интегралом его, как нетрудно убедиться, является равенство

$$y^2 = 2px + C, \tag{19}$$

представляющее семейство парабол с параметром p, оси которых совпадают с осью Ox.

Пример 5. Многие задачи механики, физики, естествознания и других наук также весьма часто приводят к интегрированию дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, задачу: определить закон движения точки M по прямой линии OM под действием центростремительной силы, прямо пропорциональной расстоянию точки M от неподвижной точки O. Массу точки для простоты примем равной 1. Обозначая абсциссу OM точки M через x, мы должны выразить x в функции времени t. По известной теореме механики, сила F, действующая на точку M, выразится так: $F = \frac{d^2x}{dt^2}$. С другой стороны, та же сила, по условию, должна быть равна a^2x, где a^2 — коэффициент пропорциональности; но так как сила, действующая на точку M, при $x > 0$ направлена в сторону отрицательных x, то $F = -a^2x$, и мы имеем равенство:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x.$$

Это равенство есть дифференциальное уравнение второго порядка, выражающее искомый закон движения. Это же дифференциальное уравнение было рассмотрено в первом примере. Общий интеграл его, как мы видели, пишется так:

$$x = C_1 \sin (at + C_2). \tag{20}$$

Он и даёт искомый закон движения.

Присутствие произвольных постоянных C_1 и C_2 в равенстве (20), дающем закон движения, объясняется некоторой неопределённостью задачи. В самом деле, не нарушая закона движения, мы можем предположить, что в заданный момент времени t_0 точка M находится от O на данном расстоянии x_0 и что ей сообщена некоторая начальная скорость v_0. Предположим, например, что в начальный момент $t = 0$ точка M находилась от O на расстоянии $OA = l$ и начальная скорость её $v_0 = 0$. Полагая в (20) $t = 0$, имеем:

$$l = C_1 \sin C_2. \tag{21}$$

Далее, вычислим скорость движения v:

$$v = \frac{dx}{dt} = aC_1 \cos (at + C_2);$$

при $t = 0$ имеем:

$$0 = aC_1 \cos C_2. \tag{22}$$

Решая равенства (21) и (22) относительно C_1 и C_2, найдём:

$$C_1 = l, \quad C_2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Подставляя эти значения в (20), получим:

$$x = l \sin\left(at + \frac{\pi}{2}\right).$$

Это равенство выражает теперь вполне определённый закон так называемого гармонического колебания.

§ 3. Приближённое построение интегральных кривых уравнений первого порядка.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$f(x, y, y') = 0; \tag{23}$$

его общий интеграл содержит одно произвольное постоянное и представляет собой соотношение вида

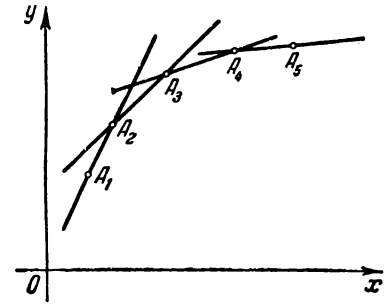
$$F(x, y, C) = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) представляет семейство кривых с одним параметром; каждая кривая этого семейства обладает тем свойством, что ордината её текущей точки как функция абсциссы удовлетворяет уравнению (23).

Выше мы указали, что такое семейство кривых существует. Для случая уравнения первого порядка это можно подтвердить следующими соображениями. Решив уравнение (23) относительно y', получим

$$y' = \varphi(x, y). \tag{25}$$

Если уравнение (23) допускает несколько решений относительно y', например, если это уравнение второй или ещё более высокой степени относительно y', то мы возьмём одно из этих решений. Функцию φ будем предполагать ограниченной и непрерывной, по крайней мере для некоторой области Σ изменения переменных x и y, и имеющей ограниченную производную по y в точках этой области.



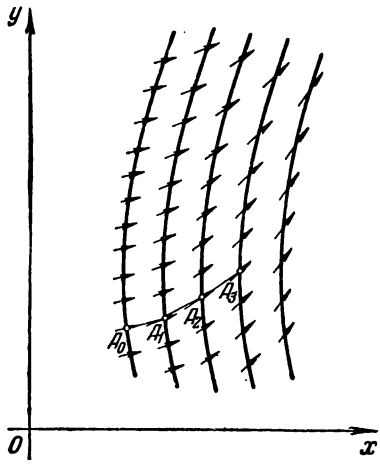
Черт. 97.

Каждой паре значений x и y соответствует своё значение y', определённое равенством (25). Будем рассматривать x и y как декартовы координаты точки на плоскости, а y' — как угловой коэффициент прямой, проходящей через эту точку. Интегральные кривые уравнения (23), в силу определения, обладают тем свойством, что в каждой точке координаты этой точки x, y и угловой коэффициент касательной y' удовлетворяют уравнению (25). Дадим способ приближённого построения искомых кривых. Возьмём какую-либо точку $A_1(x_1, y_1)$ в области Σ (черт. 97). Подставив значения x_1 и y_1 в уравнение (25), найдём соответствующее значение y'; обозначим его через y'_1: $y'_1 = \varphi(x_1, y_1)$.

Проведём через точку A_1 прямую с угловым коэффициентом y'_1 и возьмём на ней точку A_2, близкую к точке A_1. Прямая A_1A_2 должна быть касательной к искомой интегральной кривой, а так как касательная есть предельное положение секущей, когда две точки пересечения её с кривой стремятся к совпадению, то при достаточной близости точек A_1 и A_2 точку A_2 можно приближённо принять за точку интегральной кривой. Обозначая координаты этой точки через (x_2, y_2), найдем из уравнения (25) соответствующее значение y'; обозначим его через y'_2: $y'_2 = \varphi(x_2, y_2)$. Проведём теперь через

точку A_2 прямую с угловым коэффициентом y'_2 и возьмём на ней точку A_3, близкую к точке A_2. При достаточной близости точек A_2 и A_3 точку A_3 опять можно приближённо принять за новую точку интегральной кривой. Продолжая этот процесс построения, мы получим ряд точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ и ряд прямых $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$, соединяющих попарно каждые две последовательные точки. Если мы, сохраняя закон построения, будем брать звенья ломаной линии $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ всё меньшей длины, то можно показать, что при условиях, наложенных выше на функцию $\varphi(x, y)$, ломаная линия будет при этом стремиться к определённой единственной предельной кривой линии, причём прямые $A_1A_2, A_2A_3, \ldots$ в пределе обратятся в касательные к этой линии. Эта линия будет интегральной кривой, проходящей через точку A_1. Таким образом через каждую точку проходит одна интегральная кривая. Нетрудно теперь показать, что все эти кривые образуют семейство кривых с одним параметром.

Для этого покажем, что можно ввести такой параметр λ, что каждому значению λ будет соответствовать единственная вполне определённая интегральная кривая. Проведём через начало координат какую-либо прямую l, пересекающую область Σ. Эта прямая пересечёт и наши интегральные кривые, если не все, то некоторую часть их. Через каждую точку M прямой l, лежащую в области Σ, проходит одна интегральная кривая. Расстояние OM можно принять за параметр λ, определяющий интегральную кривую, проходящую через точку M: $OM = \lambda$. Каждому значению λ соответствует, очевидно, единственная интегральная кривая. Если бы нам удалось составить одно уравнение, общее для всех интегральных кривых, то такое уравнение будет содержать параметр λ, индивидуализирующий кривую семейства. Это уравнение будет представлять собой общий интеграл дифференциального уравнения (25).



Черт. 98.

Другое, чисто аналитическое доказательство существования решения дифференциального уравнения первого порядка будет во всех подробностях проведено ниже (§ 9).

Данному выше методу приближённого построения интегральной кривой можно придать более законченную форму. Выше было сказано, что уравнение (25) устанавливает зависимость между точками плоскости с координатами (x, y) и проходящими через эти точки прямыми с угловым коэффициентом y'. Каждой точке плоскости (в некоторой её области) с координатами (x, y) соответствует проходящая через неё прямая с угловым коэффициентом y', определяемым из уравнения (25). Если в уравнении (25) придать величине y' какое-либо постоянное значение, то это уравнение определит некоторую кривую, обладающую тем свойством, что для всех её точек соответствующие им прямые, т. е. касательные к интегральным кривым в этих точках, параллельны между собой. Такая кривая носит название *изоклины*. Каждому значению y' соответствует своя изоклина. Совокупность всех изоклин для данного дифференциального уравнения образует семейство с одним параметром. Уравнением этого семейства служит данное дифференциальное уравнение, в котором y' рассматривается как параметр семейства. Можно дать весьма простой способ приближённого построения интегральной кривой, проходящей через данную точку, при помощи семейства изоклин.

Пусть дана точка $A_0(x_0, y_0)$ (черт. 98). Координатам x_0, y_0 соответствует определённое значение $y' = y'_0$. Дадим теперь y' ряд значений $y'_0, y'_1, y'_2, y'_3, \ldots$ через равные и достаточно малые промежутки (величина промежутка определяется степенью точности построения). Этим значениям y' соответствуют изоклины

$$f(x, y, y'_0) = 0, \quad f(x, y, y'_1) = 0, \quad f(x, y, y'_2) = 0, \ldots \tag{26}$$

Эти изоклины наносятся на чертёж, после чего приближённое построение интегральной кривой осуществляется следующим образом: через точку A_0 строим прямую, соответствующую изоклине (y'_0), т. е. прямую с угловым коэффициентом y'_0, и продолжаем её до встречи в точке A_1 с изоклиной (y'_1); в точке A_1 строим прямую, соответствующую изоклине (y'_1), и в точке A_2 встречи этой прямой с изоклиной (y'_2) строим следующую прямую, и т. д. Таким путём получим ломаную линию, приближённо представляющую интегральную кривую.

§ 4. Разделение переменных. Однородные уравнения.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{27}$$

где

$$F(x, y) = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}.$$

Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}. \tag{27'}$$

Это уравнение можно представить в форме

$$\psi(y)\,dy = \varphi(x)\,dx. \tag{28}$$

Правую часть этого равенства мы можем рассматривать как дифференциал некоторой неизвестной нам функции $\Phi(x)$ аргумента x, которую можно найти квадратурой [1]):

$$\Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx.$$

Левая часть равенства (28) также представляет собой дифференциал некоторой функции $\Psi(y)$ аргумента y, которую можно найти квадратурой:

$$\Psi(y) = \int \psi(y)\,dy.$$

Но так как y есть (неизвестная пока) функция x, то $\psi(y)$ есть также функция x, и левую часть уравнения (28) можно рассматривать как

[1]) Мы будем в дальнейшем вычисление неопределённого интеграла называть «квадратурой», а термин «интегрирование» относить исключительно к интегрированию дифференциальных уравнений.

дифференциал некоторой функции аргумента x. Равенство (28), таким образом, выражает равенство дифференциалов двух функций аргумента x. Но если дифференциалы двух функций равны, то сами функции разнятся на постоянное число. А потому из (28) находим:

$$\int \psi(y)\,dy = \int \varphi(x)\,dx + C. \tag{29}$$

Выполнив эти квадратуры, мы и найдём общий интеграл уравнения (27). Говорят, что в уравнении (28) переменные разделены. Таким образом, если в данном уравнении (27) удастся произвести разделение переменных, то интеграция уравнения сведётся к простым квадратурам.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0.$$

Освобождая уравнение от знаменателя, получим:

$$y \cos y\,dy + x \sin x\,dx = 0 \quad \text{или} \quad y \cos y\,dy = -x \sin x\,dx.$$

Это равенство можно интегрировать почленно:

$$\int y \cos y\,dy = -\int x \sin x\,dx + C.$$

Выполнив квадратуры, найдём:

$$y \sin y + \cos y - x \cos x + \sin x = C.$$

Таков общий интеграл данного уравнения.

2. Иногда разделение переменных становится выполнимым лишь после некоторых преобразований данного уравнения. Как пример такого случая рассмотрим так называемое *однородное уравнение*, т. е. уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{30}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ суть однородные функции с одинаковым показателем однородности m [1]).

Введём вместо y новую неизвестную функцию u, полагая $u = \frac{y}{x}$, откуда $y = ux$. Дифференцируя последнее равенство, найдём:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u.$$

Подставляя эти значения y и $\frac{dy}{dx}$ в (30), мы получим новое дифференциальное уравнение, связывающее аргумент x, неизвестную функцию u и ее производную $\frac{du}{dx}$, и задача приводится, таким образом,

[1]) Об однородных функциях см. стр. 163 и сл.

к интегрированию уравнения

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{M(x, ux)}{N(x, ux)}. \tag{31}$$

Но в силу однородности функций M и N имеем:

$$M(x, ux)=x^m M(1, u),$$
$$N(x, ux)=x^m N(1, u).$$

Следовательно, (31) принимает вид:

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{M(1, u)}{N(1, u)}. \tag{32}$$

В этом уравнении легко выполнить разделение переменных. В самом деле, перенеся u в правую часть и умножив затем обе части на выражение

$$\frac{dx}{x\left[\frac{M(1, u)}{N(1, u)}-u\right]},$$

получим:

$$\frac{du}{\frac{M(1, u)}{N(1, u)}-u}=\frac{dx}{x}.$$

Определив отсюда с помощью простых квадратур u в функции x и подставив это выражение в равенство $y=ux$, мы найдём искомую функцию y.

Пример. Возьмём уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}. \tag{33}$$

Полагаем $y=ux$; отсюда

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}.$$

Подставляя в данное уравнение, найдём:

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{x}=\frac{(1-u)\,du}{1+u^2}.$$

Выполняем квадратуры:

$$\ln x=\operatorname{arctg}u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+\ln C;$$

отсюда

$$x\sqrt{1+u^2}=Ce^{\operatorname{arctg}u},$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}. \tag{34}$$

Таков общий интеграл уравнения (33). Нетрудно видеть, что семейство интегральных кривых есть семейство логарифмических спиралей с общим полюсом в начале координат. В самом деле, введя вместо декартовых координат полярные, мы получим уравнение того же семейства в полярных координатах:

$$r = Ce^{\varphi}.$$

Это, очевидно, есть семейство равных логарифмических спиралей с общим полюсом (см. т. I, стр. 166—167). Все эти спирали, как нетрудно заметить, пересекают радиусы-векторы во всех точках под одинаковым углом, равным $\frac{\pi}{4}$ (см. гл. XI, § 3, пример 1).

§ 5. Линейные уравнения первого порядка.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называют уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{35}$$

где P и Q суть какие-либо функции x: в этом уравнении производная $\frac{dy}{dx}$ выражается в виде линейной функции от y с переменными коэффициентами.

Уравнение (35), в котором $Q = 0$, называют линейным уравнением без правой части или *однородным линейным уравнением*:

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0. \tag{36}$$

Уравнение (36) интегрируется непосредственно, так как в нём весьма просто разделяются переменные. В самом деле, это уравнение можно представить в форме

$$\frac{dy}{y} = -P\,dx,$$

откуда

$$\ln y = -\int P\,dx + \ln C,$$

или

$$y = Ce^{-\int P\,dx}. \tag{37}$$

Перейдём к уравнению (35).

Мы укажем два приёма интеграции этого уравнения. Первый приём состоит в следующем.

Представим y в форме произведения двух функций u и v, $y = uv$; из них первую, u, мы можем выбрать произвольно, а вторая, v, определится из того условия, что y, т. е. произведение uv, должно удовлетворять уравнению (35). Дифференцируя равенство

$$y = uv,$$

находим:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Подставляя выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (35), получим:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q,$$

или

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + Pu\right) = Q. \tag{38}$$

Пользуясь произволом выбора функции u, выберем её так, чтобы в (38) коэффициент при v обратился в нуль, т. е. чтобы функция u удовлетворяла уравнению

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0. \tag{39}$$

Это есть линейное однородное уравнение. Его общий интеграл по предыдущему имеет вид

$$u = Ce^{-\int P\,dx}.$$

Так как нам достаточно взять какое-либо частное решение уравнения (39), то постоянному C можно придать какое-либо частное значение, например, принять $C = 1$, т. е. принять $u = e^{-\int P\,dx}$.

Уравнение (38) при таком выборе u примет вид

$$e^{-\int P\,dx}\frac{dv}{dx} = Q;$$

отсюда

$$\frac{dv}{dx} = Qe^{\int P\,dx}.$$

Из этого последнего уравнения мы можем определить v простой квадратурой:

$$v = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C.$$

Для нахождения y остаётся подставить полученные значения для u и v в равенство $y = uv$. Эта подстановка даёт:

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C\right]. \tag{40}$$

Второй приём интеграции уравнения (35) принадлежит французскому математику Лагранжу и носит название *метода вариации произвольного постоянного.*

Он состоит в следующем. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q. \tag{35}$$

Заменим функцию Q, стоящую в правой части этого уравнения, через 0, т. е. возьмём уравнение

$$\frac{dy}{dx}+Py=0. \tag{36}$$

Это — однородное уравнение, его общий интеграл имеет вид

$$y=Ce^{-\int P\,dx}. \tag{37}$$

При всевозможных частных значениях постоянного C мы будем получать интегралы уравнения (36), но ни при каком значении C функция (37), очевидно, не будет удовлетворять уравнению (35). Но можно поставить такой вопрос: нельзя ли в равенстве (37) постоянное C заменить такой функцией x, чтобы это равенство дало интеграл уравнения (35)? Итак, будем в равенстве (37) считать C не постоянным числом, а некоторой функцией x, и постараемся подобрать эту функцию так, чтобы y, определяемое равенством (37), удовлетворяло уравнению (35).

Дифференцируя равенство (37), считая C функцией x, получим:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}e^{-\int P\,dx}-CPe^{-\int P\,dx}.$$

Подставляя эти выражения y и $\frac{dy}{dx}$ в (35), найдём:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P\,dx}-CPe^{-\int P\,dx}+P\cdot Ce^{-\int P\,dx}=Q,$$

или

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int P\,dx}=Q;$$

отсюда

$$\frac{dC}{dx}=Qe^{\int P\,dx},$$

и следовательно,

$$C=\int Qe^{\int P\,dx}dx+C_1 \quad (C_1=\text{const}).$$

Подставив это в (37), получим общий интеграл для (35):

$$y=\left\{\int Qe^{\int P\,dx}dx+C_1\right\}e^{-\int P\,dx}. \tag{40'}$$

Это выражение тождественно с найденным выше выражением (40).

Отметим теперь некоторые общие свойства интегралов линейных уравнений.

Рассмотрим сначала однородное уравнение (36):

$$\frac{dy}{dx}+Py=0.$$

Пусть нам известно одно частное решение этого уравнения. Докажем, что в таком случае общий интеграл этого уравнения может быть найден без помощи квадратур. Пусть y_1 есть решение уравнения (36), так что тождественно

$$\frac{dy}{dx}+Py_1=0.$$

Умножая это равенство на $-y$, а равенство (36) на y_1, и складывая, получим:

$$y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}=0.$$

Деля на y_1^2, будем иметь:

$$\frac{y_1\frac{dy}{dx}-y\frac{dy_1}{dx}}{y_1^2}=0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=0,$$

откуда

$$\frac{y}{y_1}=C, \quad \text{или} \quad y=Cy_1.$$

Это, очевидно, — общий интеграл уравнения (36).

Итак, при заданном частном решении уравнения (36) его общий интеграл находится умножением частного решения на произвольное постоянное.

Возьмём теперь неоднородное линейное уравнение (35):

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q.$$

Мы видели выше, что для нахождения его общего интеграла нужно выполнить две квадратуры. Докажем, что, если нам известно одно частное решение уравнения (35), то для получения его общего интеграла достаточно одной квадратуры. Пусть y_1 есть частное решение уравнения (35). Положим:

$$y=y_1+u,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}+\frac{du}{dx}.$$

Вставляя это в (35), получим:

$$\frac{dy_1}{dx}+\frac{du}{dx}+Py_1+Pu=Q; \tag{41}$$

но так как y_1 есть решение уравнения (35), то имеем тождественно:

$$\frac{dy_1}{dx}+Py_1=Q,$$

и, следовательно, (41) примет вид:

$$\frac{du}{dx}+Pu=0.$$

Это — однородное линейное уравнение, оно интегрируется одной квадратурой, и общий интеграл его имеет вид

$$u=Ce^{-\int P\,dx};$$

следовательно, общий интеграл уравнения (35) напишется в виде

$$y=y_1+u=y_1+Ce^{-\int P\,dx}.$$

Для нахождения его, очевидно, нужно выполнить лишь одну квадратуру.

Докажем далее, что, если мы знаем два частных решения уравнения (35), то общий интеграл его можно найти без всяких квадратур.

Пусть y_1 и y_2 — два частных решения уравнения (35). Полагая $y=y_1+u$, мы по предыдущему получим для u однородное уравнение:

$$\frac{du}{dx}+Pu=0.$$

Легко видеть, что для этого уравнения нам известно одно частное решение. В самом деле, так как y_2 есть решение уравнений (35), то уравнению

$$\frac{du}{dx}+Pu=0$$

должна удовлетворять функция u_1, найденная из равенства

$$y_2=y_1+u_1,$$

т. е. функция

$$u_1=y_2-y_1;$$

но, если известно одно решение однородного линейного уравнения, то общий интеграл его находится без квадратур:

$$u=Cu_1=C(y_2-y_1);$$

следовательно, и общий интеграл уравнения (35) находится без помощи квадратур:

$$y=y_1+u=y_1+C(y_2-y_1).$$

Оба данных частных решения входят в состав решений, даваемых общим интегралом; действительно, при $C=0$ имеем $y=y_1$, а при

$C=1$ имеем $y=y_2$. Так как y_1 и y_2 были какие угодно частные решения, то отсюда следует, что любое решение линейного уравнения входит в состав общего интеграла, т. е. линейное дифференциальное уравнение особых решений не имеет.

Последнему равенству можно дать простое геометрическое истолкование. Перепишем его в следующей форме:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=C. \tag{42}$$

Возьмём три какие-либо частные решения уравнения (35) y_1, y_2, y_3. Для них в силу (42) будем иметь тождественно:

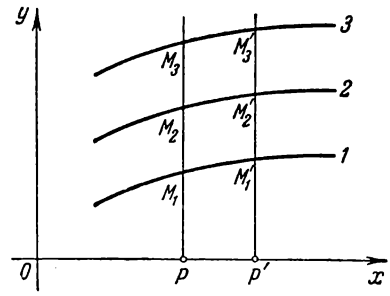
$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=C_1. \tag{42'}$$

Возьмём соответствующие интегральные кривые:

$$y=f_1(x),\quad y=f_2(x),\quad y=f_3(x).$$

Проведём какую-либо прямую $PM_3 \parallel Oy$, пересекающую наши кривые соответственно в точках M_1, M_2, M_3 (черт. 99). Мы имеем $PM_1=y_1$, $PM_2=y_2$, $PM_3=y_3$, и (42′) даёт:

$$\frac{M_1M_3}{M_1M_2}=C_1.$$



Черт. 99.

Для другой прямой $P'M_3'$ (параллельной Oy) точно так же будем иметь:

$$\frac{M_1'M_3'}{M_1'M_2'}=C_1.$$

Следовательно,

$$\frac{M_1M_3}{M_1M_2}=\frac{M_1'M_3'}{M_1'M_2'}.$$

Отсюда

$$\frac{M_1M_2}{M_2M_3}=\frac{M_1'M_2'}{M_2'M_3'}=\text{const}, \tag{43}$$

т. е. всякие три интегральные кривые отсекают от прямых, параллельных оси ординат, отрезки, находящиеся в постоянном отношении.

Пользуясь пропорцией (43), можно, имея две интегральные кривые, легко построить третью, проходящую через любую заданную точку, ордината которой пересекает обе эти кривые, т. е. по двум интегральным кривым можно построить и все остальные.

Пример 1. Дано уравнение

$$x\frac{dy}{dx}-y=x^2. \tag{44}$$

Применим первый из данных выше приёмов интеграции. Полагая

$$y=uv,$$

имеем:

$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

Уравнение (44) даёт:

$$xu\frac{dv}{dx}+xv\frac{du}{dx}-uv=x^2$$

или

$$xu\frac{dv}{dx}+v\left(x\frac{du}{dx}-u\right)=x^2. \tag{45}$$

Выберем u так, чтобы иметь:

$$x\frac{du}{dx}-u=0;$$

отсюда

$$\frac{du}{u}=\frac{dx}{x},$$

и следовательно, можно взять

$$u=x.$$

Уравнение (45) принимает вид

$$x^2\frac{dv}{dx}=x^2,$$

или

$$\frac{dv}{dx}=1,$$

откуда

$$v=x+C.$$

Следовательно,

$$y=uv=x(x+C),$$

или

$$y=x^2+Cx.$$

Семейство интегральных кривых, как нетрудно видеть, есть семейство парабол, проходящих через начало координат, оси которых параллельны оси y, причём параметр семейства C представляет собой угловой коэффициент касательной к соответствующей параболе в начале координат. Всё семейство может быть образовано движением по плоскости одной параболы, постоянно проходящей через начало координат, с осью, параллельной оси ординат.

Допустим теперь, что мы заранее знаем одно частное решение уравнения (44). Тогда общий интеграл мы можем найти с помощью одной квадратуры. Так, нетрудно заметить непосредственно из уравнения (44), что одним из его решений является функция x^2. Полагаем:

$$y=x^2+u.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx}=2x+\frac{du}{dx}.$$

Подставляя в данное уравнение, найдём:

$$2x^2 + x\frac{du}{dx} - x^2 - u = x^2,$$

или

$$x\frac{du}{dx} - u = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u}.$$

Выполнив квадратуру, найдем:

$$u = Cx,$$

и следовательно,

$$y = x^2 + Cx.$$

Пример 2. Возьмём уравнение

$$\sin x\frac{dy}{dx} + y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{46}$$

Применим второй метод. Заменив в (46) правую часть нулём, получим однородное уравнение

$$\sin x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Разделяя в нём переменные и интегрируя, найдём:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\sin x} = 0.$$

Отсюда

$$\ln y + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \ln C,$$

или

$$y = C\operatorname{ctg}\frac{x}{2}. \tag{47}$$

Будем считать в этом равенстве C неизвестной функцией x и определим её так, чтобы (47) удовлетворяло уравнению (46). Дифференцируя (47), находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{C}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Вставляя в (46), получим:

$$\sin x\left(\frac{dC}{dx}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{C}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right) + C\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x,$$

или, после упрощений:

$$\frac{dC}{dx}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 1 + \cos x,$$

откуда

$$\frac{dC}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}(1 + \cos x) = \sin x.$$

Следовательно,

$$C = -\cos x + C_1$$

и

$$y = (C_1 - \cos x)\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

§ 6. Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к линейным уравнениям.

Рассмотрим несколько типов дифференциальных уравнений, интеграция которых сводится к интеграции линейных уравнений.

1. Уравнения типа Бернулли. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dy}{dx}+Py=Qy^n, \tag{48}$$

где P и Q — функции x. Чтобы проинтегрировать уравнение (48), введём вместо y новую неизвестную функцию u, полагая

$$u=y^{1-n}.$$

Отсюда

$$y=u^{\frac{1}{1-n}} \text{ и } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}u^{\frac{n}{1-n}}\frac{du}{dx}.$$

Подставляя в (48), получим:

$$\frac{1}{1-n}u^{\frac{n}{1-n}}\frac{du}{dx}+Pu^{\frac{1}{1-n}}=Qu^{\frac{n}{1-n}}$$

или, сокращая на $u^{\frac{n}{1-n}}$,

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+Pu=Q. \tag{49}$$

Это — линейное дифференциальное уравнение; проинтегрировав его, мы найдём сначала неизвестную функцию u, а затем и y из равенства $u=y^{1-n}$.

Пример.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}. \tag{48'}$$

Это — уравнение типа (48); здесь $n=2$, следовательно, мы должны положить:

$$u=\frac{1}{y}.$$

Отсюда

$$y=\frac{1}{u},\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}.$$

Подставляя в (48'), получим:

$$-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}+\frac{1}{ux}=\frac{1}{u^2x^2},$$

или, по сокращении:

$$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=-\frac{1}{x^2}. \tag{49'}$$

Это — линейное дифференциальное уравнение. Чтобы найти его общий интеграл, применим метод Лагранжа. Берём соответствующее однородное линейное уравнение:

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0.$$

Разделим в нём переменные и интегрируем; получим:

$$u = Cx.$$

Будем считать C неизвестной функцией x и определим её так, чтобы $u = Cx$ удовлетворяло уравнению (49′). Дифференцируя, имеем:

$$\frac{du}{dx} = C + x\frac{dC}{dx}.$$

Вставляя в (49′) вместо u и $\frac{du}{dx}$ их выражения, получим:

$$C + x\frac{dC}{dx} - C = -\frac{1}{x^2} \text{ или } \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{x^3};$$

отсюда

$$C = \frac{1}{2x^2} + C_1,$$

где C_1 — произвольное постоянное, которое для удобства мы представим в виде

$$C_1 = \frac{C'}{2};$$

следовательно,

$$C = \frac{1 + C'x^2}{2x^2},$$

а потому

$$u = Cx = \frac{1 + C'x^2}{2x}$$

и, наконец,

$$y = \frac{1}{u} = \frac{2x}{1 + C'x^2}.$$

2. Уравнения типа Лагранжа. Эти уравнения имеют вид

$$y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right), \tag{50}$$

где φ и ψ — произвольные дифференцируемые функции. Обозначая $\frac{dy}{dx}$ через p, получим:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{50′}$$

Продифференцировав это равенство по x, найдем:

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$

Это равенство содержит лишь величины x, p и $\frac{dp}{dx}$ и, если рассматривать в нём p как независимое переменное, а x — как функцию

от p, и представить его в виде

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p-\psi(p)},$$

то нетрудно заметить, что в этой форме оно является линейным дифференциальным уравнением, определяющим x как функцию p; проинтегрировав его, мы найдём x в функции p и произвольного постоянного C.

Выразив обратно p через x и C и подставив в (50'), мы найдём y в функции x и C, т. е. получим общий интеграл уравнения (50).

Пример.

$$y = xy'^2 + y'^2. \tag{51}$$

Обозначая y' через p, будем иметь:

$$y = xp^2 + p^2. \tag{51'}$$

Дифференцируя (51') по x, найдём:

$$p = p^2 + 2xp\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx} \tag{51''}$$

или, сокращая на p:

$$1 = p + 2x\frac{dp}{dx} + 2\frac{dp}{dx}.$$

Считая x функцией p, решим это уравнение относительно $\frac{dx}{dp}$:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p-1} - \frac{2}{p-1}.$$

Это — линейное дифференциальное уравнение; его общий интеграл мы легко найдём приёмами, данными в предыдущем параграфе. Этот общий интеграл можно написать непосредственно, применяя формулу (40):

$$x = -1 + \frac{C}{(p-1)^2},$$

или

$$(x+1)(p-1)^2 = C. \tag{52}$$

Для нахождения общего интеграла данного уравнения остаётся исключить p из (51') и (52). Для этого вычитаем (52) из (51'); получаем:

$$y - C = (x+1)(2p-1),$$

откуда

$$p = \frac{x+y+1-C}{2(x+1)}.$$

Подставляя это в (51'), находим:

$$y = \frac{(x+y+1-C)^2}{4(x+1)}.$$

Решая это уравнение относительно y, получаем:

$$y = x + 1 + C \pm 2\sqrt{C(x+1)}.$$

Если $C > 0$, то это выражение можно представить в форме

$$y = (\sqrt{C} \pm \sqrt{x+1})^2.$$

Нетрудно заметить, что кроме найденного общего интеграла уравнение (51) имеет ещё интеграл $y = 0$ (который, очевидно, нельзя получить из общего ни при каком значении C). Мы потеряли его, сокращая уравнение (51″) на p и тем самым неявно предполагая, что $p \neq 0$. Но уравнение (51) удовлетворяется и при $p = 0$, так как даёт тогда $y = 0$, что согласуется с условием $p = 0$.

Заметим, что далее мы выполнили ещё деление на $p - 1$ и тем самым могли потерять интеграл нашего уравнения, соответствующий случаю $p = 1$, т. е. $y = x + 1$. Однако этот интеграл всё же вошёл в состав общего интеграла (52′), получаясь из него при $C = 0$.

3. Уравнения типа Клеро. Эти уравнения представляют собой частный вид уравнений Лагранжа (50), когда

$$\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, общий вид уравнения Клеро таков:

$$y = y'x + f(y'),$$

или

$$y = px + f(p), \tag{53}$$

где

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

Для нахождения общего интеграла уравнения (53) можно применить общий метод интеграции уравнений Лагранжа, причём в рассматриваемом частном случае интеграция значительно упрощается.

Дифференцируя (53), получим:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

или

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Этому уравнению можно удовлетворить двумя способами:

во-первых, полагая $\frac{dp}{dx} = 0$;

во-вторых, полагая $x + f'(p) = 0$.

Рассмотрим первое предположение. Пусть $\frac{dp}{dx} = 0$; тогда $p = C$, и так как искомая функция y должна удовлетворять уравнению (53), то, подставляя это выражение p в (53), получим искомую функцию y в виде

$$y = Cx + f(C). \tag{54}$$

Это выражение искомой функции содержит произвольное постоянное C и, следовательно, является общим решением данного уравнения. Таким образом, для нахождения общего решения уравнения (53) достаточно в этом уравнении заменить p произвольным постоянным C. Очевидно, (54) есть уравнение семейства прямых.

Рассмотрим теперь второе предположение. Пусть

$$x + f'(p) = 0. \tag{55}$$

Так как искомая функция y должна удовлетворять уравнению (53), то для получения этой функции можно разрешить (55) относительно p и подставить это выражение в (53), другими словами — исключить p из (53) и (55). Такое исключение приведёт нас к новому соотношению между x и y, не содержащему произвольного постоянного, причём y, определяемое этим соотношением, в силу самого способа его получения будет удовлетворять уравнению (53). Легко заметить, что функция y, определённая таким образом, не может быть получена из общего решения (54) ни при каком частном значении C. В самом деле, пусть в противоречие с нашим утверждением функция y, определяемая уравнениями (53) и (55), может быть получена из общего решения (54) при некотором значении C_0 параметра C:

$$y = C_0 x + f(C_0).$$

Тогда $p = y' = C_0$ и, подставляя это в (55), получаем:

$$x = -f'(C_0) = \text{const},$$

в противоречие с предположением, что x — независимая переменная. Исключение p из (53) и (55) даёт так называемый особый интеграл уравнения (53).

Пример.

$$y = y'x + \frac{y'^2}{2}. \tag{53'}$$

Общий интеграл мы получаем, заменяя y' через C:

$$y = Cx + \frac{C^2}{2}. \tag{54'}$$

Для получения особого интеграла дифференцируем (53') (обозначая y' через p):

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + p\frac{dp}{dx},$$

или

$$\frac{dp}{dx}(x + p) = 0.$$

Предположение $\frac{dp}{dx} = 0$ приводит к общему интегралу (54'), предположение

$$x + p = 0 \tag{55'}$$

приводит к особому интегралу, который мы получим, исключив p из (53') и (55'). Из (55') имеем:

$$p = -x.$$

Вставляя это в (53′), получим:

$$y = -x^2 + \frac{x^2}{2} \quad \text{или} \quad y = -\frac{x^2}{2}. \tag{56}$$

Можно и непосредственно убедиться в том, что функция $-\frac{x^2}{2}$ удовлетворяет уравнению (53′).

Общий интеграл (54′) представляет семейство прямых с одним параметром, особый интеграл (56) представляет параболу, ось которой совпадает с отрицательной осью y, а вершина лежит в начале координат.

Нетрудно заметить, что все прямые (54′) касаются параболы (56).

§ 7. Особые решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Мы уже видели выше, что дифференциальное уравнение первого порядка, кроме общего интеграла, содержащего одно произвольное постоянное C и дающего при частных значениях C бесчисленное множество частных интегралов, может иметь ещё особые интегралы, которые нельзя получить из общего ни при каких частных значениях постоянного C.

На примерах предыдущих параграфов мы видели, что некоторые дифференциальные уравнения имеют особый интеграл, как, например, уравнения типа Клеро, тогда как другие его не имеют, например линейные уравнения. Постараемся теперь уяснить причину существования для некоторых дифференциальных уравнений таких особых интегралов.

Пусть даны дифференциальное уравнение

$$f(x, y, y') = 0 \tag{57}$$

и его общий интеграл

$$F(x, y, C) = 0. \tag{58}$$

Этот общий интеграл геометрически представляет семейство плоских линий, зависящее от одного параметра. При частных значениях постоянного C мы получаем отдельные кривые семейства, так называемые интегральные кривые уравнения (57). Каждая интегральная кривая обладает тем свойством, что координаты x, y каждой её точки и угловой коэффициент y' касательной в этой точке удовлетворяют уравнению (57). Если числа x и y суть координаты одной из точек данной кривой, а y' — угловой коэффициент касательной в этой точке, то мы для краткости будем говорить, что тройка чисел (x, y, y') принадлежит данной кривой. Интегральная кривая уравнения (57) есть, по определению, такая кривая, что все принадлежащие ей тройки (x, y, y') удовлетворяют уравнению (57).

Будем предполагать, что всякая тройка чисел (x, y, y'), удовлетворяющая уравнению (57), принадлежит некоторой интегральной кривой из семейства кривых (58), представляемых общим интегралом. Наряду с этим уточнением поня-

тия общего интеграла уточним и понятие особого интеграла. А именно, особым интегралом уравнения (57) будем называть такой, который ни на каком интервале изменения переменного x или y нельзя получить из общего интеграла (58) ни при каком C.

Если (57) имеет особый интеграл, то это означает геометрически, что существует кривая, ни на каком своём участке не принадлежащая к семейству (58) и тем не менее обладающая свойством интегральной линии. Допустим, что такая кривая существует; назовём её кривой g. Возьмём на ней произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и вычислим угловой коэффициент y_0' касательной к кривой g в этой точке. Числа x_0, y_0, y_0' по условию удовлетворяют уравнению (57). Так как теперь всякая тройка чисел (x, y, y'), удовлетворяющих уравнению (57), принадлежит некоторой кривой, входящей в состав семейства интегральных кривых, представляемых общим интегралом, то отсюда следует, что наша кривая g в каждой своей точке должна касаться одной из кривых семейства (58) (не совпадая с ней ни на каком участке), т. е. кривая g должна быть огибающей семейства кривых (58). Обратно, легко видеть, что если семейство (58) имеет огибающую, то эта огибающая есть интегральная кривая для (57), ибо все принадлежащие ей тройки чисел (x, y, y') принадлежат в то же время и одной из кривых семейства (58) и, следовательно, удовлетворяют уравнению (57); если эта огибающая сама не входит в состав семейства (58), то она даёт особый интеграл уравнения (57). Из сказанного следует, что уравнение (57) только тогда имеет особый интеграл, когда семейство интегральных линий, представляемых общим интегралом, имеет огибающую и притом не входящую в состав семейства (58).

Это свойство особого интеграла объясняет, почему линейное уравнение не может иметь особого интеграла. В самом деле, из данного в § 5 свойства интегральных кривых линейного уравнения нетрудно видеть, что либо никакие две интегральные кривые не пересекаются, либо все интегральные кривые проходят через одну точку — в обоих случаях семейство таких линий не имеет огибающей.

Рассмотрим теперь уравнение Клеро:

$$y = xy' + f(y').$$

Его общий интеграл $y = Cx + f(C)$ представляет собой семейство прямых с одним параметром. Такое семейство всегда имеет огибающую, если только это семейство не вырождается в пучок прямых [1]); этим и объясняется, что уравнение Клеро имеет особый интеграл.

[1]) Мы предполагаем непрерывность и двукратную дифференцируемость функции f. При этих условиях семейство прямых

$$y = Cx + f(C),$$

не вырождающееся в пучок, может быть образовано непрерывным движением прямой на плоскости, при котором прямая необходимо будет огибать некоторую кривую.

Доказанное свойство особого интеграла даёт в то же время и способ его нахождения для того случая, когда уже найден общий интеграл.

В самом деле, огибающую семейства линий с одним параметром мы находим, дифференцируя уравнение семейства по параметру и исключая затем параметр семейства; а потому, чтобы найти особый интеграл уравнения (57), зная общий интеграл (58), нужно продифференцировать (58) по C и исключить C из равенств

$$F(x, y, C) = 0$$

и

$$\frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0. \tag{59}$$

Особый интеграл должен будет удовлетворять этой системе уравнений (58) и (59).

Легко заметить, что особый интеграл уравнения Клеро, который мы получили выше, может быть найден и этим общим приёмом. В самом деле, особый интеграл этого уравнения мы получили как результат исключения y' из равенств

$$y = xy' + f(y') \quad \text{и} \quad x + f'(y') = 0. \tag{60}$$

Общий интеграл того же уравнения имеет вид

$$y = Cx + f(C).$$

Огибающую семейства интегральных прямых мы найдём, исключая C из равенств

$$y = Cx + f(C) \quad \text{и} \quad x + f'(C) = 0. \tag{61}$$

Ясно, что исключение y' из равенств (60) и исключение C из равенств (61) приведёт к одному и тому же соотношению между x и y.

Пример 1. Уравнение Лагранжа

$$y = xy'^2 + y'^2 \tag{57'}$$

имеет, как мы видели, общий интеграл

$$y = \frac{(x + y + 1 - C)^2}{4(x + 1)}. \tag{58'}$$

Чтобы выяснить, существует ли особый интеграл, будем искать огибающую этого семейства интегральных кривых. Дифференцируя по C равенство (58'), находим:

$$0 = \frac{x + y + 1 - C}{2(x + 1)}. \tag{59'}$$

Исключая C из (58') и (59'), получим: $y = 0$. Это и есть тот особый интеграл для (57'), на который мы указывали в предыдущем параграфе.

Пример 2. Дифференциальное уравнение

$$y^2(1 + y'^2) = a^2, \tag{57''}$$

как мы видели в § 2, имеет общий интеграл

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2, \tag{58''}$$

представляющий семейство окружностей постоянного радиуса a, центры которых лежат на оси x.

Найдём огибающую этого семейства. Дифференцируя по C, находим:

$$2(x - C) = 0. \tag{59''}$$

Исключая C из (58″) и (59″), получим:

$$y^2 = a^2 \quad \text{или} \quad y = \pm a.$$

Легко видеть, что обе функции $y = +a$ и $y = -a$ удовлетворяют уравнению (57″) и являются его особыми решениями; на существование их было указано выше (§ 2, пример 3).

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}. \tag{57'''}$$

Его общий интеграл (см. § 4) имеет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C \cdot e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}. \tag{58'''}$$

Будем искать огибающую этого семейства интегральных кривых. Дифференцируя (58‴) по C, получим:

$$e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = 0,$$

что невозможно. Следовательно, рассматриваемое уравнение особого интеграла иметь не будет.

Пример 4. Рассмотрим линейное уравнение

$$y' + Py = Q.$$

Его общий интеграл имеет вид

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int e^{\int P\,dx} Q\,dx + C\right].$$

Дифференцируя по C, получим:

$$0 = e^{-\int P\,dx}.$$

Но это равенство не может иметь места; таким образом, ещё раз убеждаемся в том, что линейное уравнение особых интегралов не имеет.

§ 8. Второй способ нахождения особых решений.

Изложенный выше способ нахождения особых решений дифференциального уравнения первого порядка требовал знания общего интеграла. Можно показать, что те же особые решения могут быть получены непосредственно из самого дифференциального уравнения. Мы видели, что особое решение представляет геометрически огибающую семейства интегральных кривых, т. е., вообще говоря, геометрическое

место их предельных точек. Возьмём две бесконечно близкие интегральные кривые

$$F(x, y, C) = 0$$

и

$$F(x, y, C + \Delta C) = 0,$$

соответствующие значениям параметра C и $C + \Delta C$. Легко видеть, что если они пересекаются, то в точке их пересечения касательные к этим кривым при достаточно малом значении ΔC образуют между собой бесконечно малый угол. Действительно, угловые коэффициенты y' и y'_1 этих касательных определяются соответственно из уравнений

$$\frac{\partial F(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial y} y' = 0$$

и

$$\frac{\partial F(x, y, C + \Delta C)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, C + \Delta C)}{\partial y} y'_1 = 0.$$

Вследствие предполагаемой непрерывности частных производных от функции $F(x, y, C)$ по всем аргументам, очевидно, будем иметь $\lim\limits_{\Delta C \to 0} y'_1 = y'$ [1]). Отсюда следует, что если существует общая точка двух бесконечно близких интегральных кривых, то она является в то же время общей точкой двух бесконечно близких изоклин (т. е. линий равного наклона интегральных кривых; см. § 3) и, следовательно, предельная точка интегральной кривой есть в то же время предельная точка изоклины. А потому геометрическое место предельных точек интегральных кривых является и геометрическим местом предельных точек изоклин. Отсюда следует, что особое решение можно получить, отыскивая огибающую семейства изоклин. Для отыскания этой огибающей знания общего интеграла не требуется. В самом деле, семейство изоклин представляется непосредственно данным дифференциальным уравнением, в котором производная $\frac{dy}{dx}$ или y' рассматривается как параметр семейства. Таким образом, особое решение может быть получено непосредственно из данного дифференциального уравнения: следует данное уравнение $f(x, y, y') = 0$ продифференцировать по y' и из двух уравнений

$$f(x, y, y') = 0$$

и

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \tag{62}$$

исключить y'. В этом состоит второй способ нахождения особых решений.

---

[1]) При условии, что $\frac{\partial F(x, y, C)}{\partial y} \neq 0$; но только в окрестности таких точек, в которых это условие выполняется, мы имеем гарантию разрешимости уравнения $F(x, y, C) = 0$ относительно y, т. е. можем рассматривать y как функцию от x.

Пример. Найдём особое решение уравнения Лагранжа

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

Дифференцируя по y', имеем:

$$2xy' + 2y' = 0,$$

откуда

$$y' = 0.$$

Подставив найденное y' в данное дифференциальное уравнение, получим:

$$y = 0.$$

Это значение y удовлетворяет данному уравнению и является его особым решением (ср. пример 1 на стр. 461).

Однако огибающая семейства изоклин может и не служить огибающей семейства интегральных кривых и потому может и не давать особого решения.

Пример. Возьмём уравнение

$$(x - y')^2 + y^2 = 1.$$

Изоклинами здесь будут служить окружности радиуса $r = 1$ с центрами на оси Ox. Огибающую этого семейства найдём, дифференцируя данное уравнение по y', что даст

$$2(x - y') = 0,$$

и исключая y' из полученного и данного уравнений. Получим равенство

$$y^2 = 1,$$

дающее в качестве огибающих две прямые: $y = +1$ и $y = -1$. Но ни одна из этих функций не является решением данного уравнения.

Аналитическое обоснование обоих изложенных выше методов отыскания особых решений, не зависящее от геометрических представлений, будет дано ниже (см. § 10).

§ 9. О существовании решений дифференциальных уравнений первого порядка.

Для всех рассмотренных выше типов дифференциальных уравнений первого порядка были даны способы нахождения их общих решений с помощью квадратур. Таким образом, вопрос о существовании функции, удовлетворяющей данному дифференциальному уравнению, до сих пор решался путём непосредственного нахождения этой функции. Но такие методы нахождения общих решений можно найти далеко не для всякого дифференциального уравнения. И в случаях, когда нельзя указать прямого метода нахождения общего решения с помощью квадратур, может возникнуть вопрос: существует ли вообще функция, удовлетворяющая данному дифференциальному уравнению, и при каких условиях можно быть уверенными, что такая функция существует? Решение этого вопроса и составляет нашу задачу.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка в форме, разрешённой относительно производной:

$$y' = f(x, y). \tag{63}$$

Возьмём какую-либо систему значений $x = x_0$, $y = y_0$ и сделаем следующие предположения относительно функции $f(x, y)$:

1° Существуют два положительных числа a и b таких, что функция $f(x, y)$ непрерывна при всех значениях x и y, удовлетворяющих неравенствам

$$\left.\begin{aligned} x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \\ y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Следуя общей терминологии, будем говорить, что совокупность всех пар значений x и y, удовлетворяющих неравенствам (64), образует некоторую область изменения этих переменных, и для краткости будем называть эту область областью (D). Геометрически она представляет собой прямоугольник на плоскости (x, y) с центром в точке (x_0, y_0) и со сторонами длины $2a$ и $2b$, параллельными соответствующим координатным осям.

Так как функция $f(x, y)$ непрерывна в конечной замкнутой области (D), то она ограничена в этой области, т. е. существует некоторое число M такое, что во всей области (D) функция $f(x, y)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y)| \leqslant M. \tag{65}$$

2° Существует такое число $A > 0$, что для любых двух пар значений (x, y) и $(x, \bar{y})$, лежащих в области (D), удовлетворяется неравенство

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leqslant A|\bar{y} - y|.$$

Это условие носит название *условия Липшица* (Lipschitz). Оно будет заведомо выполнено, если функция $f(x, y)$ во всей области (D) имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ и притом ограниченную в этой области, т. е. удовлетворяющую неравенству $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant A$, где A — некоторое постоянное положительное число.

В самом деле, по теореме о конечном приращении имеем:

$$f(x, \bar{y}) - f(x, y) = (\bar{y} - y) f'_y(x, y + \theta(\bar{y} - y));$$

отсюда

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leqslant A|\bar{y} - y|.$$

С другой стороны, из условия 2° следует, что производная $\frac{\partial f}{\partial y}$, если она существует, ограничена в области (D). Однако условие 2° не гарантирует существования $\frac{\partial f}{\partial y}$ всюду в (D).

Таким образом, условие существования в области (D) ограниченной частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ является требованием, несколько более сильным, чем условие 2°.

Налагая вместо условия существования ограниченной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ условие 2°, мы подвергаем функцию $f(x, y)$ несколько меньшим ограничениям и, следовательно, проводим наше исследование для несколько более широкого класса дифференциальных уравнений.

При наличии условий 1° и 2° имеет место следующее предложение:

Теорема. *Если левая часть уравнения* (63) *представляет собой функцию, непрерывную в области* (D) *и удовлетворяющую в этой области условию Липшица, то существует единственная функция* $y(x)$, *удовлетворяющая уравнению* (63) *и принимающая при* $x = x_0$ *значение* $y = y_0$.

Эта функция определена и непрерывна для всех значений x, *лежащих в пределах*

$$x_0 - \rho \leqslant x \leqslant x_0 + \rho,$$

где ρ — *меньшее из чисел* a *и* $\frac{b}{M}$.

Доказательство. Мы докажем эту теорему методом последовательных приближений. Доказательство сводится к составлению бесконечной сходящейся последовательности функций, имеющей своим пределом искомое решение $y(x)$ уравнения (63).

Постоянное число y_0 назовём нулевым приближением. Заменив в правой части равенства (63) y через y_0, получим

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y_0).$$

Это равенство определяет некоторую новую функцию y_1 от x, которую получим интегрированием равенства

$$dy_1 = f(x, y_0)\,dx.$$

Постоянное интеграции выберем так, чтобы при $x = x_0$ иметь $y_1 = y_0$:

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx. \tag{66}$$

Функцию

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx$$

мы назовём первым приближением.

При $x = x_0$ значение $y_1 = y_0$ лежит в области (D). Ограничим теперь пределы изменения настолько, чтобы значения y_1 не выходили из области (D). Из равенства (66) имеем:

$$|y_1 - y_0| \leqslant |x - x_0| M.$$

Но $|y_1 - y_0|$ должно удовлетворять неравенству

$$|y_1 - y_0| \leqslant b;$$

этому условию мы удовлетворим, если потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$|x - x_0| M \leqslant b,$$

или

$$|x - x_0| \leqslant \frac{b}{M}.$$

С другой стороны, мы должны иметь $|x - x_0| \leqslant a$. Следовательно, чтобы y_1 не вышло из области (D), достаточно потребовать, чтобы x заключалось в пределах

$$x_0 - \rho \leqslant x \leqslant x_0 + \rho,$$

где ρ — меньшее из чисел

$$a \quad \text{и} \quad \frac{b}{M}.$$

Будем считать x заключённым в этих пределах и построим второе приближение y_2, полагая

$$\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1);$$

отсюда, потребовав ещё, чтобы при $x = x_0$ было $y_2 = y_0$, получим:

$$y_2 - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx. \tag{66'}$$

Потребуем, чтобы это второе приближение опять не выходило из области (D). Из (66') имеем:

$$|y_2 - y_0| \leqslant |x - x_0| M,$$

и так как мы уже ограничили изменение аргумента x неравенством

$$|x - x_0| \leqslant \rho,$$

то

$$|y_2 - y_0| \leqslant M\rho \leqslant b.$$

Таким образом, при выполнении неравенства $|x - x_0| \leqslant \rho$, y_2 не выйдет из области (D).

Продолжая неограниченно этот процесс построения последовательных приближений, мы получим последовательность функций

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots, \tag{67}$$

в которой каждая функция выражается через предыдущую равенством

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,\ y_{n-1})\,dx.$$

При этом для всех значений x, лежащих в пределах $x_0 - \rho \leqslant x \leqslant x_0 + \rho$, все функции (67) не выходят из области (D) и при $x = x_0$ принимают значение y_0.

Докажем, что последовательность (67) имеет определённый предел при всех значениях аргумента x в рассматриваемом нами замкнутом интервале $(x_0 - \rho,\ x_0 + \rho)$. Для этой цели оценим абсолютные величины разностей

$$y_1 - y_0,\quad y_2 - y_1,\quad y_3 - y_2,\ \ldots,\ y_n - y_{n-1},\ \ldots$$

Первая из этих разностей уже была оценена выше, а именно:

$$|y_1 - y_0| \leqslant M|x - x_0|. \tag{68}$$

Вторая разность определяется из равенств (66) и (66′)

$$y_2 - y_1 = \int_{x_0}^{x} [f(x,\ y_1) - f(x,\ y_0)]\,dx;$$

отсюда

$$|y_2 - y_1| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(x,\ y_1) - f(x,\ y_0)|\,dx \right|.$$

Но в силу условия Липшица

$$|f(x,\ y_1) - f(x,\ y_0)| \leqslant A|y_1 - y_0|,$$

откуда в силу (68)

$$|f(x,\ y_1) - f(x,\ y_0)| \leqslant MA|x - x_0|,$$

а потому

$$|y_2 - y_1| \leqslant MA\left| \int_{x_0}^{x} |x - x_0|\,dx \right| = MA\,\frac{|x - x_0|^2}{1 \cdot 2}.$$

Покажем, что при любом n имеет место неравенство

$$|y_n - y_{n-1}| \leqslant MA^{n-1}\,\frac{|x - x_0|^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}. \tag{69}$$

Допустим, что это неравенство верно для какого-либо значения n, и докажем, что в таком случае оно будет верным и для значения $n+1$.

В самом деле,

$$y_{n+1}-y_n=\int_{x_0}^{x}[f(x,\ y_n)-f(x,\ y_{n-1})]\,dx.$$

В силу условия Липшица

$$|f(x,\ y_n)-f(x,\ y_{n-1})|\leqslant A|y_n-y_{n-1}|,$$

откуда в силу (69)

$$|f(x,\ y_n)-f(x,\ y_{n-1})|\leqslant MA^n\frac{|x-x_0|^n}{n!};$$

следовательно,

$$|y_{n+1}-y_n|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}MA^n\frac{|x-x_0|^n}{n!}\,dx\right|=MA^n\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Так как неравенство (69) справедливо для $n=1$ и $n=2$, то оно, таким образом, будет справедливо и для $n=3$, 4, 5 и вообще для любого номера n.

Составим теперь ряд

$$y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\ldots+(y_n-y_{n-1})+\ldots \qquad (70)$$

и сравним его с рядом

$$M\frac{|x-x_0|}{1}+MA\frac{|x-x_0|^2}{2!}+\ldots+MA^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!}+\ldots \qquad (71)$$

Ряд (71) сходится при всяком значении x и, как нетрудно заметить, представляет собой разложение в ряд функции

$$\frac{(e^{A|x-x_0|}-1)M}{A}.$$

В силу неравенства (69) члены ряда (70) по абсолютной величине меньше соответствующих членов ряда (71) и тем более (так как $|x-x_0|\leqslant\rho$) — ряда

$$M\rho+MA\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+MA^{n-1}\frac{\rho^n}{n!}+\ldots \qquad (71')$$

Поэтому ряд (70) сходится равномерно в замкнутом интервале $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$ (см. § 3 гл. X), и так как члены этого ряда — непрерывные функции x, то сумма ряда (70) есть некоторая непрерывная функция от x. Обозначим её через $y(x)$.

Составив сумму $n+1$ членов ряда (70), получим

$$s_{n+1}=y_n.$$

Следовательно, сумма членов ряда (70) равна $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$:

$$y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n.$$

При $x_0-\rho\leqslant x\leqslant x_0+\rho$ значения функции $y(x)$, очевидно, не выходят из области (D). Мы доказали, следовательно, что построенная нами последовательность функций (67) имеет определённый предел $y(x)$, представляющий собой в замкнутом интервале $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$ непрерывную функцию аргумента x.

Покажем, что найденная функция $y(x)$ является решением уравнения (63). В последовательности (67) функция y_n определена равенством

$$y_n=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_{n-1})\,dx.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, будем иметь

$$y(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(x,\ y_{n-1})\,dx. \tag{72}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_{n-1}=y(x)$ и y_{n-1} есть сумма n членов равномерно сходящегося в интервале $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$ ряда, то для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер N, что при $n\geqslant N$ и $x_0-\rho\leqslant x\leqslant x_0+\rho$ будем иметь

$$|y(x)-y_{n-1}|<\varepsilon.$$

Рассмотрим разность

$$f(x,\ y_{n-1})-f(x,\ y).$$

Так как $f(x,\ y)$ — функция, равномерно непрерывная относительно x и y в области (D), то, можно, задавшись произвольно малым положительным числом η, взять ε настолько малым, что при

$$|y(x)-y_{n-1}|<\varepsilon$$

будем иметь

$$|f(x,\ y_{n-1})-f(x,\ y)|<\eta$$

для всех x в замкнутом интервале $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$. Положим

$$f(x,\ y_{n-1})-f(x,\ y)=\alpha_n(x),$$

так что $|\alpha_n(x)|<\eta$ при $n\geqslant N$ и $|x-x_0|\leqslant\rho$. Отсюда

$$f(x,\ y_{n-1})=f(x,\ y)+\alpha_n(x).$$

Внеся это выражение в равенство (72), получим:

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}\alpha_n(x)\,dx. \tag{73}$$

Но при $n\geqslant N$ и $|x-x_0|\leqslant\rho$

$$\left|\int_{x_0}^{x}\alpha_n(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}\eta\,dx\right|\leqslant\eta\rho;$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}\alpha_n(x)\,dx=0.$$

Таким образом, равенство (73) принимает вид

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{74}$$

Интеграл в правой части равенства (74) есть непрерывная функция верхнего предела, имеющая производную, равную $f(x, y)$ при тех значениях x, при которых $f(x, y)$ — функция непрерывная, и, следовательно, при всех x в замкнутом интервале $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$. Дифференцируя (74), получим:

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

Таким образом, найденная функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (63). Из равенства (74) следует также, что при $x=x_0$ имеем $y=y_0$.

Нам остаётся доказать, что найденное решение $y(x)$ есть единственное решение, принимающее при $x=x_0$ значение y_0.

Допустим существование двух функций $y(x)$ и $Y(x)$, удовлетворяющих уравнению (63) и при $x=x_0$ принимающих общее значение

$$y(x_0)=Y(x_0)=y_0. \tag{75}$$

Возьмём функцию

$$|Y(x)-y(x)|$$

и выберем положительное число h, удовлетворяющее неравенству $h<\frac{1}{2A}$ и такое, что в интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$ значения функций $Y(x)$ и $y(x)$ не выходят из области (D). Функция $|Y(x)-y(x)|$ будет непрерывна в замкнутом интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$ и, следовательно, будет иметь в этом интервале некоторый максимум μ, так что

$$|Y(x)-y(x)|\leqslant\mu \quad \text{при} \quad x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h. \tag{76}$$

По условию

$$\frac{dY}{dx}=f(x, Y) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx}=f(x, y).$$

Вычитая эти равенства одно из другого, имеем:

$$\frac{d(Y-y)}{dx}=f(x, Y)-f(x, y);$$

отсюда и из (75)

$$Y-y=\int_{x_0}^{x}[f(x, Y)-f(x, y)]\,dx,$$

причём здесь

$$x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h.$$

В силу условия Липшица и неравенства (76) получаем поэтому:

$$|Y-y|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}A|Y-y|\,dx\right|\leqslant A\mu\left|\int_{x_0}^{x}dx\right|\leqslant A\mu h.$$

Но $h<\frac{1}{2A}$. Следовательно, если $\mu>0$, то мы будем иметь:

$$|Y-y|<\frac{\mu}{2} \quad \text{при} \quad x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h.$$

Однако это неравенство противоречит предположению, что μ — максимум функции $|Y-y|$ в интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$. Противоречие исчезнет лишь при $\mu=0$. Отсюда следует, что $Y(x)=y(x)$ на всём интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$, т. е. что на этом интервале $y(x)$ есть единственное решение уравнения (63), удовлетворяющее заданному начальному условию $y=y_0$ при $x=x_0$.

Интервал $(x_0-h,\ x_0+h)$ может быть продолжен как в ту, так и в другую сторону. Именно, если на каком-либо конце интервала, например в точке x_0+h, значения функции $y(x)$ лежат внутри области непрерывности функции $f(x, y)$ и действия условия Липшица, то можно принять x_0+h за новую начальную точку $x_0+h=x_0'$ и рассмотреть интервал $(x_0'-h,\ x_0'+h)$, в котором y не выходит из той же области.

Так возможно продолжить найденное решение до границы области непрерывности функции $f(x, y)$ (и действия условия Липшица).

Таким образом, теорема доказана полностью.

Давая y_0 всевозможные значения, мы будем получать различные решения уравнения (63). Рассматривая y_0 как произвольное постоянное, мы получим общее решение уравнения (63); оно будет охватывать все частные решения, даваемые доказанной теоремой.

§ 10. Случаи нарушения единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Аналитическое обоснование существования особых решений.

Поставим теперь вопрос: все ли решения дифференциального уравнения могут быть получены данным выше методом, т. е. на основании теоремы предыдущего параграфа?

Если какая-либо функция $y=\varphi(x)$ даёт решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y) \tag{63}$$

и для какой-либо системы значений x_0, $y_0=\varphi(x_0)$ выполняются условия указанной теоремы, то решение $y=\varphi(x)$ может быть получено также данным выше методом и по этой теореме будет единственным решением уравнения (63), принимающим при $x=x_0$ значение $y_0=\varphi(x_0)$. Между тем нам уже известны случаи, когда единственность решения не имеет места. Именно, если семейство интегральных кривых имеет огибающую, то через каждую точку огибающей проходят по крайней мере две кривые, дающие решение: интегральная кривая, касающаяся огибающей в этой точке, и сама огибающая. Следовательно, если координаты какой-либо точки огибающей принять за начальные данные x_0 и y_0, то эти начальные данные определят не одно, а по крайней мере два решения данного уравнения.

Таким образом, решение, даваемое огибающей семейства интегральных кривых, не может быть получено на основании теоремы предыдущего параграфа.

Из сказанного выше следует, что кривая $y=\psi(x)$ лишь в том случае может быть решением уравнения (63), не входящим в семейство решений, даваемых указанной теоремой, когда условия этой теоремы не выполняются ни для одной точки кривой.

Такие решения мы называем в общем случае особыми решениями. К этому классу решений, очевидно, принадлежит и то, которое даётся огибающей семейства интегральных кривых.

Выясним, в каком случае могут не выполняться условия теоремы § 9.

Считая функцию $f(x, y)$ попрежнему непрерывной, мы должны предположить, что для этой функции не выполняется условие Липшица. Отсюда следует, что решение, не получаемое по теореме § 9, может быть представлено лишь такой кривой, для всех точек которой не выполняется условие Липшица.

Если функция $f(x, y)$ в данной области изменения переменных x и y имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$, непрерывную во всех тех точках, где она конечна, то условие Липшица не будет выполняться для всех тех точек данной области, в которых производная $\frac{\partial f}{\partial y}$

обращается в бесконечность. Геометрическое место таких точек может, в силу сказанного выше, являться особым решением данного уравнения (но оно может и вовсе не давать решения данного уравнения). Если же в данной области $\frac{\partial f}{\partial y}$ всюду имеет конечные значения, то данное уравнение в этой области вовсе не имеет особых решений.

Пример 1. Возьмём линейное уравнение

$$y' = Py + Q.$$

В этом случае

$$\frac{\partial f}{\partial y} = P.$$

Эта функция может обращаться в бесконечность лишь для отдельных значений x. Следовательно, кривой, во всех точках которой было бы справедливо равенство

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \infty,$$

не существует, т. е. линейное уравнение не имеет особых решений.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$y' = a + \sqrt{y - ax}.$$

Здесь

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y - ax}}.$$

Эта функция обращается в бесконечность во всех точках прямой линии $y = ax$, следовательно, эта прямая может давать особое решение. Подставляя в данное уравнение значение $y = ax$, мы видим, что уравнение удовлетворяется. Отсюда следует, что $y = ax$ действительно является особым решением данного уравнения. Легко видеть, что прямая $y = ax$ служит огибающей семейства интегральных кривых рассматриваемого уравнения, доставляемых его общим интегралом $x = 2\sqrt{y - ax} + C$.

Пусть теперь дифференциальное уравнение дано в виде, не разрешённом относительно $\frac{dy}{dx}$:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{75}$$

и разрешая его относительно y', мы можем получить равенство

$$y' = \varphi(x, y).$$

Для получения производной $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ мы должны продифференцировать равенство (75) по y, считая x постоянным и y' равным $\varphi(x, y)$. В этих предположениях будем иметь:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial y'}}.$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ будет обращаться в бесконечность лишь в тех точках области изменения x и y, в которых

$$\text{или } \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \infty.$$

Для нахождения геометрического места этих точек мы должны, очевидно, исключить y' из уравнений

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

или из уравнений

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0.$$

Полученное таким образом геометрическое место может давать особое решение данного уравнения.

Этот способ отыскания особых решений был выше получен из геометрических соображений (§ 8). Теперь же мы получили аналитическое обоснование этого метода, не зависящее от геометрических истолкований. Из тех же геометрических соображений о свойствах огибающих нами был получен и другой способ нахождения особых решений дифференциального уравнения, когда известен его общий интеграл. Именно, если

$$F(x, y, C) = 0 \tag{76}$$

есть общий интеграл уравнения (63), то особое решение, если оно существует, находится путём исключения C из равенств

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Этому способу можно также дать аналитическое обоснование.

Если в равенстве (76) давать C произвольные постоянные значения, то это равенство будет определять частные решения уравнения (63). Если же в равенстве (76) считать C не постоянной величиной, а некоторой функцией от x, то это равенство определит y, как некоторую функцию от x, вообще говоря, не совпадающую ни с одним из частных решений уравнения (63).

Выясним, нельзя ли так подобрать функцию $C(x)$, чтобы равенство (76) определяло функцию y, служащую решением уравнения (63).

Разрешим равенство (76) относительно y:

$$y = \varphi(x, C). \tag{77}$$

При постоянном C в силу уравнения (63) мы имеем тождественно относительно x и C

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x, y). \tag{78}$$

Будем теперь считать в равенстве (77) C некоторой функцией от x и потребуем, чтобы $\varphi(x, C)$ удовлетворяла уравнению (63). Дифференцируя (77), получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\frac{dC}{dx},$$

и в силу (63)

$$f(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\frac{dC}{dx}. \tag{79}$$

Но так как (78) — тождество относительно x и C, то оно будет верно независимо от того, будет ли в нём C постоянным числом или функцией от x. А потому в равенстве (79) величины $f(x, y)$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ сократятся и равенство примет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} \cdot \frac{dC}{dx} = 0$$

и, следовательно, распадётся на два

$$\frac{dC}{dx} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0.$$

Первое равенство даёт $C = \text{const}$, т. е. приводит к тем решениям, которые даются общим интегралом. Равенство $\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0$ может определять C, как некоторую функцию от x, при которой $\varphi(x, C)$ служит решением уравнения (63). Это решение мы получим, исключая C из равенств

$$y = \varphi(x, C) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0.$$

Если теперь общий интеграл дан в виде (76), то $\frac{\partial \varphi}{\partial C}$ мы найдём как производную неявной функции, дифференцируя (76) по C и считая x постоянным:

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial C} + \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Из этого равенства, в силу условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0,$$

следует

$$\frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Таким образом, особое решение, если оно существует, будет удовлетворять уравнениям

$$F(x, y, C) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial C} = 0.$$

Таково аналитическое обоснование второго метода отыскания особых решений, найденного ранее чисто геометрическим путём.

§ 11. Общие свойства интегралов линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называют уравнение вида

$$p_0\frac{d^2y}{dx^2} + p_1\frac{dy}{dx} + p_2y = q, \tag{80}$$

где p_0, p_1, p_2 и q суть какие-либо функции от x. Если $q = 0$, то уравнение называют однородным или уравнением без правой части.

Задача интегрирования линейных дифференциальных уравнений — задача большой трудности, и в общем случае она не может быть сведена к простым квадратурам, как это имело место для линейных уравнений первого порядка. Но существуют отдельные типы линейных уравнений, для которых задача интеграции имеет более или менее простое решение; один из важнейших видов подобных уравнений мы рассмотрим ниже.

Мы увидим в дальнейшем (§ 13), что интеграцию линейного неоднородного уравнения (80) можно свести к интеграции соответствующего однородного уравнения

$$p_0y'' + p_1y' + p_2y = 0. \tag{81}$$

Поэтому прежде всего мы рассмотрим уравнение (81) и установим общие свойства его интегралов.

Докажем, что если y_1 есть частное решение уравнения (81), то и Cy_1, где C — любое постоянное число, есть также решение того же уравнения. В самом деле, полагая $y = Cy_1$, имеем $y' = Cy_1'$, $y'' = Cy_1''$. Подставляя в (81), получим:

$$p_0Cy_1'' + p_1Cy_1' + p_2Cy_1 = C(p_0y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1) = 0;$$

выражение в скобках тождественно равно нулю, так как y_1 есть решение для (81). Таким образом, подстановка в (81) Cy_1 вместо y_1 обращает (81) в тождество, чем и доказывается наше утверждение.

Докажем далее, что если y_1 и y_2 суть решения уравнения (81), то сумма их $y_1 + y_2$ есть также решение уравнения (81). Действи-

тельно, полагая $y=y_1+y_2$, имеем $y'=y_1'+y_2'$, $y''=y_1''+y_2''$; подставляя в (81), получим:

$$p_0(y_1''+y_2'')+p_1(y_1'+y_2')+p_2(y_1+y_2)=$$
$$=p_0y_1''+p_1y_1'+p_2y_1+p_0y_2''+p_1y_2'+p_2y_2=0;$$

первые три члена правой части этого равенства дают тождественно нуль, так же как и три последние, так как y_1 и y_2 суть решения для (81); тем самым наше утверждение доказано.

Из двух последних предложений вытекает важное следствие. Если y_1 и y_2 суть решения для (81), то выражение $C_1y_1+C_2y_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, есть также решение уравнения (81). В самом деле, в силу первой теоремы выражения C_1y_1 и C_2y_2 суть решения уравнения (81), а в силу второй — их сумма $C_1y_1+C_2y_2$ есть также решение уравнения (81).

Решение

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{82}$$

содержит два произвольных постоянных; столько же произвольных постоянных должно входить и в общий интеграл уравнения (81), и можно спросить, является ли (82) общим интегралом для (81)? Для того чтобы это имело место, очевидно, достаточно, чтобы формула (82) при надлежащем выборе постоянных C_1 и C_2 давала любое решение уравнения (81).

Пусть y — какое-либо решение этого уравнения. Так как y_1, по условию, частное решение того же уравнения, то имеем тождественно:

$$p_0y_1''+p_1y_1'+p_2y_1=0. \tag{83}$$

Умножая (81) на $+y_1$, а (83) — на $-y$ и складывая, получим:

$$p_0(y_1y''-y_1'y)+p_1(y_1y'-y_1'y)=0.$$

Но, как нетрудно заметить,

$$y_1y''-y_1''y=\frac{d}{dx}(y_1y'-y_1'y). \tag{84}$$

Тем самым функция

$$u=y_1y'-y_1'y \tag{85}$$

является решением однородного линейного уравнения первого порядка

$$p_0\frac{du}{dx}+p_1u=0. \tag{86}$$

Совершенно так же убедимся в том, что уравнению (86) удовлетворяют и функции $yy_2'-y'y_2$ и $y_1y_2'-y_1'y_2$. Но в § 5 было показано,

что решения однородного линейного уравнения первого порядка пропорциональны. Следовательно,

$$\frac{yy_2' - y'y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2} = C_1, \tag{87}$$

$$\frac{y_1y' - y_1'y}{y_1y_2' - y_1'y_2} = C_2, \tag{88}$$

где C_1 и C_2 — некоторые постоянные. Умножая уравнение (87) на y_1, а (88) на y_2 и складывая, получим после упрощений:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

чем наше утверждение и доказано. Проведённое рассуждение будет неприменимо лишь в том случае, когда в формулах (87) и (88) знаменатель окажется тождественно нулём.

Посмотрим, когда это будет. Полагая

$$y_1y_2' - y_1'y_2 = 0,$$

имеем:

$$\frac{y_2'}{y_2} = \frac{y_1'}{y_1} \text{ или } \frac{dy_2}{y_2} = \frac{dy_1}{y_1};$$

отсюда

$$\ln y_2 = \ln y_1 + \ln C \quad \text{или} \quad y_2 = Cy_1 \quad \text{или} \quad \frac{y_2}{y_1} = C,$$

т. е. отношение функций y_1 и y_2 постоянно. Две функции, обладающие этим свойством, называют *линейно зависимыми*. Следовательно, (82) лишь в том случае не даст общего интеграла для (81), когда функции y_1 и y_2 окажутся линейно зависимыми.

Итак, если y_1 и y_2 — два линейно независимых частных решения уравнения (81), то (82) представляет его общий интеграл.

Таким образом, задача интегрирования уравнения (81) сводится к нахождению двух линейно независимых частных решений. Но можно показать, что достаточно найти одно частное решение уравнения (81), чтобы получить общий интеграл с помощью квадратур. Пусть y_1 — частное решение уравнения (81). Тогда формулы (85) и (86) дают:

$$\frac{\frac{d}{dx}(y_1y' - y_1'y)}{y_1y' - y_1'y} = -\frac{p_1}{p_0} \quad \text{или} \quad \frac{d\ln(y_1y' - y_1'y)}{dx} = -\frac{p_1}{p_0};$$

отсюда квадратурой находим:

$$y_1y' - y_1'y = C_1e^{-\int \frac{p_1}{p_0}dx}.$$

Деля на y_1^2, получим:

$$\frac{y_1y' - y_1'y}{y_1^2} = C_1 \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = C_1 \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx},$$

откуда

$$\frac{y}{y_1} = C_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx} dx + C_2.$$

Следовательно,

$$y = y_1\left(C_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx} dx + C_2\right). \tag{89}$$

Эта формула даст общий интеграл уравнения (81), когда известно одно его частное решение.

Пример. Уравнение

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

допускает частные решения

$$y_1 = x \text{ и } y_2 = \frac{1}{x};$$

эти решения, очевидно, линейно независимы, а потому общий интеграл имеет вид

$$y = C_1x + \frac{C_2}{x}.$$

Зная лишь одно частное решение, например $y_1 = x$, можно найти общий интеграл по формуле (89). Замечая, что $p_0 = x^2$, $p_1 = x$, имеем в силу (89):

$$y = x\left[C_1 \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C_2\right]$$

или по упрощении

$$y = x\left(-C_1 \frac{1}{2x^2} + C_2\right) = -\frac{C_1}{2} \cdot \frac{1}{x} + C_2x.$$

Обозначая $-\frac{C_1}{2}$ через C', получаем: $y = C' \cdot \frac{1}{x} + C_2x$, что и имели (в других только обозначениях) выше.

§ 12. Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим частный случай однородного линейного уравнения, когда все его коэффициенты суть постоянные числа. Пусть имеем такое уравнение:

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0. \tag{90}$$

Покажем, что оно имеет частное решение вида $y = e^{kx}$, где k — некоторое постоянное число (действительное или мнимое). В самом деле, если $y = e^{kx}$, то $y' = ke^{kx}$ и $y'' = k^2e^{kx}$. Подставляя в (90), получим:

$$a_0k^2e^{kx} + a_1ke^{kx} + a_2e^{kx} = 0$$

или

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0. \tag{91}$$

Следовательно, e^{kx} будет частным решением уравнения (90), если k удовлетворяет уравнению (91). Уравнение (91) называют *характеристическим уравнением*; оно имеет, вообще говоря, два различных корня k_1 и k_2, и мы имеем тогда два частных решения:

$$y_1 = e^{k_1x} \quad \text{и} \quad y_2 = e^{k_2x}.$$

Эти решения, очевидно, линейно независимы, а потому находим общий интеграл уравнения (90) в виде

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \tag{92}$$

Если уравнение (91) имеет мнимые корни, то в выражение (92) войдут мнимые величины, но тогда можно будет соответствующим подбором постоянных C_1 и C_2 избавиться от мнимых величин. Пусть мнимые корни уравнения (91) суть $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$. Из (92) имеем:

$$y = C_1e^{\alpha x+\beta xi} + C_2e^{\alpha x-\beta xi} = e^{\alpha x}(C_1e^{\beta xi} + C_2e^{-\beta xi}).$$

Но по формуле Эйлера (стр. 36, формула (30))

$$e^{\beta xi} = \cos\beta x + i\sin\beta x \quad \text{и} \quad e^{-\beta xi} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$$

Внося это в предыдущее равенство, получим:

$$y = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x].$$

Полагая

$$C_1 + C_2 = C' \quad \text{и} \quad i(C_1 - C_2) = C'',$$

имеем:

$$y = e^{\alpha x}(C'\cos\beta x + C''\sin\beta x). \tag{93}$$

Здесь под C' и C'' мы можем подразумевать произвольные действительные постоянные [1]).

Уравнение (91) может также иметь равные корни. Пусть $k_1 = k_2 = \rho$; мы имеем в этом случае не два частных решения, а только одно $y = e^{\rho x}$. Для нахождения общего интеграла можно применить формулу (89) предыдущего параграфа:

$$y = e^{\rho x}\left[C_1\int\frac{1}{e^{2\rho x}}e^{-\int\frac{a_1}{a_0}dx}dx + C_2\right];$$

[1]) Очевидно, что для того чтобы C' и C'' были действительны, нужно C_1 и C_2 взять сопряжёнными комплексными числами.

замечая, что $-\frac{a_1}{a_0}=2p$, и выполняя квадратуры, получим:

$$y=e^{px}(C_1x+C_2). \tag{94}$$

Таков общий интеграл уравнения (90) в случае равных корней характеристического уравнения. Можно и непосредственно убедиться в том, что уравнение (90) имеет два линейно независимых частных решения e^{px} и xe^{px}, и составить интеграл (94) на основании общих свойств линейных уравнений.

Пример 1.

$$y''-y'-6y=0. \tag{90'}$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^2-k-6=0; \tag{91'}$$

оно имеет корни $k_1=3$, $k_2=-2$, следовательно, общий интеграл имеет вид

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}. \tag{92'}$$

Пример 2.

$$y''-2y'+y=0. \tag{90''}$$

Характеристическое уравнение

$$k^2-2k+1=0 \tag{91''}$$

имеет равные корни $k_1=k_2=1$. Следовательно, общий интеграл имеет вид

$$y=e^x(C_1x+C_2). \tag{94'}$$

Пример 3. Возьмём уравнение гармонического колебания

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a^2x=0. \tag{90'''}$$

Характеристическое уравнение $k^2+a^2=0$ имеет мнимые корни:

$$k_1=ai, \quad k_2=-ai.$$

Общий интеграл составится по формуле (93), где $\alpha=0$, $\beta=a$:

$$y=C'\cos ax+C''\sin ax. \tag{93'}$$

Введя вместо C' и C'' другие постоянные, с помощью равенств

$$C'=C_1\sin C_2, \quad C''=C_1\cos C_2,$$

получим:

$$y=C_1(\sin C_2\cos ax+\cos C_2\sin ax)=C_1\sin(ax+C_2).$$

Интеграл в этой форме мы уже имели выше (§ 2, пример 5).

§ 13. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Пусть дано неоднородное линейное дифференциальное уравнение:

$$p_0y''+p_1y'+p_2y=q. \tag{95}$$

Покажем, что, зная общий интеграл соответствующего однородного уравнения

$$p_0y''+p_1y'+p_2y=0, \tag{96}$$

можно найти общий интеграл для (95) с помощью квадратур. Общий интеграл для (96), как мы видели, имеет форму:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{97}$$

Для нахождения общего интеграла уравнения (95) применим метод вариации произвольных постоянных. Будем в (97) считать C_1 и C_2 не постоянными числами, а неизвестными функциями x, и определим эти функции так, чтобы (97) дало общий интеграл для (95).

Для определения двух функций C_1 и C_2 мы можем подчинить их двум условиям, из которых одно дано заранее: (97) должно быть интегралом для (95); второе условие мы можем наложить произвольно.

Дифференцируя (97), получим:

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2. \tag{98}$$

Потребуем теперь, чтобы C_1 и C_2 удовлетворяли равенству

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0; \tag{99}$$

тогда (98) примет вид

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'. \tag{98'}$$

Дифференцируем (98'):

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'. \tag{100}$$

Подставив (97), (98') и (100) в (95), мы должны получить тождество. Эта подстановка даёт:

$$p_0(C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2') + p_1(C_1 y_1' + C_2 y_2') + \\ + p_2(C_1 y_1 + C_2 y_2) = q$$

или

$$C_1(p_0 y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1) + C_2(p_0 y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2) + \\ + C_1' p_0 y_1' + C_2' p_0 y_2' = q. \tag{101}$$

Так как y_1 и y_2 суть решения для (96), то первые две скобки в (101) исчезают, и мы имеем:

$$C_1' p_0 y_1' + C_2' p_0 y_2' = q. \tag{102}$$

Из равенств (99) и (102) мы можем найти C_1' и C_2', и следовательно, C_1 и C_2 определятся с помощью простых квадратур.

Пример.

$$x^2 y'' + xy' - y = x^2. \tag{95'}$$

Пишем соответствующее однородное уравнение:

$$x^2 y'' + xy' - y = 0. \tag{96'}$$

Его общий интеграл мы уже имели выше (стр. 480):

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}. \tag{97'}$$

Дифференцируем (97'), считая C_1 и C_2 функциями x:

$$y' = C_1 - C_2 \cdot \frac{1}{x^2} + C_1' x + C_2' \cdot \frac{1}{x}. \tag{98''}$$

Налагая на C_1 и C_2 условие

$$C_1' x + C_2' \cdot \frac{1}{x} = 0, \tag{99'}$$

получаем из (98''):

$$y' = C_1 - C_2 \frac{1}{x^2}. \tag{98'''}$$

Дифференцируем (98'''):

$$y'' = C_1' - C_2' \cdot \frac{1}{x^2} + C_2 \cdot \frac{2}{x^3}. \tag{100'}$$

Вставляя (97'), (98''') и (100') в (95'), получим:

$$C_1' x^2 - C_2' = x^2. \tag{102'}$$

Из (99') и (102') найдём:

$$C_1' = \frac{1}{2}, \quad C_2' = -\frac{x^2}{2},$$

откуда

$$C_1 = \frac{x}{2} + C', \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + C''.$$

Вставляя это в (97'), найдём общий интеграл для (95'):

$$y = C'x + \frac{C''}{x} + \frac{x^2}{3}.$$

§ 14. Однородные линейные уравнения n-го порядка.

Однородным линейным уравнением n-го порядка называют уравнение вида

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \tag{103}$$

где p_0, p_1, p_2, ..., p_n суть какие-либо функции от x. Совершенно так же как и для случая линейных уравнений второго порядка, непосредственной проверкой легко установить следующие свойства уравнения (103).

1° Если y_1 есть решение уравнения (103), то и $C_1 y_1$, где C_1 — постоянное число, есть также решение этого уравнения.

2° Если y_1, y_2, y_3, ..., y_k суть k частных решений уравнения (103), то их сумма

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_k$$

есть также решение того же уравнения.

Из этих свойств вытекает, что если $y_1, y_2, \ldots, y_k$ — частные решения уравнения (103), то выражение

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ky_k$$

есть также решение того же уравнения.

Среди решений уравнения (103) всегда содержится решение $y = 0$. Это решение считается тривиальным и не принимается в расчёт при отыскании решений уравнения (103). Говоря о частных решениях уравнения (103), мы всегда будем подразумевать решения, отличные от нуля.

Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_k$ связаны соотношением

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ky_k = 0, \tag{104}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые постоянные, среди которых имеются отличные от нуля, то эти функции называют линейно зависимыми.

Если же для данной системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_k$ равенство (104) не имеет места ни при каких постоянных значениях $a_1, a_2, \ldots, a_k$, кроме $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$, то функции этой системы называют линейно независимыми.

Теорема. *Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые частные решения уравнения* (103), *то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + \ldots + C_ny_n. \tag{105}$$

Доказательство. Эта теорема уже была установлена для уравнений второго порядка. Покажем теперь, что если она верна для уравнения порядка $n - 1$, то она будет верна и для уравнения порядка n.

Допустим, что теорема верна для любого однородного линейного уравнения порядка $n - 1$, и пусть $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ суть n линейно независимых частных решений уравнения (103). Введём в уравнение (103) вместо y новую неизвестную функцию z, связанную с y соотношением $y = zy_n$. Чтобы произвести эту замену, продифференцируем равенство $y = zy_n$ n раз:

$$\begin{aligned}
y &= zy_n,\\
y' &= zy_n' + z'y_n,\\
y'' &= zy_n'' + 2z'y_n' + z''y_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y^{(n)} &= zy_n^{(n)} + nz'y_n^{(n-1)} + \ldots + z^{(n)}y_n.
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнение (103), получим:

$$[p_0y_n^{(n)} + p_1y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y_n' + p_ny_n]z + \\ + [np_0y_n^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y_n]z' + \ldots + y_np_0z^{(n)} = 0.$$

Коэффициент при z равен нулю, так как y_n есть решение уравнения (103). Обозначив для краткости остальные коэффициенты через q с соответствующими индексами, будем иметь:

$$q_0 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + \ldots + q_{n-1} z' = 0. \tag{106}$$

Уравнение (106) определяет неизвестную функцию z. Введём теперь опять новую неизвестную функцию u, полагая $u = z'$. В таком случае $u' = z''$, $u'' = z'''$, ..., $u^{(n-1)} = z^{(n)}$. Подставляя это в уравнение (106), получим:

$$q_0 u^{(n-1)} + q_1 u^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1} u = 0. \tag{107}$$

Для определения функции u мы получили уравнение $(n-1)$-го порядка. Легко видеть, что $n-1$ частных решений этого уравнения известны. В самом деле, функции u и y связаны соотношением

$$u = \left(\frac{y}{y_n}\right)';$$

так как $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ — частные решения уравнения (103), то

$$u_1 = \left(\frac{y_1}{y_n}\right)', \quad u_2 = \left(\frac{y_2}{y_n}\right)', \ldots, \quad u_{n-1} = \left(\frac{y_{n-1}}{y_n}\right)'$$

суть частные решения уравнения (107). Все эти решения отличны от нулевого. В самом деле, если бы для какого-либо k мы имели $u_k = 0$, то отсюда вытекало бы равенство $\frac{y_k}{y_n} = \text{const}$, или $y_k - Cy_n = 0$ и, следовательно, функции y_k и y_n оказались бы линейно зависимыми, что противоречит нашему предположению. Далее, все функции u_1, u_2, ..., u_{n-1} линейно независимы. В самом деле, допустим, что существует соотношение вида

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} = 0, \tag{108}$$

где не все α_i равны нулю. Подставляя вместо u_i их выражения через y_i, получим

$$\alpha_1 \left(\frac{y_1}{y_n}\right)' + \alpha_2 \left(\frac{y_2}{y_n}\right)' + \ldots + \alpha_{n-1} \left(\frac{y_{n-1}}{y_n}\right)' = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\alpha_1 \frac{y_1}{y_n} + \alpha_2 \frac{y_2}{y_n} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{y_{n-1}}{y_n} = \alpha_n,$$

где α_n — некоторое постоянное. Отсюда следует, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1} - \alpha_n y_n = 0,$$

что противоречит условию линейной независимости функций y_1, y_2, y_3, ..., y_n. Следовательно, равенство (108) не может иметь места,

Так как $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ суть $n-1$ линейно независимых частных решений уравнения (107), то, в силу допущения об уравнениях $(n-1)$-го порядка, общий интеграл этого уравнения представится формулой

$$u = C_1u_1 + C_2u_2 + \ldots + C_{n-1}u_{n-1}.$$

Выражая u через y, получаем:

$$\left(\frac{y}{y_n}\right)' = C_1\left(\frac{y_1}{y_n}\right)' + C_2\left(\frac{y_2}{y_n}\right)' + \ldots + C_{n-1}\left(\frac{y_{n-1}}{y_n}\right)'.$$

Отсюда, интегрируя и умножая обе части на y_n, находим общее решение уравнения (103):

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n.$$

Следовательно, теорема, будучи верной для уравнения порядка $n-1$, будет верна и для уравнения порядка n. Справедливость теоремы была уже установлена для $n=2$. Отсюда следует, что она верна и для $n=3, 4, \ldots$ и вообще уравнений любого порядка. В силу доказанной теоремы интеграция уравнения (103) сводится к отысканию n линейно независимых частных решений этого уравнения.

Пример. Уравнение

$$y^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$$

имеет три частных решения

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = x^3;$$

эти решения линейно независимы, так как равенство

$$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$$

при a_1, a_2, a_3, одновременно не равных нулю, не может иметь места при любом $x \neq 0$.

Таким образом, общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3x^3,$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Примечание. Общее решение вопроса о линейной зависимости системы n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ связано со свойствами так называемого определителя Вронского, составленного для этих функций. Этот определитель имеет следующий вид:

$$W_n = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости функций является равенство этого определителя нулю.

§ 15. Однородные линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \qquad (109)$$

где все a_i — постоянные числа. Так же как и в случае уравнения второго порядка, будем искать частные решения этого уравнения в виде e^{kx}. Полагая $y = e^{kx}$, имеем:

$$y' = ke^{kx},\ y'' = k^2e^{kx},\ \ldots,\ y^{(n)} = k^ne^{kx}.$$

Подставляя в (109) и сокращая на e^{kx}, получим:

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0. \qquad (110)$$

Таким образом, если число k удовлетворяет уравнению (110), то функция e^{kx} является решением уравнения (109).

Уравнение (110) носит название *характеристического уравнения* для данного дифференциального уравнения (109). От характера корней уравнения (110) зависит вид общего интеграла уравнения (109).

Если все n корней уравнения (110): k_1, k_2, ..., k_n различны между собой, то функции

$$e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ \ldots,\ e^{k_nx} \qquad (111)$$

являются частными решениями уравнения (109). Легко видеть, что все эти решения линейно независимы. Чтобы убедиться в этом, покажем сначала, что две функции вида (111) не могут оказаться линейно зависимыми. В самом деле, если бы две функции e^{k_1x} и e^{k_2x} оказались связаны соотношением

$$a_1e^{k_1x} + a_2e^{k_2x} = 0,$$

то из него вытекало бы равенство

$$a_1e^{(k_1-k_2)x} = -a_2,$$

что невозможно, так как правая часть от x не зависит.

Допустим теперь, что между функциями (111) имеется соотношение

$$b_1e^{k_1x} + b_2e^{k_2x} + \ldots + b_{n-1}e^{k_{n-1}x} + b_ne^{k_nx} = 0, \qquad (112)$$

где не все b_i равны нулю. Допустим, что $b_n \neq 0$, и разделим всё равенство (112) на e^{k_nx}; получим:

$$b_1e^{(k_1-k_n)x} + b_2e^{(k_2-k_n)x} + \ldots + b_{n-1}e^{(k_{n-1}-k_n)x} + b_n = 0.$$

Так как это равенство тождественно относительно x, то его можно дифференцировать по x. Дифференцируя, получим:

$$b_1(k_1 - k_n)e^{(k_1-k_n)x} + \ldots$$
$$\ldots + b_{n-1}(k_{n-1} - k_n)e^{(k_{n-1}-k_n)x} = 0. \qquad (113)$$

Равенство (113) имеет тот же характер, что и (112); оно выражает линейную зависимость функций того же типа, что и функции (112), но в числе, на единицу меньшем. Деля равенство (113) на $e^{(k_{n-1}-k_n)x}$ и дифференцируя, придём к равенству, выражающему линейную зависимость функций типа (111) в числе $n-2$. Продолжая этот процесс, мы придём к равенству, выражающему линейную зависимость двух функций вида (111), что, как мы видели, невозможно. Отсюда следует, что функции (111) линейно независимы. А потому общий интеграл уравнения (109) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x}. \qquad (114)$$

Заметим, что среди корней уравнения (110) могут оказаться и мнимые. В таком случае они войдут попарно сопряжёнными, и в интеграле (114) слагаемые с мнимыми показателями смогут быть соединены по два и заменены соответствующими выражениями через тригонометрические функции так же, как это было и в случае уравнений второго порядка.

Пример. Возьмём уравнение

$$y''' + y = 0;$$

характеристическое уравнение

$$k^3 + 1 = 0$$

имеет один действительный корень $k_1 = -1$ и два мнимых

$$k_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, \quad k_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

В силу изложенного общий интеграл данного уравнения представится формулой

$$y = C_1 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни. Пусть сначала уравнение (110) имеет двукратный корень, т. е. среди его корней $k_1, k_2, \ldots, k_n$ имеются два, равных между собой, например $k_1 = k_2$. В таком случае корни уравнения (110) дадут не n, а лишь $n-1$ частных решений уравнения (109). Чтобы получить недостающее n-е решение, предположим сначала, что корни k_1 и k_2 не равны между собой, а весьма мало отличаются один от другого, и что коэффициенты уравнения (110), а следовательно, и уравнения (109) изменяются непрерывно так, что корень k_2 стремится к совпадению с k_1. Частными решениями уравнения (109) будут служить функции $e^{k_1 x}$ и $e^{k_2 x}$, и в силу общих свойств линейных уравнений частным решением будет являться также выражение

$$\frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1}.$$

При k_2, стремящемся к k_1, это выражение стремится к производной по k_1 от функции e^{k_1x}:

$$\lim_{k_2 \to k_1} \frac{e^{k_2x} - e^{k_1x}}{k_2 - k_1} = \frac{d}{dk_1}(e^{k_1x}).$$

А потому мы вправе ожидать, что при $k_2 = k_1$ уравнению (109) будет удовлетворять не только функция e^{k_1x}, но и её производная по k_1:

$$\frac{d}{dk_1}(e^{k_1x}) = xe^{k_1x}.$$

Справедливость такого предположения легко подтвердить непосредственной проверкой. Обозначим для краткости левую часть уравнения (110) через $f(k)$. В таком случае результат подстановки функции e^{k_1x} в уравнение (109) можно записать в форме $e^{k_1x}f(k_1)$. Посмотрим, что даст результат подстановки в уравнение (109) функции $\frac{d}{dk_1}(e^{k_1x})$. Выполняя эту подстановку, получим в левой части

$$a_0\left[\frac{d}{dk_1}(e^{k_1x})\right]^{(n)} + a_1\left[\frac{d}{dk_1}(e^{k_1x})\right]^{(n-1)} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}\left[\frac{d}{dk_1}(e^{k_1x})\right]' + a_n\left[\frac{d}{dk_1}(e^{k_1x})\right],$$

где верхний индекс в каждом слагаемом означает порядок производной по x. Но так как величины x и k_1 не зависят одна от другой, то оба дифференцирования по x и по k_1 можно выполнить в обратной последовательности и предыдущее выражение записать в форме

$$\frac{d}{dk_1}\{a_0(e^{k_1x})^{(n)} + a_1(e^{k_1x})^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(e^{k_1x})' + a_ne^{k_1x}\}$$

или, пользуясь введённым обозначением, — в форме

$$\frac{d}{dk_1}[e^{k_1x}f(k_1)].$$

Выполняя теперь дифференцирование по k_1, получим

$$\frac{d}{dk_1}[e^{k_1x}f(k_1)] = xe^{k_1x}f(k_1) + e^{k_1x}f'(k_1).$$

Но так как k_1 — двукратный корень уравнения (110), то $f(k_1) = 0$ и $f'(k_1) = 0$. Отсюда следует, что $\frac{d}{dk_1}(e^{k_1x}) = xe^{k_1x}$ действительно удовлетворяет уравнению (109). Этим самым мы нашли недостающее n-е решение уравнения (109). Таким образом, и в этом случае мы имеем для уравнения (109) n (как легко видеть, независимых) частных решений.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть уравнение (110) имеет корень s кратности p. Обобщая предыдущий результат, мы можем

ожидать, что уравнению (109) будет удовлетворять не только функция e^{sx}, но и любая её производная по s, кончая производной $(p-1)$-го порядка. Непосредственная проверка подтверждает это предположение. В самом деле, подставляя в уравнение (109) вместо y функции $\frac{d^r}{ds^r}(e^{sx})$, где $r \leqslant p-1$, и переставляя, как и раньше, порядок дифференцирования по x и по s, получим:

$$\frac{d^r}{ds^r}[e^{sx}f(s)].$$

Выполняя дифференцирование по s, после приведения подобных членов получим:

$$\frac{d^r}{ds^r}[e^{sx}f(s)] = x^r e^{sx}f(s) + rx^{r-1}e^{sx}f'(s) + \ldots + e^{sx}f^{(r)}(s).$$

Но так как s является p-кратным корнем уравнения (109), а $r \leqslant p-1$, то

$$f(s)=0, \quad f'(s)=0, \quad f''(s)=0, \ \ldots, \ f^{(r)}(s)=0,$$

а потому предыдущее выражение равно нулю при $r=1, 2, \ldots, p-1$, т. е. функции

$$\frac{d}{ds}(e^{sx}), \quad \frac{d^2}{ds^2}(e^{sx}), \ \ldots, \ \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}}(e^{sx})$$

действительно удовлетворяют уравнению (109). Выполняя дифференцирование по s, получаем $p-1$ недостающих решений уравнения (109):

$$xe^{sx}, \quad x^2e^{sx}, \ \ldots, \ x^{p-1}e^{sx}.$$

Таким образом, для уравнения (109) опять получим n независимых частных решений, с помощью которых составим и общий интеграл уравнения.

Пример.

$$y^{VI} + 3y''' + 3y'' + y' = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^4 + 3k^3 + 3k^2 + k = 0$$

имеет простой корень $k_1 = 0$ и трёхкратный корень $k_{2,3,4} = -1$. А потому общий интеграл этого уравнения представится формулой

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x} + C_4x^2e^{-x},$$

или

$$y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3x + C_4x^2).$$

§ 16. Уравнения Эйлера.

Однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами, как мы видели, интегрируется в квадратурах, коль скоро удаётся определить все корни некоторого алгебраического уравнения. Одним из типов однородных линейных уравнений с переменными коэффи-

циентами, интеграция которых также сводится к решению алгебраических уравнений, являются уравнения Эйлера. Эти уравнения имеют вид

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=0. \qquad (115)$$

Введением новой независимой переменной уравнение (115) можно превратить в линейное уравнение с постоянными коэффициентами. В самом деле, введём вместо x новое переменное t, полагая $x=e^t$ или $t=\ln x$. В таком случае

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}=\frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t}-\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)e^{-t},$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}.$$

Таким же образом получим:

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)e^{-3t}.$$

Мы видим, что производные от любой функции по старому переменному x выражаются через производные той же функции по новому переменному t в форме произведения многочлена с постоянными коэффициентами относительно производных по t на e^{-pt}, где p — порядок старшей производной. Легко убедиться в том, что такова же будет форма производной любого порядка. В самом деле, пусть

$$\frac{d^py}{dx^p}=\left(\frac{d^py}{dt^p}+C_1\frac{d^{p-1}y}{dt^{p-1}}+\ldots+C_{p-1}\frac{dy}{dt}\right)e^{-pt}, \qquad (116)$$

где все C_i — постоянные. Дифференцируя по x, получим

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}=\left(\frac{d^{p+1}y}{dt^{p+1}}+C_1\frac{d^py}{dt^p}+\ldots+C_{p-1}\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dt}{dx}e^{-pt}-$$
$$-\left(\frac{d^py}{dt^p}+C_1\frac{d^{p-1}y}{dt^{p-1}}+\ldots+C_{p-1}\frac{dy}{dt}\right)pe^{-pt}\frac{dt}{dx};$$

а так как $\frac{dt}{dx}=e^{-t}$, то окончательно

$$\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}}=\left[\frac{d^{p+1}y}{dt^{p+1}}+(C_1-p)\frac{d^py}{dt^p}+(C_2-C_1p)\frac{d^{p-1}y}{dt^{p-1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+pC_{p-1}\frac{dy}{dt}\right]e^{-(p+1)t}.$$

Для производной порядка $p+1$ мы получили, таким образом, ту же форму, что и для производной порядка p. Так как эта форма, как мы видели, имеет место для производных первого, второго и третьего порядков, то она является общей для всех производных. Умножая обе части равенства (116) на x^p и замечая, что $x^p = e^{pt}$, получим:

$$x^p \frac{d^p y}{dx^p} = \frac{d^p y}{dt^p} + C_1 \frac{d^{p-1} y}{dt^{p-1}} + \ldots + C_{p-1} \frac{dy}{dt}.$$

Полагая здесь $p = 1, 2, \ldots, n$ и подставляя полученные выражения в уравнение (115), получим, очевидно, однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$b_0 y_t^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y_t' + b_n y = 0, \qquad (117)$$

где $y_t^{(k)}$ — производная от y по t. Определив из этого уравнения y как функцию от t, мы вернёмся к переменному x и получим решение уравнения (115).

Пример. Возьмём уравнение

$$x^2 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

Полагаем $x = e^t$. Производные от y по x при замене переменных примут вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t};$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) e^{-3t}.$$

Подставляя в данное уравнение, находим:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 6\frac{d^2 y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$k^3 - 6k^2 + 11k - 6 = 0.$$

Корнями этого уравнения будут $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$. Следовательно, решение данного уравнения через t представится в виде

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}.$$

Возвращаясь к переменному x, получаем общий интеграл данного уравнения

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3.$$

Заметим, что действительное выполнение подстановки $x = e^t$ не является необходимым. В самом деле, интегрируя линейное уравнение (117), мы ищем его решения в форме e^{kt}, но в силу равенства $x = e^t$ решению уравнения (117) вида e^{kt} соответствует решение уравнения (115) вида x^k. А потому можно, не выполняя подстановки, прямо искать решение уравнения (115) в форме x^k.

Пример.

$$x^3y''' + 3x^2y'' + 2xy' = 0,$$

Полагаем

$$y = x^k, \quad y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2},$$
$$y''' = k(k-1)(k-2)x^{k-3}.$$

Подставляя в данное уравнение, получаем:

$$k(k-1)(k-2)x^k + 3k(k-1)x^k + 2kx^k = 0.$$

Сокращая на x^k, получим алгебраическое уравнение для определения k:

$$k(k-1)(k-2) + 3k(k-1) + 2k = 0,$$

или

$$k^3 + k = 0.$$

Корни этого уравнения

$$k_1 = 0, \quad k_2 = +i, \quad k_3 = -i.$$

Следовательно, частными решениями данного уравнения служат функции

$$x^0, \quad x^i, \quad x^{-i}.$$

Общий интеграл данного уравнения получаем в форме

$$y = C_1 + C_2x^i + C_3x^{-i}.$$

Пользуясь произволом в выборе постоянных C_2 и C_3, можно подобрать их так, что интеграл будет выражаться только через действительные функции аргумента x. В самом деле,

$$x^i = e^{i\ln x} = \cos\ln x + i\sin\ln x,$$
$$x^{-i} = e^{-i\ln x} = \cos\ln x - i\sin\ln x;$$

следовательно,

$$C_2x^i + C_3x^{-i} = (C_2 + C_3)\cos\ln x + i(C_2 - C_3)\sin\ln x.$$

Полагая

$$C_2 + C_3 = A, \quad i(C_2 - C_3) = B,$$

получим общий интеграл в виде

$$y = C_1 + A\cos\ln x + B\sin\ln x.$$

§ 17. Неоднородные линейные уравнения n-го порядка.

Неоднородным линейным уравнением, или линейным уравнением с правой частью, называют уравнение вида

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_ny = q, \tag{118}$$

где p_0, p_1, ..., p_n и q — какие-либо функции x, причём $q \not\equiv 0$. Интеграция этого уравнения может быть сведена к интеграции однородного линейного уравнения и выполнению ряда квадратур. Этого можно достигнуть тем же методом вариации произвольных постоянных, который мы применяли для интеграции неоднородного линейного

уравнения второго порядка. Именно, если будет найден общий интеграл однородного уравнения

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=0 \qquad (119)$$

в виде

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \qquad (120)$$

то, считая в этом выражении все C_i некоторыми функциями x, можно определить эти функции так, чтобы выражение (120) служило общим интегралом уравнения (118). Как и в случае уравнений второго порядка, все C_i могут быть определены при помощи квадратур. Но во многих случаях сведение уравнения (118) к уравнению (119) может быть достигнуто значительно более коротким путём.

Докажем, что, если известно одно частное решение уравнения (118), то интеграция этого уравнения сводится к интеграции однородного уравнения (119).

Пусть y_1 — решение уравнения (118). Введём вместо y новую неизвестную функцию z, полагая

$$y=z+y_1.$$

Дифференцируя это равенство по x, получим:

$$y'=z'+y_1', \quad y''=z''+y_1'', \quad \ldots, \quad y^{(n)}=z^{(n)}+y_1^{(n)}.$$

Подставляем эти выражения в уравнение (118):

$$p_0[z^{(n)}+y_1^{(n)}]+p_1[z^{(n-1)}+y_1^{(n-1)}]+\ldots$$
$$\ldots+p_{n-1}(z'+y_1')+p_n(z+y_1)=q,$$

или

$$[p_0z^{(n)}+p_1z^{(n-1)}+p_2z^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}z'+p_nz]+$$
$$+[p_0y_1^{(n)}+p_1y_1^{(n-1)}+p_2y_1^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y_1'+p_ny_1]=q.$$

Но так как y_1 есть решение уравнения (118), то сумма, стоящая во второй квадратной скобке в левой части полученного соотношения, тождественно равна q, а потому уравнение принимает вид

$$p_0z^{(n)}+p_1z^{(n-1)}+p_2z^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}z'+p_nz=0.$$

Таким образом, чтобы свести неоднородное уравнение к однородному, достаточно найти одно частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим случаи, когда такое решение может быть найдено при помощи элементарных операций.

1. Возьмём уравнение

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=e^{\alpha x}P_m(x), \qquad (121)$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — постоянные коэффициенты. Будем искать частное решение этого уравнения в эле-

ментарных функциях. Так как $e^{\alpha x}$ при дифференцировании лишь получает постоянный множитель α, то естественно искать частное решение в виде произведения некоторой функции на $e^{\alpha x}$. Так как при этом после выполнения всех операций, указанных в левой части (121), и сокращения на $e^{\alpha x}$, слева должен будет остаться многочлен, тождественный с $P_m(x)$, то естественно предположить, что в искомом частном решении дополнительным множителем к $e^{\alpha x}$ служит некоторый многочлен относительно x. Таким образом, мы будем искать решение уравнения (121) в форме

$$y = e^{\alpha x} Q(x), \tag{122}$$

где $Q(x)$ — многочлен. Коэффициенты и степень многочлена $Q(x)$ надо определить так, чтобы функция (122) служила решением уравнения (121). Чтобы выполнить подстановку функции (122) в уравнение (121), продифференцируем равенство (122) n раз, применяя формулу Лейбница:

$$\begin{aligned}
y &= e^{\alpha x} Q(x),\\
y' &= \alpha e^{\alpha x} Q(x) + e^{\alpha x} Q'(x),\\
y'' &= \alpha^2 e^{\alpha x} Q(x) + 2\alpha e^{\alpha x} Q'(x) + e^{\alpha x} Q''(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y^{(n)} &= \alpha^n e^{\alpha x} Q(x) + n\alpha^{n-1} e^{\alpha x} Q'(x) + \dots + e^{\alpha x} Q^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

Умножая эти равенства соответственно на a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 и складывая, получим

$$\begin{aligned}
&a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y =\\
&= e^{\alpha x} Q(x)(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n) +\\
&\quad + e^{\alpha x} Q'(x)(a_0 n\alpha^{n-1} + a_1(n-1)\alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1}) +\\
&\quad + \frac{e^{\alpha x} Q''(x)}{1\cdot 2}[a_0 n(n-1)\alpha^{n-2} +\\
&\qquad + a_1(n-1)(n-2)\alpha^{n-3} + \dots + 2\cdot 1\, a_{n-2}] +\\
&\quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\quad + \frac{e^{\alpha x} Q^{(n-1)}(x)}{1\cdot 2\dots(n-1)}[a_0 n(n-1)\dots 3\cdot 2\alpha +\\
&\quad + a_1(n-1)(n-2)\dots 3\cdot 2\cdot 1] + \frac{e^{\alpha x} Q^{(n)}(x)}{1\cdot 2\dots n} a_0 n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1.
\end{aligned}$$

Левая часть этого равенства в силу уравнения (121) равна $e^{\alpha x} P_m(x)$. Далее, если обозначить характеристический многочлен для левой части уравнения (121), соответствующий подстановке $e^{\alpha x}$ (см. § 15), через $f(\alpha)$, то легко заметить, что многочлены, стоящие в квадратных скобках в предыдущем равенстве, равны соответственно

$$f(\alpha),\ f'(\alpha),\ f''(\alpha),\ \dots,\ f^{(n-1)}(\alpha),\ f^{(n)}(\alpha).$$

А потому равенство можно записать в следующей сокращённой форме:

$$e^{\alpha x}P_m(x) = e^{\alpha x}\left[Q(x)f(\alpha) + \frac{Q'(x)}{1}f'(\alpha) + \ldots + \frac{Q^{(n-1)}(x)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(\alpha) + \frac{Q^{(n)}(x)}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(\alpha)\right].$$

Отсюда

$$P_m(x) = Q(x)f(\alpha) + \frac{Q'(x)}{1}f'(\alpha) + \ldots + \frac{Q^{(n)}(x)}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(\alpha). \quad (123)$$

Если $f(\alpha) \neq 0$, то степень многочлена $Q(x)$, очевидно, должна совпадать со степенью $P_m(x)$, т. е. многочлен $Q(x)$ должен быть взят m-й степени. Следовательно, мы должны положить

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m.$$

Выполняя действия в правой части равенства (123), получим некоторый многочлен m-й степени, коэффициенты которого содержат в качестве неизвестных величины b_0, b_1, b_2, ..., b_m. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, получим $m+1$ равенств, из которых найдём все неизвестные коэффициенты b_0, b_1, ..., b_m многочлена $Q(x)$. Таким образом, *если α не есть корень характеристического многочлена, то частное решение уравнения* (121) *можно искать в форме*

$$e^{\alpha x}Q(x),$$

причём коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ найдутся методом неопределённых коэффициентов.

Допустим теперь, что $f(\alpha) = 0$, т. е. α — корень характеристического многочлена. Для общности предположим, что этот корень имеет кратность p, так что

$$f(\alpha) = 0,\ f'(\alpha) = 0,\ f''(\alpha) = 0, \ldots, f^{(p-1)}(\alpha) = 0,\ f^{(p)}(\alpha) \neq 0.$$

Равенство (123) имеет вид

$$P_m(x) = \frac{Q^{(p)}(x)}{1\cdot 2\ldots p}f^{(p)}(\alpha) + \frac{Q^{(p+1)}(x)}{1\cdot 2\ldots(p+1)}f^{(p+1)}(\alpha) + \ldots + \frac{Q^{(n)}(x)}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(\alpha). \quad (124)$$

Это равенство показывает, что $Q^{(p)}(x)$ есть многочлен степени m, а следовательно, сам многочлен $Q(x)$ имеет степень $m+p$: $Q(x) = c_0x^{m+p} + c_1x^{m+p-1} + \ldots + c_mx^p + c_{m+1}x^{p-1} + \ldots + c_{m+p}$. Но равенство (124) позволяет определить лишь $m+1$ из этих коэффициентов, именно c_0, c_1, ..., c_m; коэффициенты c_{m+1}, c_{m+2}, ..., c_{m+p} остаются, следовательно, произвольными и для простоты их

можно считать равными нулю. Многочлен $Q(x)$ можно, таким образом, взять в виде

$$Q(x) = c_0x^{m+p} + c_1x^{m+p-1} + \ldots + c_mx^p,$$

или

$$Q(x) = x^p(c_0x^m + c_1x^{m-1} + \ldots + c_m).$$

Итак, *если α — корень характеристического многочлена кратности p, то уравнение* (121) *допускает частное решение вида*

$$x^pe^{\alpha x}R_m(x),$$

где $R_m(x)$ — многочлен m-й степени, коэффициенты которого могут быть найдены методом неопределённых коэффициентов.

Пример 1.

$$y'' + y' - 12y = (x-1)e^{2x}.$$

Общий интеграл однородного уравнения

$$y'' + y' - 12y = 0$$

имеет вид

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x}.$$

Ищем частное решение данного неоднородного уравнения в форме

$$y_1 = (Ax + B)e^{2x},$$

откуда

$$y_1' = Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x}, \quad y_1'' = 4Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x}.$$

Подставляя в данное уравнение и сокращая на e^{2x}, получим

$$5A - 6B - 6Ax = x - 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях:

$$-6A = 1, \quad 5A - 6B = -1,$$

откуда

$$A = -\frac{1}{6}, \qquad B = \frac{1}{36}.$$

Следовательно, частным решением неоднородного уравнения будет

$$y_1 = -\frac{6x-1}{36}e^{2x}.$$

Общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-4x} - \frac{6x-1}{36}e^{2x}.$$

Пример 2.

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$k^3 - 5k^2 + 8k - 4 = 0;$$

его корни

$$k_1 = 1, \quad k_2 = k_3 = 2.$$

Общий интеграл однородного уравнения

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$$

имеет вид

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)\, e^{2x}.$$

Частное решение данного неоднородного уравнения мы должны искать в форме

$$y_1 = Ax^2 e^{2x},$$

следовательно,

$$y_1' = Ae^{2x}(2x + 2x^2), \quad y_1'' = Ae^{2x}(2 + 8x + 4x^2),$$
$$y_1''' = Ae^{2x}(12 + 24x + 8x^2).$$

Подставляя значения производных в данное уравнение, получим после упрощений

$$2Ae^{2x} = e^{2x},$$

откуда

$$A = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$y_1 = \frac{1}{2} x^2 e^{2x},$$

и общий интеграл имеет вид

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)\, e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

2. Рассмотрим уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = e^{\alpha_1 x} P_{m_1} + \ldots + e^{\alpha_k x} P_{m_k},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянные, а $P_{m_1}, P_{m_2}, \ldots, P_{m_k}$ — многочлены степеней $m_1, m_2, \ldots, m_k$ относительно x. Обозначим для краткости левую часть уравнения через $A\{y\}$. Тогда уравнение примет вид

$$A\{y\} = e^{\alpha_1 x} P_{m_1} + e^{\alpha_2 x} P_{m_2} + \ldots + e^{\alpha_k x} P_{m_k}. \qquad (125)$$

Напишем теперь k линейных уравнений

$$A\{y\} = e^{\alpha_1 x} P_{m_1},$$
$$A\{y\} = e^{\alpha_2 x} P_{m_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$A\{y\} = e^{\alpha_k x} P_{m_k}.$$

Для каждого из этих уравнений можно найти частное решение методом, который дан выше. Обозначим эти решения соответственно через

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k.$$

В таком случае нетрудно убедиться в том, что сумма

$$y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_k$$

служит решением уравнения (125). В самом деле, непосредственным вычислением находим:

$$A\{y_1+y_2+y_3+\ldots+y_k\}=A\{y_1\}+A\{y_2\}+\ldots+A\{y_k\}.$$

Но каждая из скобок правой части совпадает с соответствующим членом правой части уравнения (125) и, следовательно, сумма $y_1+y_2+\ldots+y_k$ удовлетворяет уравнению (125). Таким образом, этот случай сводится к предыдущему.

3. Рассмотрим уравнение вида

$$A\{y\}=P_m(x)\cos\alpha x \quad \text{или} \quad A\{y\}=P_m(x)\sin\alpha x.$$

Этот случай также легко свести к предыдущему. В самом деле,

$$\cos\alpha x=\frac{e^{\alpha xi}+e^{-\alpha xi}}{2},\quad \sin\alpha x=\frac{e^{\alpha xi}-e^{-\alpha xi}}{2i}.$$

Следовательно, данные уравнения можно написать в виде

$$A\{y\}=\frac{1}{2}\left[e^{\alpha xi}P_m(x)+e^{-\alpha xi}P_m(x)\right]$$

или

$$A\{y\}=\frac{1}{2i}\left[e^{\alpha xi}P_m(x)-e^{\alpha xi}P_m(x)\right]$$

и искать частные решения уравнений

$$A\{y\}=\frac{1}{2}e^{\alpha xi}P_m(x) \quad \text{и} \quad A\{y\}=\pm\frac{1}{2}e^{-\alpha xi}P_m(x).$$

Найдя частные решения этих уравнений, можно вернуться к тригонометрическим функциям и освободиться от мнимых величин. Но можно и вовсе не вводить в вычисление мнимые величины, а непосредственно искать решение данных уравнений в форме

$$Q_m(x)\cos\alpha x+R_m(x)\sin\alpha x$$

или, более общо,

$$x^p\left[Q_m(x)\cos\alpha x+R_m(x)\sin\alpha x\right]$$

(эта форма соответствует тому случаю, когда αi есть p-кратный корень характеристического уравнения).

Пример.

$$y'''-y''-6y'=x\sin x.$$

Общий интеграл однородного уравнения имеет вид

$$y=C_1+C_2e^{3x}+C_3e^{-2x}.$$

Частное решение данного уравнения ищем в форме

$$y_1=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x.$$

Вычислив производные y_1', y_1'', y_1''' и подставив в данное уравнение, получим

$$(7D-9A+B+2C)\sin x+(-7B-2A-9C+D)\cos x+$$
$$+(7C+A)x\sin x+(-7A+C)x\cos x=x\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при функциях $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$ и $x\cos x$ в правой и левой частях, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} -9A + B + 2C + 7D &= 0,\\ -2A - 7B - 9C + D &= 0,\\ A \quad\quad + 7C \quad\quad &= 1,\\ -7A \quad\quad + C \quad\quad &= 0. \end{aligned}$$

Решив эту систему, найдём

$$A = \frac{1}{50},\quad B = -\frac{23}{125},\quad C = \frac{7}{50},\quad D = \frac{3}{250}.$$

Следовательно,

$$y_1 = \frac{5x-46}{250}\sin x + \frac{35x+3}{250}\cos x.$$

Общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-2x} + \frac{5x-46}{250}\sin x + \frac{35x+3}{250}\cos x.$$

4. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение типа уравнений Эйлера

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = \ln x \cdot P_m(x). \quad (126)$$

Подстановкой $x = e^t$ этот случай также можно свести к предыдущим. В самом деле, эта подстановка приводит левую часть уравнения (126) к виду

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y' + b_n y.$$

Правая часть уравнения (126) примет вид

$$t(c_0 e^{mt} + c_1 e^{(m-1)t} + \ldots + c_{m-1} e^t + c_m).$$

Всё уравнение (126) приведётся, таким образом, к виду, рассмотренному выше.

Пример.

$$x^2 y'' + x y' - 4y = x^3 \ln x. \quad (а)$$

Полагая $x = e^t$, приводим уравнение к виду

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 4y = t e^{3t}. \quad (б)$$

Ищем частное решение в форме

$$y_1 = (At + B) e^{3t}.$$

Тогда

$$y_1' = (3At + 3B + A) e^{3t};\quad y_1'' = (9At + 9B + 6A) e^{3t}.$$

Подстановка этих значений в уравнение (б) даёт:

$$(9At + 9B + 6A) e^{3t} - 4(At + B) e^{3t} = t e^{3t}.$$

Сокращая на e^{3t} и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем:

$$6A + 5B = 0,\quad 5A = 1,$$

откуда

$$A=\frac{1}{5},\quad B=-\frac{6}{25}.$$

Следовательно,

$$y_1=\left(\frac{t}{5}-\frac{6}{25}\right)e^{3t}.$$

Так как общий интеграл однородного уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4y=0$$

имеет вид

$$C_1e^{2t}+C_2e^{-2t},$$

то общим интегралом уравнения (б) будет

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}+\left(\frac{t}{5}-\frac{6}{25}\right)e^{3t};$$

возвращаясь к аргументу x, получим общий интеграл данного уравнения в виде

$$y=C_1x^2+C_2x^{-2}+\left(\frac{\ln x}{5}-\frac{6}{25}\right)x^3.$$

§ 18. Интегрирование уравнений при помощи рядов.

До сих пор мы рассматривали методы нахождения точных решений дифференциальных уравнений различных типов. Между тем, для многих задач, в особенности для задач прикладного характера, бывает достаточно знать лишь приближённое решение данного уравнения, причём весьма часто нет надобности знать общий интеграл, а необходимо найти лишь частное решение, удовлетворяющее некоторым заранее наложенным условиям. В этих случаях искомое решение часто можно найти без применения общих методов интеграции в виде некоторого сходящегося ряда, представляющего искомую функцию в пределах его сходимости.

Посмотрим, какие и сколько условий можно наложить заранее на искомое частное решение дифференциального уравнения. Мы видели, что для уравнений первого порядка $y'=f(x, y)$ можно потребовать, чтобы при данном значении $x=x_0$ искомая функция y принимала заданное значение $y=y_0$. Этими начальными данными: x_0, y_0 определялось при известных условиях единственное частное решение данного дифференциального уравнения. Нетрудно убедиться в том, что для уравнения n-го порядка

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0 \qquad (127)$$

можно заранее потребовать, чтобы при данном значении $x=x_0$ как сама искомая функция y, так и все её производные до $(n-1)$-го порядка принимали заранее заданные значения

$$y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}.$$

В самом деле, общий интеграл уравнения (127)

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{128}$$

содержит n произвольных постоянных. Продифференцировав равенство (128) $n-1$ раз по x, мы получим вместе с равенством (128) всего n равенств, содержащих величины $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, а также постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Полагая в этих равенствах

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

получим n уравнений, из которых в общем случае можно найти значения всех постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. При этих значениях равенство (128) определит искомую функцию y, удовлетворяющую указанным начальным данным.

Примечание. Существование решения дифференциального уравнения (127), удовлетворяющего заранее указанным начальным данным, может быть вполне строго доказано тем же методом последовательных приближений, который был применён при доказательстве существования интеграла уравнения первого порядка. Именно, разрешив уравнение (127) относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{129}$$

можно показать, что при известных условиях, налагаемых на функцию φ, уравнение (129) имеет единственное решение y, удовлетворяющее начальным условиям

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}.$$

Будем теперь искать частное решение уравнения (127) при начальных данных $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$, не находя общего интеграла этого уравнения. Разрешив уравнение (127) относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{129}$$

допустим, что функция φ вблизи данной системы начальных значений имеет частные производные любого порядка по всем аргументам. В таком случае, из равенства (129) дифференцированием найдём $(n+1)$-ю производную:

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}.$$

Подставляя сюда вместо $y^{(n)}$ его выражение (129), получим

$$y^{(n+1)} = \psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{130}$$

Дифференцируя (130), таким же образом получим

$$y^{(n+2)} = \chi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{131}$$

В силу сделанного предположения о функции φ, этот процесс можно продолжить безгранично и получить бесконечную последовательность производных

$$y^{(n)}, y^{(n+1)}, y^{(n+2)}, \ldots$$

Полагая в равенствах (129), (130), (131) и всех следующих

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

получим последовательность начальных значений производных всех высших порядков

$$y_0^{(n)},\ y_0^{(n+1)},\ y_0^{(n+2)},\ \ldots \tag{132}$$

Составим теперь ряд Тэйлора

$$y_0 + \frac{x-x_0}{1}y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}y_0'' + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\ldots n}y_0^{(n)} + \ldots \tag{133}$$

Можно показать, что если этот ряд сходится в каком-либо интервале $(x_0-\rho,\ x_0+\rho)$, то функция, определяемая этим рядом, при некоторых дополнительных ограничениях на φ является решением уравнения (129). Обозначив сумму ряда (133) через $s(x)$:

$$s(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{1}y_0' + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{1\cdot 2\ldots n}y_0^{(n)} + \ldots \tag{134}$$

непосредственно убеждаемся в том, что функция $s(x)$ удовлетворяет также заданным начальным условиям:

$$s(x_0) = y_0,\ s'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ s^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},\ \ldots$$

Следовательно, $s(x)$ есть искомое частное решение уравнения (129).

Примечание. В известных случаях, как, например, в случае линейных уравнений, оказывается возможным определить последовательные производные

$$y_0^{(n)},\ y_0^{(n+1)},\ldots$$

в общем виде, т. е. не придавая начальным данным $y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ определённых числовых значений. В таком случае эти начальные данные войдут в коэффициенты ряда (133). Их можно будет рассматривать как произвольные постоянные. Равенство (134) будет в этом случае давать общее решение уравнения (129).

Пример. Найти частное решение уравнения гармонических колебаний

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0,$$

определяемое начальными данными

$$x_0 = 0,\quad y_0 = 0,\quad y_0' = a.$$

Из данного уравнения имеем $y_0'' = 0$.

Дифференцируя данное уравнение, находим:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a^2y' = 0;$$

при $x = 0$ имеем $y_0''' = -a^3$.

Дифференцируя ещё раз, получим:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + a^2y'' = 0;$$

при $x = 0$ имеем $y_0^{(IV)} = 0$.

Продолжая этот процесс, последовательно найдём:

$$y_0^{(V)} = a^5, \quad y_0^{(VI)} = 0, \quad y_0^{(VII)} = -a^7, \ldots$$

Подставляя эти выражения в равенство (134), получим

$$s(x) = \frac{ax}{1} - \frac{a^3x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^5x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots$$

Таково искомое частное решение. Легко заметить, что его можно записать в конечной форме

$$s(x) = \sin ax.$$

При применении изложенного метода на практике можно несколько сократить выкладки. Именно, вместо последовательного определения производных $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n+1)}$, ... можно прямо написать ряд (133) с коэффициентами неопределёнными, начиная с члена, содержащего $(x - x_0)^n$, и подставив этот ряд в данное уравнение, так подобрать неопределённые коэффициенты ряда, чтобы уравнение обратилось в тождество.

Пример. Найти частное решение уравнения

$$y'' + xy = 0$$

при начальных данных

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_0' = 0.$$

Следуя сказанному выше, пишем искомое решение в виде ряда

$$y = 1 + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \ldots$$

Дифференцируя дважды, получим:

$$y'' = a_1 \cdot 2 \cdot 1 + a_2 \cdot 3 \cdot 2x + a_3 \cdot 4 \cdot 3x^2 + \ldots + a_n(n+1)\,nx^{n-1} + \ldots$$

Подстановка значений производных в заданное уравнение даёт:

$$a_1 2 \cdot 1 + (a_2 \cdot 3 \cdot 2 + 1)\,x + a_3 \cdot 4 \cdot 3x^2 + (a_4 \cdot 5 \cdot 4 + a_1)\,x^3 + \ldots$$
$$\ldots + [a_n(n+1)\,n + a_{n-3}]\,x^{n-1} + \ldots = 0.$$

Приравнивая нулю все коэффициенты, найдём:

$$a_1 \cdot 2 \cdot 1 = 0, \quad a_2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 = 0, \quad a_3 \cdot 4 \cdot 3 = 0,$$
$$a_4 \cdot 5 \cdot 4 + a_1 = 0, \ldots, \quad a_n(n+1)\,n + a_{n-3} = 0, \ldots$$

Отсюда

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{1}{3 \cdot 2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0, \ldots,$$

$$a_n = -\frac{a_{n-3}}{(n+1)\,n}, \ldots$$

Следовательно, искомое решение представится в виде ряда

$$y = 1 - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} - \ldots \pm \frac{x^{3n}}{3n(3n-1)\ldots 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \ldots$$

Применяя признак сходимости Даламбера, легко убедиться в том, что этот ряд сходится при всяком x и, следовательно, даёт решение данного уравнения.

УПРАЖНЕНИЯ.

Найти общие интегралы следующих уравнений:

1. $y'\sqrt{1-x^2} - y^2 - 1 = 0$. *Отв.* $\operatorname{arctg} y - \arcsin x = C$.
2. $\frac{3x - 2y^2}{y}\,dx + \frac{3y - 2x^2}{x}\,dy = 0$. *Отв.* $\frac{3y^2}{2x} - \frac{3x^2}{2y} = C$.

3. Найти кривую, поднормаль которой постоянна.
Отв. Парабола.
4. Найти кривые с постоянной подкасательной.
Отв. Показательные кривые.
5. Найти кривую, длина нормали которой постоянна.
Отв. Семейство окружностей с центром на оси x.
6. Найти дифференцируемую функцию $z=f(x)$, зная, что она удовлетворяет уравнению

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{1}$$

Решение. Дифференцируя данное уравнение сначала по x, затем по y, получим:

$$f'(x+y)=f'(x),\quad f'(x+y)=f'(y).$$

Отсюда

$$f'(x)=f'(y),$$

и так как x и y независимы, то такое равенство возможно лишь в случае

$$f'(x)=c=\text{const}.$$

Итак,

$$f'(x)=c,$$

или, полагая $f(x)=z$,

$$\frac{dz}{dx}=c,$$

откуда

$$z=cx+C. \tag{2}$$

Для определения C положим в (1) $x=y=0$; получим $f(0+0)=f(0)+f(0)$, т. е. $f(0)=0$, так что при $x=0$ и $z=0$. Полагая в равенстве (2) $x=0$, получим $C=0$.
Итак,

$$z=f(x)=cx.$$

7. Найти дифференцируемую функцию $z=f(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy.$$

Отв. $z=x^2$.

Найти дифференцируемые функции, характеризуемые следующими уравнениями:

8. $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$.
Отв. $f(x)=e^{Cx}$.

9. $f(xy)=f(x)+f(y)$.
Отв. $f(x)=C\ln x$.

10. $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)}$.
Отв. $f(x)=\operatorname{tg} Cx$.

Найти общие интегралы уравнений:

11. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+y}$.
Отв. $x^2-2yx-y^2=C$.

12. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$.
Отв. $x^2+y^2=Cy$.

13. $x\,dy-y\,dx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.
Отв. $1+2Cy-C^2x^2=0$.

14. $(x-y)\,dx+x\,dy=0$.
Отв. $x\cdot e^{\frac{y}{x}}=C$.

15. $x\dfrac{dy}{dx}=y\ln\dfrac{y}{x}$.
Отв. $y=xe^{Cx+1}$.

16. $y'+ky=e^{ax}$.
Отв. $y=Ce^{-kx}+\dfrac{e^{ax}}{a+k}$.

17. $y'+\dfrac{y}{x}=2\ln x+1$.
Отв. $y=x\ln x+\dfrac{C}{x}$.

18. $y' - e^x y = -e^{3x}$.

Отв. $y = e^{2x} + 2e^x + 2 + Ce^{e^x}$.

19. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

Указание: $\sqrt{y} = z$.

Отв. $y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

20. $y' + y = xy^3$.

Отв. $y = Ce^{-2x} + \frac{2x-1}{2}$.

21. $(1 - x^2)\, y' - xy = xy^2$.

Отв. $y = \frac{1}{c\sqrt{1-x^2} - 1}$.

22. $y = xy' + y'^2$.

Отв. $y = Cx + C^2$. Особое решение: $x^2 + 4y = 0$.

23. $y = xy' - \frac{1}{y'}$.

Отв. $y = Cx - \frac{1}{C}$. Особое решение: $y^2 + 4x = 0$.

24. $y - 2xy' - y'^2 = 0$.

Отв. $(3xy + 2x^3 + C)^2 - 4(y + x^2)^3 = 0$.

25. $y'' - k^2 y = 0$.

Отв. $y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$.

26. $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Отв. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$.

27. $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Отв. $y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

28. $y'' - 12y' + 36y = 0$.

Отв. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{6x}$.

29. $y'' + y = x^2$.

Отв. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 - 2$.

30. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

Отв. $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \frac{5\sin x + 7\cos x}{74}$.

31. $y'' - 3y = xe^x$.

Отв. $y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{2}(x+1)\, e^x$.

32. $y'' + a^2 y = e^x$.

Отв. $y = \frac{e^x}{a^2+1} + C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$.

33. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{(\cos 2x)^3}}$.

Отв. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \sqrt{\cos 2x}$.

34. $(\sin x - x\cos x)\, y'' - x \sin x \cdot y' - \sin x \cdot y = 0$.

Указание. Частное решение: $y_1 = x$.

Отв. $y = C_1 x + C_2 \sin x$.

35. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2$.

Отв. $y = 1 + C_1 x + C_2 x^2$.

36. $xy'' + y' = 1$.

Отв. $y = x + C_1 + C_2 \ln x$.

37. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$.

Отв. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}$.

38. $y^V - 3y^{IV} + 4y''' - 4y'' + 3y' - y = 0$.

Отв. $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + C_4 \cos x + C_5 \sin x$.

39. $y^{IV} + a^4 y = 0$.

Отв. $y = e^{\frac{ax}{\sqrt{2}}}\left(C_1 \cos \frac{ax}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{ax}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{ax}{\sqrt{2}}}\left(C_3 \cos \frac{ax}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{ax}{\sqrt{2}}\right)$.

40. $y'' - 5y' + 6y = x + 1$.

Отв. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{6x+11}{36}$.

41. $y'' - 6y' + 9y = x^2$.

Отв. $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3x^2 + 4x + 2}{27}$.

42. $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$.

Отв. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4} xe^{3x}$.

43. $y''' - y = e^{3x}$.

Отв. $y = C_1 e^x + e^{-x}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \frac{e^{3x}}{26}$.

44. $y'' - 7y' + 12y = xe^x$.

Отв. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \frac{6x+5}{36} e^x$.

45. $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(1 - x)$.

Отв. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x^2 e^{2x}}{2}$.

46. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 6e^x$.

Отв. $y = C_1 + e^x (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) + x^3 e^x$.

47. $y^{IV} - y = xe^x$.

Отв. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + \frac{x^2 - 3x}{8} e^x$.

48. $y'' - 3y' - 4y = \sin x$.

Отв. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} + \frac{3 \cos x - 5 \sin x}{34}$.

49. $y'' + 4y = \cos 2x$.

Отв. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x$.

50. $y'' + y = 5 + \cos x$.

Отв. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x + 5$.

51. $y''' - y = e^x + 2$.

Отв. $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \frac{1}{3} xe^x - 2$.

52. $y^V - 3y^{IV} + 2y''' = 8x - 12$.

Отв. $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^x + C_5 e^{2x} + \frac{x^4}{16}$.

53. $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 16y' + 16y = 2e^{-2x} - \sin 2x$.

Отв. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\, e^{-2x}(C_3 + C_4 x) + \frac{1}{8} x^2 e^{-2x} + \frac{1}{32} x \sin 2x$.

54. $\frac{1}{2} x^3 y''' + x^2 y'' + xy' - y = 1 - \ln x$.

Отв. $y = C_1 \cos(\sqrt{2} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{2} \ln x) + C_3 x + \ln x$.

55. $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x$.

Отв. $y = C_1 e^{-2x} + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x) - \frac{1}{20} xe^x (\cos x - 3 \sin x)$.

56. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 15e^x$.

Отв. $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^x + \frac{5}{2} x^3 e^x$.

57. $x^2 y'' + xy' + y = \ln x$.

Отв. $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + \ln x$.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.

(Цифры обозначают страницы.)

Абеля теорема 317
Абсолютная сходимость, абсолютно сходящийся ряд 315
Абсолютный максимум, минимум 183
Алгебра, основное предложение 43
Алгебраическая форма комплексного числа 29
Аппроксимация функции 338
Аргумент 19
Арифметическое среднее 182
Арксинус, разложение в ряд 351
Арктангенс, разложение в ряд 350
Архимеда спираль 381
Асимптоты 383

Безу теорема 12
Бернулли дифференциальное уравнение 454
Бином Ньютона 11
—, разложение в ряд 348
Бинормаль 422

Валлиса формула 121
Вариация постоянного 447
Вейерштрасса признак сходимости 329
Вектор 18
Векторное поле 298
Векторов отношение 22
— сложение 22
Верхний предел последовательности 333
Вивиани задача 240, 253
Винтовая линия 422
Возврата ребро 428
— точка 392
Выражения неопределённые 367
Высшие трансцендентные функции 110
— частные дифференциалы 160
— — производные 157
Высший полный дифференциал 160
Вычитание комплексных чисел 24
— рядов 319

Гармонический ряд 303
Гармоническое колебание 441, 482, 504
Геометрическая прогрессия 301
Геометрическое среднее, обобщённое 190
Гиперболическая спираль 382
Гиперболические точки 172
Гиппократа задача 243
Главная нормаль 422
— часть приращения 140
Главные направления 422
Границы корней 53
Графики целых рациональных функций 55
Грина теорема 295
Гюльдена теоремы 280

Даламбера признак сходимости 305
— теорема 43
Двойной интеграл 206, 230, 234
— —, вычисление 236
— — геометрическое значение 211, 230
— ряд 319
Двукратная точка кривой 394
Двучленного дифференциала интегрирование 95
Действительные корни, отделение 47
Декартов лист 384
Деление комплексных чисел 28
Дивергенция 298
Дирихле условия 356
Дифференциал полный 142, 219, 222
—, геометрическое значение 151
— частный 138
Дифференциальное уравнение 435, см. также соотв. название дифф. ур-ния
Дифференциальный параметр 294
Дифференцирование 143
— неявной функции 147
— под знаком интеграла 200
— рядов 332
— сложной функции 143
Дифференцируемая функция 141
Дроби простейшие (элементарные) 66, 76
— — второго типа 76

Единица мнимая 29

Жук 395

Зависимость линейная 485
Замена переменных 245, 252, 270
Замкнутая область 131
Знакопеременный ряд 301, 313
Знакопостоянный ряд 301
Знакочередующийся ряд 301

Извлечение корня из комплексных чисел 31
Изоклины 442
Изолированная точка 391
Инерции момент 282
Интеграл двойной 206, 230, 234
— —, вычисление 236
— —, геометрическое значение 211, 230
— дифференциального уравнения 436
— — — общий 437
— — — особый 438
— — — частный 437

Интеграл кратный 230
— криволинейный 214, 218
— Пуассона 123, 255
— равномерно сходящийся 202
— тройной, трёхкратный 266
— функции, зависящей от параметра 196
Интегралы определённые 120
Интегральное исчисление (для функций неск. переменных) 195
Интегральные кривые 437
— —, приближённое построение 441
Интегральный косинус 110
— логарифм 110
— синус 110
Интегрирование 443
— двучленного дифференциала 95
— дифференциального уравнения 435
— — — при помощи рядов 502
— иррациональных функций 92
— многократное 195
— по параметру 206
— показательных функций 110
— полного дифференциала 222
— рациональных функций 66, 74, 79, 86
— рядов 330
— трансцендентных функций 107
— тригонометрических функций 111
— элементарных дробей 66
Интервал сходимости 325, 335

Касательная 376, 419
—, длина 378
— плоскость 154
— полярная 380
Квадратов наименьших способ 178
Квадратура 443
Клеро дифференциальное уравнение 457, 460
Колебание гармоническое 441, 482, 504
Комплексное число 19
Комплексные члены ряда 322
Координаты полярные 252, 274
Корень из комплексного числа 31
— многочлена 9
— уравнения 9
— — кратный 15
— —, приближённое вычисление 47, 58
— — простой 15
— —, число корней 13, 16
Корни отрицательные 53
— положительные 53
— сопряжённые 44
Косинус интегральный 110
—, разложение в ряд 345
Коши признак сходимости 306
— теорема 317, 369
Коэффициент направления 30
Коэффициенты разложения дроби 69
— уравнения, выражения через корни 44
Кратная точка 395
Кратности показатель 15
Кратность корня 15
Кратный корень 15
Кривая поверхность, площадь 257, 262
Кривизна 403, 423
— вторая 424
— средняя 403
Кривизны круг 406
— радиус 406, 425
— центр 406
Криволинейный интеграл 214, 218
Кривые интегральные 437
— —, приближённое построение 441
— плоские 376
— уникурсальные 105
Кривых семейство 412
Круг кривизны 406

Круговые функции, связь с логарифмом 85
Кручение 424
Кручения радиус 425

Лагранжа дифференциальное уравнение 455, 461, 464
— метод 185, 447
Лейбница правило 200, 201
Линейные дифференциальные уравнения 446, 477, 480, 482, 484, 488, 494
Линейно зависимые, независимые функции 479
Линия винтовая 422
Липшица условие 465
Логарифм интегральный 110
— комплексного числа 37
—, разложение в ряд 346
Логарифмическая спираль 382
Ложного положения правило 58
Лопиталя правило 369
Луночки гиппократовы 243

Маклорена ряд 343, 354
— формула 10, 342, 353
Максимум 167, 176
— абсолютный 183
— относительный 183
Мартенса обобщение теоремы об умножении рядов 321
Минимум 167, 176
— абсолютный 183
— относительный 183
Мнимая единица 29
Мнимые числа 16, 17
Многократное интегрирование 195
Многочлен, разложение в произведение 45
Многочлена корень 9
Моавра формула 30
Модуль 19
Момент инерции 282

Наименьших квадратов способ 178
Направления главные 422
— коэффициент 30
Невихревое движение 299
Неоднородные уравнения 482
Неопределённые выражения 367
Неопределённых коэффициентов метод 497
Непрерывная функция, непрерывность 132
Неравномерно сходящийся ряд 328
Нечётная функция 362
Неявная функция 129
— —, дифференцирование 147
— —, теорема существования 149
Нормаль 156, 378
— главная 422
—, длина 378
— полярная 380
—, производная по нормали 294
Нормальная плоскость 420
Ньютона бином 11
— способ 54, 60

Область замкнутая 131
— изменения функции 131
— ограниченная 131
— связная 235
Обобщённое среднее геометрическое 190
Общий интеграл 437
Объёма элемент 234, 274
Объёмы 275
Огибающая 413, 427
Ограниченная область 131
Однородная функция 163
Однородности показатель 163
Однородные уравнения 446, 450, 480, 484

Определённые интегралы 120
Определитель функциональный 246, 252, 273
Основное предложение высшей алгебры 43
Особые решения 452, 462, 473
— точки 389
Особый интеграл 438
Остаточный член 340
Остроградского метод 86
Остроградского формула на плоскости 287
— — в пространстве 291
Отделение корней 53
Относительный максимум, минимум 183
Отрицательные корни 53

Парабола расходящаяся 392
Параболические точки 176
Параболы высших порядков 55
Параметр 412
— дифференциальный 294
—, интегрирование функций, зависящих от параметра 196, 206
Первообразная функция 195
Перелома точка 397
Переменных замена 245, 252, 270
— разделение 443
Перемены знаков 48
Плоскость касательная 154
— нормальная 420
— соприкасающаяся 420
— спрямляющая 422
Площади элемент 234, 249
Площадь поверхности 259, 262
Поверхностей семейство 426
Поверхности площадь 259, 262
— развёртывающиеся 430
— эквипотенциальные 299
Погрешность случайная 179
Подкасательная 378
— полярная 380
Поднормаль 378
— полярная 380
Подстановки Эйлера 99
Показатель кратности 15
— однородности 163
Показательная функция, интегрирование 110
— —, разложение в ряд 344
Поле векторное 298
— потенциальное 299
Полное приращение функции 140
Полный дифференциал 142, 219, 222
— —, геометрическое значение 151
Положительные корни 53
Полярные координаты 252, 274
Порядок дифференциального уравнения 435
— прикосновения 398
Последовательных дифференцирований способ 72
— приближений метод 466
Потенциальное поле 299
Предел верхний последовательности 333
— комплексного переменного 34
Предельная точка 131
Приближений последовательных метод 466
Приближённое вычисление корней 47, 58
Признаки сходимости 302 и сл.
Прикосновение k-го порядка 398
Приращение второе 139
— полное 140
— третье 142
— частное 136
Прогрессия геометрическая 301
Производная по нормали 294
— частная 136
— —, высшая 157
— —, геометрическое значение 151
Простейшие (элементарные) дроби 66, 76
Простой корень 15
Пуассона интеграл 123, 255

Равномерно сходящийся интеграл 202
— — ряд 328
— непрерывная функция 135
Радиус кривизны 406, 425
— кручения 425
Развёртка 411
Развёртывающая 411
Развёртывающаяся поверхность 430
Разделение переменных 443
Разложение дроби на простейшие 67, 76
— многочлена в произведение 45
— целой рациональной функции на множители 12
— функции в ряд 338, 343, 349
Расходящаяся парабола 392
Расходящийся ряд 300
Ребро возврата 428
Regula falsi 58
Приведения формула 81, 114
Решение дифференциального уравнения 436
— — —, особое 459, 462, 473
— — —, существование 464
Римана теорема 316
Ротор 298
Ряды 300, см. также соотв. название
—, дифференцирование и интегрирование 330, 332
—, признаки сходимости 302 и сл.
—, применение к интегрированию дифференциальных уравнений 502
—, сравнение 303

Связная область 235
Семейство кривых 412
— поверхностей 426
Синус интегральный 110
—, разложение в ряд 345
Сложение векторов 22
— комплексных чисел 23
— рядов 319
Сложная функция 129
— —, дифференцирование 143
Случайная погрешность 179
Смещение 22
— плоскость 420
Сопряжённые комплексные числа 20
— корни 44
Спираль Архимеда 381
— гиперболическая 382
— логарифмическая 382
Спрямляющая плоскость 422
Сравнение рядов 303
Сравнения коэффициентов способ 73, 78
Среднее арифметическое 182
— геометрическое обобщённое 190
Степенной ряд 332
Степень комплексного числа 28
Стокса формула 295
Строфоида 386
Сумма ряда 300
Существование неявной функции 149
— решения дифференциального уравнения 464
Сходимости интервал 325, 335
— признаки 302 и сл.
— признак Вейерштрасса 329
— — Даламбера 305
— — Коши 306
Сходимость абсолютная 315
— равномерная рядов 328
— условная 315
Сходящийся ряд 300

Теорема, см. соотв. название
Тор 430

Точка возврата 392
— гиперболическая 172
— двукратная 394
— изолированная 391
—, обобщение понятия 130
— особая 389
— p-кратная 395
— параболическая 176
— перелома 397
— предельная 131
— узловая 390
— эллиптическая 171
Трансцендентные функции, интегрирование 107
— — высшие 110
Трёхкратный интеграл 266
Тригонометрическая форма комплексного числа 30
Тригонометрические функции, интегрирование 111
Тригонометрический ряд 355
Тройной интеграл 266
Тэйлора ряд 342, 354
— формула 11, 340
Тяжести центр 278

Узловая точка 390
Умножение комплексных чисел 25
— рядов 319
Унакурсальная кривая 105
Уравнение дифференциальное 435, см. также соотв. название дифференциального уравнения
— характеристическое 481, 488
Условие Липшица 465
Условия Дирихле 356
Условная сходимость, условно сходящийся ряд 315

Факториал, представление в виде интеграла 124
Формула, см. соотв. название
Функции иррациональные, интегрирование 92
— линейно зависимые, независимые 479
— показательные, интегрирование 110
— рациональные, интегрирование 66, 74, 79, 86
— трансцендентные, интегрирование 107
— — высшие 110
— Штурма 47
Функциональные ряды 325
Функциональный определитель 246, 252, 273
Функция непрерывная 132
Функция нескольких переменных 129, 195
— нечётная 362
— неявная 129
— —, дифференцирование 147
— однородная 163
— первообразная 195
— сложная 129
— —, дифференцирование 143
— чётная 362
Фурье ряд 354, 359

Характеристика 427
Характеристическое уравнение 481, 488

Центр кривизны 406
— тяжести 278

Частная производная 136
— —, геометрическое значение 151
— — высшая 157
Частное приращение 136
Частный дифференциал 138
— интеграл 437
Часть главная приращения 140
Чебышев 96
Чётная функция 362
Число комплексное 19
— корней уравнения 13, 16
Чисто мнимые числа 20
Член остаточный 340
— ряда 300

Штурма теорема 50
— функции 47

Эволюта 409
Эвольвента 411
Эйлера теорема 163
— уравнение 492
— формула 36, 86
Эйлеровы подстановки 99
Эквипотенциальные поверхности 299
Элементарные дроби 66
Элемент объёма 234, 274
— площади 234, 249
Эллиптические точки 171

Якобиан 246, 252, 273

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
74	1 снизу	$-\frac{3}{x-2}\,4\ln\lvert x-2\rvert$	$-\frac{3}{x-2}-4\ln\lvert x-2\rvert$	ред.
154	11 сверху	$MP'Q'R'$	$MP'R'Q'$	ред.
169	12 »	предложений	предположений	ред.
265	11 снизу	S	$\underline{S}$	тип.
359	3 »	$\frac{x}{\pi}$	$\frac{x}{2}$	корр.
359	3 »	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\pi}$	корр.
510	25 сверху, правый столбец	Мартеиса	Мертеиса	ред.

Зак. 3437.